ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

G. LORIA

ΤΟΜΟΣ ΠΡΩΤΟΣ

ΣΥΝΟΠΤΙΚΟΣ ΠΙΝΑΞ ΤΩΝ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΤΟΜΟΣ ΠΡΩΤΟΣ

Σελίς

Πρόλογος τοῦ μεταφραστοῦ V
Πρόλογος τοῦ ἐκδοτικοῦ οἴκου HOEPLI 1
Πρόλογος τοῦ συγγραφέως εἰς τὸν Α' Τόμον 3

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ I

Οἱ ἀρχαῖοι μεσογειακοὶ πολιτισμοὶ 9

Προοίμιον 9
Οἱ 'Ασσυρο - Βαβυλώνιοι 12
Οἱ Αἰγύπτιοι 19

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ II

Τὰ ἑλληνικὰ μαθηματικὰ ἐν συμβιώσει μὲ τὴν φιλοσοφίαν . . 37

'Ο Θαλῆς καὶ ἡ 'Ιωνικὴ Σχολὴ 39
'Ο Πυθαγόρας καὶ ἡ 'Ιταλικὴ Σχολὴ 42
'Ελεᾶται, ἀτομικοί, σοφισταὶ 51
'Ο Πλάτων καὶ ἡ 'Ακαδημία 55
'Ο Εὔδοξος καὶ ἡ Σχολὴ τῆς Κυζίκου 59

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

Οἱ νομοθέται τῆς γεωμετρίας 62

'Ο Εὐκλείδης 63
'Ο 'Αρχιμήδης 72
'Ο 'Απολλώνιος 84

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

Φθινόπωρον τῆς ἑλληνικῆς γεωμετρίας 94

'Ερατοσθένης 95
'Υψικλῆς 97

Σελὶς

Νικομήδης, Διοκλῆς, Περσεὺς 98
Ζηνόδωρος 101
Πάππος 102
Σερῆνος 108
Οἱ σχολιασταὶ 109

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

Τὸ μαθηματικὸν ἔργον τῶν ἑλλήνων ἀστρονόμων καὶ γεωδαιτῶν 113

Ἡ ἑλληνικὴ ἀστρονομία ἀπὸ τοῦ Θαλοῦ μέχρι τοῦ Κλαυδίου Πτολεμαίου 113
Ἥρων ὁ Ἀλεξανδρεὺς 126

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI

Ἡ τέχνη τοῦ ἀριθμητικοῦ λογισμοῦ καὶ ἡ ἐπιστήμη τοῦ ἀριθμοῦ εἰς τοὺς Ἕλληνας 135

Τὸ ἀλφάβητον τῆς ἀριθμητικῆς διαλέκτου τῶν Ἑλλήνων . . . 136
Ἑλληνικὴ Λογιστικὴ 143
Διόφαντος 150
Ἀριθμητικὰ παίγνια τῶν Ἑλλήνων 156
Ἀναδρομὴ εἰς τοὺς μαθηματικοὺς τοῦ Βυζαντίου 161

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII

Σύγκλητος καὶ ρωμαϊκὸς λαὸς 168

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VIII

Τὰ μαθηματικὰ εἰς τὴν Εὐρώπην κατὰ τοὺς σκοτεινοὺς χρόνους . 183

Κασσιόδωρος, Βοήθιος, Ἰσίδωρος 183
Βέδας καὶ Ἀλκουῖνος 191
Γκερβέρτος 192
Ἑρμᾶννος καὶ Φράνκων, Μπὲν Ἔσδρα καὶ Σαβαζόρντα . . . 194
Μεταφρασταὶ ἐκ τῆς ἀραβικῆς 197
Τὰ πανεπιστήμια 199

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IX

Τὸ κινεζικὸν αἴνιγμα 201

Προλεγόμενα 201

Σελίς

Τὰ πρῶτα τεκμήρια 205
Μεταγενέστερα ἔργα 209
Τετραγωνισμὸς τοῦ κύκλου 214
Τὰ ἔργα ἀλγέβρας 215

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ X

Εἰς τοὺς πρόποδας τῶν Ἰμαλαΐων 228

Προλεγόμενα 228
Ὁ «Σουλβαζούτρας» 229
Aryabhata 324
Brahmagupta καὶ Bhascara 237
Μαθηματικοὶ μεταγενέστεροι 246

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XI

Τὸ ἀραβικὸν θαῦμα 251

Προλεγόμενα 251
Γενικότητες περὶ τῆς ἀραβικῆς ἀριθμητικῆς 255
Οἱ μεταφρασταὶ τῶν ἑλληνικῶν κειμένων 256
Ὁ Muhammed ibn Musa καὶ οἱ σύγχρονοί του 258
Abu Kamil 264
Albategno καὶ Abu'l Wafa 267
Ibn Haitham καὶ Al Biruni 272
Ibn Sina καὶ Al Nasawi 275
Κατὰ τὸν XI αἰῶνα 277
Nassir ed Din 280
Ἄλλοι ἄραβες μαθηματικοὶ 282

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XII

Ἡ ἀναγέννησις εἰς τὴν Ἰταλίαν: Leonardo Fibonacci 289

Βιογραφία τοῦ Λεονάρδου 289
Τὸ «Liber Abbaci» 292
Τὸ «Practica geometriae» 301
Ἔργα μικρότερα 304
Οἱ ἐπίγονοι τοῦ Λεονάρδου εἰς Ἰταλίαν 311

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XIII

Η ἀναγέννησις πέραν τῶν Ἄλπεων 316

Σελίς

Κατὰ τὸν XIII αἰῶνα 316
Κατὰ τὸν XIV αἰῶνα 321
Κατὰ τὸν XV αἰῶνα 330

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XIV

Ἡ γεωμετρία εἰς βοήθειαν τῆς ζωγραφικῆς 340

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XV

Πρῶται ἐκδηλώσεις τῆς συγκεκομμένης ἀλγέβρας 349

Ἡ ἀριθμητικὴ τοῦ Treviso τοῦ 1478 349
Ἡ ἀριθμητικὴ τοῦ Bamberg τοῦ 1483 352
N. Chuquet καὶ ἡ «Τριμερὴς» (1484) 354
J. Widmann 358
L. Pacioli 360

Σημειώσεις μεταφραστοῦ 375

Βιβλιογραφία κατὰ Κεφάλαιον 385

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

ΟΙ ΑΡΧΑΙΟΙ ΜΕΣΟΓΕΙΑΚΟΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΙ

Προοίμιον

1. Ἀπὸ τὸ ἕνα μέρος αἱ ἐμπορικαὶ συναλλαγαὶ μεταξὺ ἀτόμων καὶ λαῶν διαφόρων, συνέπειαι ἀναπόφευκτοι τῆς μεταξὺ τῶν ἀνθρώπων ἐπικοινωνίας, καὶ ἀπὸ τὸ ἄλλο ἡ ἐπιδίωξις τοῦ ἀνθρώπου νὰ ὑποβάλη εἰς μέτρησιν τὸ σύνολον τῶν φαινομένων, τῶν ὁποίων θέατρον εἶναι ὁ κόσμος καὶ θεαταὶ ὁλόκληρον τὸ ἀνθρώπινον γένος, μὲ τὴν κρυφὴν ἐλπίδα νὰ προσδιορίσῃ τὸν μηχανισμόν των καὶ ν' ἀποκαλύψῃ τὰς κινητηρίους δυνάμεις τῆς δημιουργίας, ὡδήγησαν τὸν ἄνθρωπον, μόλις ἐξελθόντα ἀπὸ τὴν κατάστασιν τῆς βαρβαρότητος, εἰς τὸ νὰ διαμορφώσῃ, ὑπὸ τὴν ὤθησιν μιᾶς ἀκαταμαχήτου κατηγορικῆς προστακτικῆς, τόσον μίαν ἐμβρυώδη γεωμετρίαν ὅσον καὶ μίαν νηπιακὴν ἀριθμητικήν*. Διὰ τοῦτο δὲν ἀποτελεῖ καθόλου ὑπερβολήν, ἐὰν διατυπώσωμεν τὴν γνώμην, ὅτι ἡ ἱστορία τῶν μαθηματικῶν ἀρχίζει μὲ τὴν ἱστορίαν τοῦ πολιτισμοῦ.

Τὸ συμπέρασμα τοῦτο ἐπιβάλλει εἰς τὸν ἐπιθυμοῦντα νὰ γνωρίσῃ

---

* Αἱ περιπτώσεις, κατὰ τὰς ὁποίας ἐπιτακτικὴ προβάλλεται ἡ ἀνάγκη τῆς ἀριθμήσεως, εἶναι τόσον συχναὶ καὶ πολύμορφοι, ὥστε θὰ ἦτο ματαία οἱαδήποτε προσπάθεια συντάξεως ἑνὸς ἀποδεικτικοῦ γεννήσεως τῆς ἀριθμητικῆς. Τοῦτο δὲν διέφευγε τῆς προσοχῆς τοῦ Πλάτωνος, ὁ ὁποῖος ἀπαντῶν εἰς κάποιον ἰσχυριζόμενον ὅτι ἡ τέχνη τῆς ἀριθμήσεως ὀφείλεται εἰς τὸν Παλαμήδην (μυθολογικὸν πρόσωπον, εἰς τὸ ὁποῖον οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες ἐπροσωποποίουν τοὺς ἐκ τῆς Ἀνατολῆς διδασκάλους των) ἐρωτᾷ προσφυέστατα, «ὥστε, χωρὶς τὸν Παλαμήδην, ὁ Ἀγαμέμνων θὰ ἠγνόει πόσα πόδια τοῦ ἔδωσεν ἡ φύσις;»

Σχετικῶς εἶναι ἄξιον σημειώσεως, ὅτι φυλαὶ ἀγρίων ἐδήλωσαν εἰς τοὺς τολμηροὺς ἐξερευνητάς, ποὺ τοὺς ἐπεσκέφθησαν, ὅτι δὲν ᾐσθάνοντο τὴν ἀνάγκην μιᾶς ἀριθμητικῆς τόσον ἐξελιγμένης ὅσον αὐτή, τὴν ὁποίαν θεωροῦμεν ἀχώριστον ἀπὸ τὴν ἀνθρωπίνην κοινωνίαν. Οὔτε ἀποτελεῖ μυστικὸν ὅτι εἰς μερικοὺς οἰκισμοὺς ἀνθρώπων, τὰ μέλη των ἦσαν εἰς θέσιν νὰ ἐκτιμήσουν ἐπακριβῶς τὸ πλῆθος τῶν στοιχείων ἑνὸς συνόλου, χωρὶς ἀκόμη νὰ κατέχουν ἰδιαιτέραν λέξιν ἐκφράζουσαν τὸν ἀριθμὸν τούτων. Ποιμένες ἦσαν εἰς θέσιν ν' ἀντιληφθοῦν ἀμέσως τὴν ἐξαφάνισιν ἑνὸς μέλους τοῦ ποιμνίου, χωρὶς νὰ γνωρίζουν μάλιστα πόσα ζῶα περιελάμβανε τὸ ποίμνιον, ὅπως ἀκριβῶς καὶ ἡ χήνα, παρατηρεῖ ὁ H. Hankel, ἔχει τὴν ἱκανότητα ν' ἀντιλαμβάνεται ἀμέσως τὴν ἐξαφάνισιν ἑνὸς ἀπὸ τοὺς νεοσσοὺς ποὺ ἀπαρτίζουν τὴν συνοδείαν της.

τὴν πορείαν τῶν θετικῶν ἐπιστημῶν διὰ μέσου τῶν αἰώνων τὴν ἀνάγκην ν' ἀνιχνεύσῃ τὰ δοκουμέντα τῶν ἀρχαιοτάτων πολιτισμῶν διὰ ν' ἀνεύρῃ ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα, ἔστω καὶ παρεμπιπτόντως, θίγουν τὰς ἐννοίας τοῦ ἀριθμοῦ, τοῦ σχήματος, τῆς μετρήσεως. Ἔρευνα μακρὰ καὶ ἀκανθώδης, ἡ ὁποία πρέπει νὰ συμπληρωθῇ μὲ ἄλλας ἀκόμη δυσκολωτέρας, αἱ ὁποῖαι ν' ἀποβλέπουν εἰς τὴν ἐξακρίβωσιν τῆς ἐνδεχομένης ἀνεξαρτησίας τῶν χρησιμοποιηθεισῶν μεθόδων καὶ τῶν ἐπιτευχθέντων ἀποτελεσμάτων ὑπὸ διαφόρων λαῶν, ἀλλὰ καὶ τῆς χρονολογικῆς σειρᾶς τῶν σχετικῶν ἐφευρέσεων καὶ ἀνακαλύψεων.

Ἀλλ' ἂν τὰ ἀσφαλῆ μέσα ποὺ προσφέρονται εἰς τὸν ἱστορικόν, τὸν προτιθέμενον νὰ ἐπισημάνῃ τὰς ἀρχαιοτάτας ἀστραπὰς τῆς ἐπιστημονικῆς σκέψεως, εἶναι ὀλίγα καὶ δυσπρόσιτα, σπανιώτατα εἶναι ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα οὗτος δύναται ν' ἀνατρέξῃ διὰ ν' ἀποκαταστήσῃ τὴν ὕπαρξιν σχέσεων μεταξὺ τῶν λαῶν ἐκείνων, οἱ ὁποῖοι, μακρὰν ἀλλήλων εὑρισκόμενοι, ἐκαλλιέργησαν τὴν ἰδίαν ἐπιστήμην, καὶ διὰ νὰ προσδιορίσῃ τὴν κατεύθυνσιν, πρὸς τὴν ὁποίαν ἐξεδηλώθη ἡ ὑποτιθεμένη ἐπίδρασις τῶν μὲν ἐπὶ τῶν δέ· διότι, κατὰ κανόνα, εἶναι ἀνασφαλὴς ἡ χρονολογία τῶν μεμακρυσμένων ἐποχῶν καὶ σπανιώταται αἱ ἀξιόπιστοι μαρτυρίαι, ὡς πρὸς τὰς πνευματικὰς σχέσεις μεταξὺ τῶν διαφόρων λαῶν. Καὶ ἐπειδὴ ἀναρίθμητα παραδείγματα ἔχουν ἀποδείξει ὅτι ὑπὸ συνθήκας ἀναλόγους, ἄνθρωποι ἀνήκοντες ἀκόμη καὶ εἰς φυλὰς διαφόρους, ἐνώπιον τῶν ἰδίων προβλημάτων, συμπεριεφέρθησαν κατὰ τρόπους ὁμοιάζοντας, ἡ ἱστορικὴ φρόνησις ἀπαιτεῖ, ὅπως, ἐν ὄψει ταυτότητος ἐκδηλώσεων, μὴ θεωρηθῇ ἐσπευσμένως ὡς ἀποδεδειγμένη ἡ ὕπαρξις ἑνὸς συνδέσμου μεταξὺ διανοουμένων διαφόρων ἐποχῶν καὶ διαφόρων φυλῶν.

Διὰ τοὺς ἀνωτέρω λόγους, εἶναι ἀδύνατον σήμερον (καὶ θὰ εἶναι ἴσως πάντοτε) νὰ γραφῇ μία ἱστορία τῆς ἐπιστημονικῆς σκέψεως, ἐκ τῆς ὁποίας ν' ἀπορρέῃ, χωρὶς δισταγμούς, ποῖοι ὑπῆρξαν οἱ λαοὶ ἐκεῖνοι, οἱ ὁποῖοι ἐπεδόθησαν διαδοχικῶς εἰς μίαν καὶ τὴν αὐτὴν ἐπιστήμην καὶ ὁποία καὶ πόση ὑπῆρξεν ἡ ἐπίδρασις, τὴν ὁποίαν ἤσκησαν οἱ μὲν ἐπὶ τῶν δέ.

Ὅσον ἀφορᾷ εἰδικώτερον τὰ μαθηματικά, λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν τῆς ἀβεβαιότητος τῶν πληροφοριῶν, αἱ ὁποῖαι ἔφθασαν μέχρις ἡμῶν ἀναφορικῶς πρὸς τὴν ὑποτιθεμένην ἐπίδρασιν τῶν Ἰνδιῶν καὶ τῆς Κίνας ἐπὶ τῶν Εὐρωπαϊκῶν λαῶν καὶ πρὸς τὴν ἐποχήν, καθ' ἣν αὕτη τὸ πρῶτον ἐγένετο αἰσθητὴ (περὶ τῶν μαθηματικῶν ἔργων τῶν λαῶν τούτων θὰ πραγματευθῶμεν εἰς τὰ Κεφάλαια IX καὶ X), εἶναι ἄξιον συστάσεως εἰς ἐκείνους, οἱ ὁποῖοι ἀποδύονται εἰς τὴν προσπάθειαν προσδιορισμοῦ— κατὰ τὸ ἐφικτὸν— τῶν πρωταρχικῶν φάσεων ἀναπτύξεως τῆς ἐπιστήμης ταύτης, ὅπως κατευθύνουν τὰς ἐρεύνας των ἐπὶ τῶν λαῶν, οἱ ὁποῖοι, κατὰ τὴν ἀρχαιότητα, κατεῖχον τὰς ὄχθας τῆς Μεσογείου. Καὶ εἶναι ἀκριβῶς αὐτὸ τὸ ὁποῖον προτιθέμεθα νὰ κάμωμεν καὶ ἡμεῖς, εἰς τὴν ἀρχὴν τῆς προκειμένης ἐξι-

στορήσεως, ἀφοῦ προηγουμένως διατυπώσωμεν τὴν ἀκόλουθον γενικὴν παρατήρησιν.

2. Εἶναι φανερὸν ὅτι ὁ ἱστορικὸς τῶν μαθηματικῶν δὲν πρέπει νὰ σταματήσῃ εἰς τὴν ἐποχήν, κατὰ τὴν ὁποίαν ὁ ἄνθρωπος δὲν εἶχεν ἀκόμη φθάσει εἰς τὴν σύλληψιν τῆς ἐννοίας τοῦ ἀφῃρημένου ἀριθμοῦ καὶ κατὰ τὴν ὁποίαν διέθετε μὲν τὰ φωνητικὰ μέσα νὰ σημάνῃ δύο πρόβατα, δύο γίδια, τέσσαρα βώδια κλπ., ἀλλὰ δὲν ἦτο εἰς θέσιν νὰ συλλάβῃ τοὺς ἀριθμοὺς δύο, τέσσαρα κλπ. Τὸ ἔργον του ἀρχίζει τὴν στιγμήν, κατὰ τὴν ὁποίαν ὁ ἄνθρωπος ᾐσθάνθη τὴν ἀνάγκην νὰ ἀριθμήσῃ καὶ νὰ ὑπολογίσῃ.

Ἀλλὰ διὰ νὰ τὸ ἐπιτύχῃ αὐτὸ ὁ ἄνθρωπος, ἐχρειάζετο νὰ ἔχῃ μίαν σειρὰν λέξεων ἱκανῶν νὰ παραστήσουν τὰ στοιχεῖα τῆς φυσικῆς σειρᾶς. Πρὸς τὸν σκοπὸν αὐτόν, ἀντὶ νὰ κατασκευάσουν ἐπίτηδες λέξεις, ἐχρησιμοποίησαν ὀνόματα ἀντικειμένων ἐχόντων ἀμυδράν τινὰ συγγένειαν πρὸς τὰ στοιχεῖα ταῦτα. Οὕτω εἰς τὰς λέξεις (χρησιμοποιουμένας ἤδη μὲ ἄλλας σημασίας):

ἐγώ, πτέρυγες, τρίφυλλον, χείρ,

ἐδόθη ἀκόμη ὁ ρόλος νὰ παριστάνουν τοὺς ἀριθμούς:

ἕνα, δύο, τρία, πέντε.

Ἀλλὰ εἶναι εὐνόητον ὅτι, ὅσον ζωηρὰ καὶ ἂν ἦτο ἡ φαντασία καὶ ἰσχυρὰ ἡ μνήμη τῶν πρωτογόνων, πολὺ σύντομα εὑρέθησαν οὗτοι πρὸ τῆς ἀδυναμίας νὰ χαρακτηρίσουν μὲ λέξεις διαρκῶς νέας, ἐκλεγομένας μὲ βάσιν ὁμοιότητας συχνὰ ἀμφισβητουμένας καὶ σπανίως ἐπαρκεῖς, τὸ ἀτελείωτον πλῆθος τῶν ἀριθμῶν καὶ ἔπειτα νὰ ἐνθυμοῦνται ἑκάστοτε τὰ ὀνόματά των.

Πρὸς παραμερισμὸν αὐτοῦ τοῦ ἐμποδίου, τὸ ὁποῖον ἐδυσχέραινε τὴν φυσικὴν ἀνάπτυξιν ἑνὸς πρακτικοῦ συστήματος λογισμοῦ, ἐσκέφθησαν νὰ καθορίσουν, εἰς τὴν ὁμογενῆ σειρὰν τῶν ἀριθμῶν, μερικὰ ἄτομα (ποὺ ἠμποροῦν νὰ ὀνομασθοῦν «θεμελιώδεις ἀριθμοί») εἰς σταθερὰς διαδοχικὰς ἀποστάσεις, τὰ ὁποῖα θὰ ἔπαιζον τὸν ρόλον σταδιομετρικῶν λίθων, καὶ θὰ ἐπέτρεπον εἰς τὴν σκέψιν νὰ ἐκτιμήσῃ τὴν πορείαν ποὺ εἶχε νὰ διανύσῃ διὰ νὰ φθάσῃ ἕνα ἄλλο τυχὸν στοιχεῖον τῆς σειρᾶς. Τοιουτοτρόπως, διὰ νὰ χαρακτηρίσωμεν τὸ ἐν λόγῳ στοιχεῖον, θὰ ἠδυνάμεθα νὰ δηλώσωμεν πόσον ἀπέχει τοῦτο ἀπὸ τὸν ἀμέσως κατώτερόν του θεμελιώδη ἀριθμόν.

Ἡ ἀνωτέρω ἰδέα ἀποτελεῖ τρόπον τινὰ τὸν νωτιαῖον μυελὸν ὅλων τῶν συστημάτων ἀριθμήσεως, ὄχι λοιπὸν μόνον τῶν συστημάτων ἀριθμήσεως ποὺ χρησιμοποιοῦν σήμερον ὅλοι οἱ ἀνεπτυγμένοι λαοί *, καὶ ποὺ διαφέρουν μεταξύ των μόνον ὡς πρὸς τὸ μέγεθος τοῦ ἐκλεγομένου διαστήματος μεταξὺ τῶν θεμελιωδῶν ἀριθμῶν. Ἐκτὸς σπανίων ἐξαιρέσεων, τὸ διάστημα αὐτὸ εἶναι δέκα. Τὸ γεγονὸς τοῦτο εἶναι ἀξιοσημείωτον, ἐσχολιάσθη ἀπὸ

* Θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ ὑποκύψῃ κανεὶς εἰς τὸν πειρασμὸν ν' ἀφαιρέσῃ τὴν λέξιν «ἀνεπτυγμένοι», ἀφ' ἧς στιγμῆς ἡ παρουσία τοῦ ἀριθμοῦ 10 εἰς συστήματα ἀριθμή-

ἀρχαιοτάτων χρόνων καὶ ἔδωσε λαβὴν εἰς τὸν Ἀριστοτέλη νὰ διατυπώσῃ τὴν ἀκόλουθον ἀπορίαν εἰς τὸ βιβλίον του Προβλήματα: «Διὰ ποῖον λόγον ὅλοι, τόσον οἱ βάρβαροι ὅσον καὶ οἱ Ἕλληνες, ἀριθμοῦν κατὰ δεκάδας καὶ ὄχι ἀλλέως ;» Εἰς τὴν ἀπορίαν ταύτην ὁ μέγας φιλόσοφος ἀπαντᾷ εὐστοχώτατα ὅτι αὐτὸ ὀφείλεται εἰς τὸ γεγονός, ὅτι αἱ χεῖρες τοῦ ἀνθρώπου, ἀποτελοῦσαι φυσικὸν βοήθημα εἰς τοὺς ἀριθμητικοὺς ὑπολογισμούς, ἔχουν συνολικῶς δέκα δακτύλους. Τὴν ἰδίαν ἐξήγησιν ἔχει ἡ παρουσία, εἰς μερικὰ συστήματα ἀριθμήσεως ἐν χρήσει, τῶν ἀριθμῶν 5 καὶ 20.

Ἐὰν ἀπὸ τὴν προφορικὴν ἀρίθμησιν περάσωμεν εἰς τὴν γραπτήν, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι οἱ ἀριθμοὶ οἱ περιέχοντες μονάδας διαφόρων τάξεων, διαδέχονται ἀλλήλους κατὰ σειρὰν φθίνουσαν. Ὅσοι γράφουν ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιά, θ' ἀναγράψουν πρῶτα τὰς χιλιάδας, ἔπειτα πρὸς τὰ δεξιὰ τὰς ἑκατοντάδας καὶ πάλιν πρὸς τὰ δεξιὰ τὰς δεκάδας καὶ τελευταῖα, τὰς μονάδας. Οἱ Ἄραβες ὅμως, π.χ. οἱ ὁποῖοι γράφουν ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερά, ἀκολουθοῦν εὐλόγως τὴν ἀντίστροφον σειρὰν ἀναγραφῆς. Θέτουν δηλαδὴ πρῶτα δεξιὰ τὰς ἑκατοντάδας, ἔπειτα πρὸς τὰ ἀριστερὰ τὰς δεκάδας καὶ τελευταίας, πάλιν πρὸς τὰ ἀριστερά, τὰς μονάδας. Ὁ γράφων δηλαδὴ ἐπιθυμεῖ πάντοτε νὰ γράφῃ τὰς διαφόρους μονάδας κατὰ σειρὰν φθίνουσαν, ὥστε τελευταῖαι νὰ μένουν αἱ ἁπλαῖ μονάδες. Τὸ σύστημα τοῦτο, χαρακτηρίζεται συνήθως ὡς «νόμος τοῦ Hankel», ἀπὸ τὸ ὄνομα ἐκείνου, ὁ ὁποῖος πρῶτος ρητῶς ἐσημείωσε καὶ διετύπωσε τὴν ὡς ἄνω βασικὴν ἀρχὴν τῆς ἀριθμογραφίας.

Οἱ Ἀσσυρο - Βαβυλώνιοι

3. Δὲν θ' ἀκολουθήσωμεν τὸ παράδειγμα ἐκείνου, ὁ ὁποῖος ἐπεχείρησε πρῶτος νὰ γράψῃ μίαν γενικὴν ἱστορίαν τῶν μαθηματικῶν (ὁμιλοῦμεν διὰ τὸν Heilbronner) χωρὶς νὰ διστάσῃ νὰ προωθήσῃ τὴν προκειμένην ἔρευναν μέχρι τοῦ κοινοῦ μας προπάτορος, ἀλλά, ἀφίνοντες τὸν προπάτορα Ἀδὰμ εἰς τὴν ἡσυχίαν του, θ' ἀναζητήσωμεν τὰ πρῶτα ἴχνη τῶν μαθηματικῶν γνώσεων μεταξὺ τῶν κατοίκων τῆς εὐρείας ἐκείνης πεδιάδος, ἡ ὁποία, κατὰ τὴν Παλαιὰν Διαθήκην, ὑπῆρξεν ἕδρα τοῦ γηΐνου παραδείσου, τουτέστι

σεως λαῶν εὑρισκομένων ἀκόμη εἰς κατάστασιν βαρβαρότητος, διεπιστώθη τόσον ἀπὸ ἐρευνητὰς τῆς προ-κολομβιακῆς Ἀμερικῆς, ὅσον καὶ ἀπὸ ἐξερευνητὰς ἐπισκεφθέντας προσφάτως ἀγρίας φυλάς, εἰς τὰς δασώδεις ἐκτάσεις τῆς νοτίου Ἀμερικῆς, εἰς περιοχὰς τῆς Ἀφρικῆς καὶ εἰς πλείστας νήσους τῆς Πολυνησίας.

Περιοριζόμεθα εἰς τὴν νύξιν ταύτην καὶ μόνον, ἀφοῦ σκοπός μας εἶναι ν' ἀφηγηθῶμεν ἀποκλειστικῶς τὰ ἀφορῶντα τὸν Εὐρωπαϊκὸν χῶρον, ἀνατρέχοντες ἐνίοτε εἰς τὰς ἐξω-εὐρωπαϊκὰς χώρας μόνον πρὸς τὸν σκοπὸν ἀνιχνεύσεως τῆς ἐπιδράσεως, τὴν ὁποίαν εἶχον ἄλλοι πολιτισμοὶ ἐπὶ τῆς ἐπιστήμης μας, ὡς καὶ τῆς ἐξαπλώσεως τὴν ὁποίαν ἔλαβεν αὐτὴ κατὰ τοὺς τελευταίους χρόνους.

ἀρχαιοτάτων χρόνων καὶ ἔδωσε λαβὴν εἰς τὸν Ἀριστοτέλη νὰ διατυπώσῃ τὴν ἀκόλουθον ἀπορίαν εἰς τὸ βιβλίον του Προβλήματα: «Διὰ ποῖον λόγον ὅλοι, τόσον οἱ βάρβαροι ὅσον καὶ οἱ Ἕλληνες, ἀριθμοῦν κατὰ δεκάδας καὶ ὄχι ἀλλέως;» Εἰς τὴν ἀπορίαν ταύτην ὁ μέγας φιλόσοφος ἀπαντᾷ εὐστοχώτατα ὅτι αὐτὸ ὀφείλεται εἰς τὸ γεγονός, ὅτι αἱ χεῖρες τοῦ ἀνθρώπου, ἀποτελοῦσαι φυσικὸν βοήθημα εἰς τοὺς ἀριθμητικοὺς ὑπολογισμούς, ἔχουν συνολικῶς δέκα δακτύλους. Τὴν ἰδίαν ἐξήγησιν ἔχει ἡ παρουσία, εἰς μερικὰ συστήματα ἀριθμήσεως ἐν χρήσει, τῶν ἀριθμῶν 5 καὶ 20.

Ἐὰν ἀπὸ τὴν προφορικὴν ἀρίθμησιν περάσωμεν εἰς τὴν γραπτήν, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι οἱ ἀριθμοὶ οἱ περιέχοντες μονάδας διαφόρων τάξεων, διαδέχονται ἀλλήλους κατὰ σειρὰν φθίνουσαν. Ὅσοι γράφουν ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιά, θ' ἀναγράψουν πρῶτα τὰς χιλιάδας, ἔπειτα πρὸς τὰ δεξιὰ τὰς ἑκατοντάδας καὶ πάλιν πρὸς τὰ δεξιὰ τὰς δεκάδας καὶ τελευταῖα, τὰς μονάδας. Οἱ Ἄραβες ὅμως, π.χ. οἱ ὁποῖοι γράφουν ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερά, ἀκολουθοῦν εὐλόγως τὴν ἀντίστροφον σειρὰν ἀναγραφῆς. Θέτουν δηλαδὴ πρῶτα δεξιὰ τὰς ἑκατοντάδας, ἔπειτα πρὸς τὰ ἀριστερὰ τὰς δεκάδας καὶ τελευταίας, πάλιν πρὸς τὰ ἀριστερά, τὰς μονάδας. Ὁ γράφων δηλαδὴ ἐπιθυμεῖ πάντοτε νὰ γράφῃ τὰς διαφόρους μονάδας κατὰ σειρὰν φθίνουσαν, ὥστε τελευταῖαι νὰ μένουν αἱ ἁπλαῖ μονάδες. Τὸ σύστημα τοῦτο, χαρακτηρίζεται συνήθως ὡς «νόμος τοῦ Hankel», ἀπὸ τὸ ὄνομα ἐκείνου, ὁ ὁποῖος πρῶτος ρητῶς ἐσημείωσε καὶ διετύπωσε τὴν ὡς ἄνω βασικὴν ἀρχὴν τῆς ἀριθμογραφίας.

Οἱ Ἀσσυρο - Βαβυλώνιοι

3. Δὲν θ' ἀκολουθήσωμεν τὸ παράδειγμα ἐκείνου, ὁ ὁποῖος ἐπεχείρησε πρῶτος νὰ γράψῃ μίαν γενικὴν ἱστορίαν τῶν μαθηματικῶν (ὁμιλοῦμεν διὰ τὸν Heilbronner) χωρὶς νὰ διστάσῃ νὰ προωθήσῃ τὴν προκειμένην ἔρευναν μέχρι τοῦ κοινοῦ μας προπάτορος, ἀλλά, ἀφίνοντες τὸν προπάτορα Ἀδὰμ εἰς τὴν ἡσυχίαν του, θ' ἀναζητήσωμεν τὰ πρῶτα ἴχνη τῶν μαθηματικῶν γνώσεων μεταξὺ τῶν κατοίκων τῆς εὐρείας ἐκείνης πεδιάδος, ἡ ὁποία, κατὰ τὴν Παλαιὰν Διαθήκην, ὑπῆρξεν ἕδρα τοῦ γηΐνου παραδείσου, τουτέστι

σεως λαῶν εὑρισκομένων ἀκόμη εἰς κατάστασιν βαρβαρότητος, διεπιστώθη τόσον ἀπὸ ἐρευνητὰς τῆς προ-κολομβιακῆς Ἀμερικῆς, ὅσον καὶ ἀπὸ ἐξερευνητὰς ἐπισκεφθέντας προσφάτως ἀγρίας φυλάς, εἰς τὰς δασώδεις ἐκτάσεις τῆς νοτίου Ἀμερικῆς, εἰς περιοχὰς τῆς Ἀφρικῆς καὶ εἰς πλείστας νήσους τῆς Πολυνησίας.

Περιοριζόμεθα εἰς τὴν νύξιν ταύτην καὶ μόνον, ἀφοῦ σκοπός μας εἶναι ν' ἀφηγηθῶμεν ἀποκλειστικῶς τὰ ἀφορῶντα τὸν Εὐρωπαϊκὸν χῶρον, ἀνατρέχοντες ἐνίοτε εἰς τὰς ἐξω-εὐρωπαϊκὰς χώρας μόνον πρὸς τὸν σκοπὸν ἀνιχνεύσεως τῆς ἐπιδράσεως, τὴν ὁποίαν εἶχον ἄλλοι πολιτισμοὶ ἐπὶ τῆς ἐπιστήμης μας, ὡς καὶ τῆς ἐξαπλώσεως τὴν ὁποίαν ἔλαβεν αὕτη κατὰ τοὺς τελευταίους χρόνους.

τῆς ἐκτεταμένης κοιλάδος, ποὺ ἔχει ὡς φυσικά της σύνορα δύο μεγάλους ποταμούς, τὸν Τίγρητα καὶ τὸν Εὐφράτην, καὶ ἡ ὁποία, κατοικουμένη κατὰ τὴν ἀρχαιότητα ὑπὸ δύο λαῶν, ἕνας τῶν ὁποίων (οἱ Σουμέριοι), μὴ σημιτικός, προερχόμενος ἐκ τοῦ Νότου, ὑπέστη διαδοχικῶς τὴν κυριαρχίαν τῶν ἀρχαίων Περσῶν, τῶν Μακεδόνων, τῶν Σελευκιδῶν, τῶν Πάρθων, τῶν νεωτέρων Περσῶν, τῶν Ἀράβων καὶ τέλος τῶν Τούρκων. Εἶναι ἡ γῆ, τὴν ὁποίαν χαρακτηρίζομεν σήμερον ὡς Μεσημβρινὴν Μεσοποταμίαν καὶ ἡ ὁποία καθ' ἣν ἐποχὴν ἀπετέλει ἀνεξάρτητον κράτος, εἶχεν ὡς πρωτεύουσαν τὴν βιβλικὴν Βαβυλῶνα.

Ἡ φήμη τῶν Βαβυλωνίων, ὡς ἀκαταπονήτων καὶ ἀκριβολόγων παρατηρητῶν τῆς πορείας τῶν ἄστρων, πιστοποιεῖται ἀπὸ τὸν Πλίνιον τὸν πρεσβύτερον, ὁ ὁποῖος τοποθετεῖ τὴν ἀρχὴν τῶν παρατηρήσεών των 100.000 χρόνια π.Χ. καὶ ἀπὸ τὸν Πολύβιον, ὁ ὁποῖος περιορίζει εἰς 31.000 χρόνια τὴν διάρκειαν τῶν ἰδίων ἀστρονομικῶν παρατηρήσεων.! Χωρὶς νὰ θέλωμεν νὰ γίνωμεν ἐγγυηταὶ τῆς ἀκριβείας τῶν δεδομένων τούτων, πιθανῶς φανταστικῶν, ἀρκούμεθα νὰ μνημονεύσωμεν ὅτι ὁ Καλλισθένης, εἰσελθὼν εἰς τὴν Βαβυλῶνα μὲ τὴν ἀκολουθίαν τοῦ Μεγάλου Ἀλεξάνδρου (331 π.Χ.), ἀνεκάλυψεν ἴχνη ἀστρονομικῶν παρατηρήσεων ἀναγόμενα εἰς τὸ ἔτος 2234 π.Χ., ὁ δὲ Κλαύδιος Πτολεμαῖος, ἡ μεγάλη ἑλληνικὴ αὐθεντία εἰς τὸν τομέα τῆς Ἀστρονομίας, ἀποδίδει εἰς τοὺς Βαβυλωνίους τὴν παρατήρησιν μιᾶς σεληνιακῆς ἐκλείψεως, ἐπισυμβάσης τὸ ἔτος 747 π.Χ., καὶ τέλος ὅτι ἕνα βαβυλωνιακὸν ἡμερολόγιον, κατὰ μίαν ἑρμηνείαν τοῦ διαπρεποῦς μελετητοῦ τῶν ἀνατολικῶν πολιτισμῶν Sayce, ἀνάγεται εἰς τὸ ἔτος 3700 π. Χ. Ὅλα αὐτὰ ἀποδεικνύουν κατὰ τρόπον ἀναντίρρητον, ὅτι ὁ θαυμασμὸς τοῦ Πλινίου καὶ τοῦ Πολυβίου, ὅσον καὶ ἂν φαίνεται ὀλίγον ὑπερβολικός, δὲν στερεῖται κάποιας βάσεως *.

Σπεύδομεν νὰ σημειώσωμεν ὅτι οἱ Βαβυλώνιοι παρεκινήθησαν εἰς τὴν σπουδὴν τῶν οὐρανίων φαινομένων, ὄχι ἀπὸ τὴν ἀφιλοκερδῆ περιέργειαν ν' ἀνακαλύψουν τοὺς νόμους, ποὺ διέπουν τὰς κινήσεις τοῦ ἡλίου καὶ τῶν ἄστρων, ἀλλ' ἀπὸ τὸν βασανιστικὸν πόθον τῆς ἀνακαλύψεως κάποιου οἰωνοῦ προαναγγέλλοντος τὰ μέλλοντα νὰ συμβοῦν. Ἔρχεται τώρα διὰ πρώτην φορὰν εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τὸ γεγονός, τὸ ὁποῖον συχνὰ ἐπαναλαμβάνεται κατὰ τὴν διαδρομὴν τῶν αἰώνων, ὅτι ἐμπειρίαι ψευδεῖς καὶ ἀπατηλαὶ (ὅπως αἱ χαρακτηρίζουσαι τὴν Ἀστρολογίαν), ἔδωσαν ζωὴν εἰς μίαν ἐπιστήμην (ἐννοοῦμεν τὴν Ἀστρονομίαν), ἡ ὁποία ἀποτελεῖ δικαίως ἀντικείμενον ὑπερηφανείας διὰ τὸ ἀνθρώπινον πνεῦμα.

* Ποῖα ὄργανα ἐχρησιμοποίουν οἱ Ἀσσυρο-Βαβυλώνιοι εἰς τὰς παρατηρήσεις των; Ἡ ἀπάντησις εἰς τὸ θεμελιῶδες τοῦτο ἱστορικὸν πρόβλημα ἀναμένεται ἐκ νεωτέρων ἀνασκαφῶν. Δύναται μόνον νὰ σημειωθῇ ἀπὸ τοῦδε ὅτι εὑρέθησαν ἤδη ἕνας φακὸς καὶ ἕνα κάτοπτρον.

4. Μέχρι τῶν ἀρχῶν τοῦ δευτέρου αἰῶνος, τὰς πηγὰς πληροφοριῶν γύρω ἀπὸ τὴν πνευματικὴν καὶ κοινωνικὴν ζωὴν τῶν Βαβυλωνίων, ἐξεπροσώπει ἡ Β ί β λ ο ς καὶ τὰ ἱστορικὰ ἔργα τοῦ Ἡ ρ ο δ ό τ ο υ καὶ τοῦ Δ ι ο δ ώ ρ ο υ τ ο ῦ Σ ι κ ε λ ι ώ τ ο υ, πηγαὶ ἔμμεσοι καὶ συγκεχυμέναι, εἰς τὰς ὁποίας εἶναι εὐδιάκριτος ἡ διαταρακτικὴ ἐπίδρασις τῆς φαντασίας, τῆς τόσον γονίμου εἰς τοὺς Ἀνατολικοὺς καὶ Μεσογειακοὺς λαούς.

Ἕνα μέσον ἐξακριβώσεως τῶν πληροφοριῶν τῶν προερχομένων ἀπὸ τὰς πηγὰς αὐτὰς ὑπῆρξαν αἱ ἐπιγραφαί, ποὺ ὑφίστανται εἰς τοὺς τοίχους τῶν ἀνακτόρων τῆς ἀρχαίας Περσεπόλεως. Τὰς ἐπιγραφὰς αὐτὰς εἶχεν ἤδη ἐπισημάνει ἀπὸ τοῦ 1621 ὁ περιηγητὴς Pietro della Valle (γεννηθεὶς εἰς Ρώμην τὴν 2 Ἀπριλίου 1586, ἀποθανὼν εἰς Νεάπολιν τὴν 20 Ἀπριλίου 1652).

Ἕνα δεύτερον μέσον, ἀνακαλυφθὲν βραδύτερον, ὑπῆρξαν τὰ πολυάριθμα κεράμινα πινακίδια, τὰ ὁποῖα, φέροντα πλῆθος μυστηριωδῶν σημείων, ἦλθον εἰς φῶς κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ XIX αἰῶνος,χάρις εἰς τὰς μεθοδικὰς ἀνασκαφάς, τὰς ὁποίας ἤρχισε τὸ 1821 ὁ ἄγγλος J. Birch, ἐσυνέχισαν δὲ μετὰ ταῦτα εἰς εὐρεῖαν κλίμακα ἐν Μεσοποταμίᾳ διάφοροι ἐπίσημοι ἀποστολαί *. Ἀλλὰ διὰ νὰ καταστοῦν τὰ εὑρήματα αὐτὰ χρήσιμα, ἦτο ἀπαραίτητον ν' ἀποκρυπτογραφηθῇ ἡ ἐπ' αὐτῶν γραφή.

Ἡ πρώτη ἀποτελεσματικὴ προσπάθεια, πρὸς ὑπερνίκησιν τῆς φοβερᾶς δυσκολίας λύσεως τοῦ προβλήματος τούτου, ὀφείλεται εἰς ἕνα Γερμανὸν μελετηρότατον, τὸν F. G. Grotenfend[3] (9 Ἰουλίου 1775 - 15 Δεκεμβρίου 1853), ὁ ὁποῖος τὴν 4ην Σεπτεμβρίου 1802 παρουσίασεν εἰς τὴν Ἑταιρείαν τῶν Ἐπιστημῶν τῆς Γοτίγγης μίαν μελέτην ἐπὶ τοῦ θέματος. Ἀλλὰ ἡ Ἑταιρεία, ἀνίκανος νὰ σταθμίσῃ ἐπαξίως τὴν σπουδαιότητα τῆς μελέτης, ἠρνήθη νὰ τὴν δημοσιεύσῃ εἰς τὰ πρακτικά της **. Μολαταῦτα, εἰς

* Ἴσως νὰ ἔχῃ ἐνδιαφέρον ἡ πληροφορία ὅτι τὰ ἀνακαλυφθέντα πινακίδια ἦσαν προωρισμένα νὰ σχηματίζουν τ ό μ ο υ ς (ἂν ἐπιτρέπεται ἡ ἔκφρασις), ὅπως ἀποδεικνύεται ἀπὸ τὰς ὀπάς, τὰς ὁποίας ἔφερον εἰς τὸ κέντρον, διὰ μέσου τῶν ὁποίων ἔπρεπε νὰ διέρχεται μία συνδετικὴ ταινία.

Ἡ διαδοχικὴ σειρὰ τῶν πινακιδίων ἀποκατεστάθη, κατόπιν τῆς παρατηρήσεως ὅτι ἕκαστον πινακίδιον τελειώνει μὲ τὰς ἰδίας λέξεις, μὲ τὰς ὁποίας ἄρχεται τὸ ἑπόμενον. Ὁ ἔχων οἰκειότητα μὲ τὰ ἀρχαῖα βιβλία γνωρίζει ὅτι αὐτὸ ἦτο πάντοτε τὸ ἐν χρήσει σύστημα κατὰ τοὺς πρώτους χρόνους τῆς τυπογραφικῆς τέχνης.

Οἱ προκύπτοντες τόμοι ἐφυλάσσοντο εἰς εἰδικὰ οἰκήματα, ἕνα ἐκ τῶν ὁποίων ἀνάγεται εἰς τὴν ἐποχὴν τοῦ Assurbanipal, ὁ ὁποῖος ἐβασίλευσε κατὰ τὰ ἔτη 668 - 626 π.Χ.

** Περίπου συγχρόνως (θὰ τὸ ἴδωμεν ἐν καιρῷ) ἡ Γαλλικὴ Ἀκαδημία ἀπέφευγε νὰ ἐκφέρῃ γνώμην ἐπὶ τῆς ἀξίας μιᾶς ἀποδείξεως ὀφειλομένης εἰς τὸν P. Ruffini περὶ ἀδυνάτου τῆς λύσεως τῶν ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων βαθμοῦ ἀνωτέρου τοῦ τετάρτου. Οὕτω, παρατηροῦμεν ἐπ' εὐκαιρίᾳ, ἐξεδηλώθησαν σχεδὸν συγχρόνως, δύο ἐντυπωσιακαὶ περιπτώσεις πανικοῦ ἐξ ἐκείνου, ὁ ὁποῖος καταλαμβάνει τοὺς μεγάλους ἐπιστημονικοὺς ὀργανισμούς, ὅταν καλοῦνται ν' ἀποκαταστήσουν μίαν δόξαν, τῆς δράσεώς των περιοριζομένης οὕτω κατὰ προτίμησιν εἰς τὴν ἐπικύρωσιν κρίσεων, μὴ ἐπιδεχομένων ἀμφιβολίας τινος.

ἐπιβεβαίωσιν τοῦ ἀρχαίου ρητοῦ «ἡ ἀλήθεια εἶναι κόρη τοῦ χρόνου» (veritas temporis filia), ἡ ἐργασία τοῦ Grotenfend, ἀνακαλυφθεῖσα εἰς τὰ ἀρχεῖα τῆς ἑταιρείας ἐνενήκοντα ἔτη ἀργότερα καὶ ἐκτιμηθεῖσα τελικῶς ὅπως ἔπρεπεν, ἦλθεν εἰς τὸ φῶς τῆς δημοσιότητος τὸ 1904, ἀποδοθείσης οὕτω τῆς προσηκούσης, οὐχὶ μικρᾶς τιμῆς εἰς τὸν ἐργάτην της. Τὸ ἀποτέλεσμα ὅμως τῆς καθυστερημένης αὐτῆς δημοσιεύσεως, ἦτο ὅτι ὁ Grotenfend δὲν ἔζη πλέον διὰ νὰ λάβῃ μέρος εἰς τὰς ἐρεύνας, τὰς ὁποίας διεξήγαγον κατὰ τὸν παρελθόντα αἰῶνα οἱ R. Lepsius, P. E. Botta (υἱὸς τοῦ διαπρεποῦς Ἰταλοῦ ἱστορικοῦ), H. Layard, E. V. Hilprecht καὶ ἄλλοι, καὶ αἱ ὁποῖαι ὡδήγησαν τελικῶς εἰς μίαν ἱκανοποιητικὴν γνῶσιν τῆς γλώσσης τῶν Βαβυλωνίων καὶ συνεπῶς τοῦ βαθμοῦ τοῦ πολιτισμοῦ των.

5. Ἡ γλῶσσα, εἰς τὴν ὁποίαν ἔχουν γραφῆ τὰ βαβυλωνιακὰ πινακίδια, εἶναι ἐκείνη ποὺ ἐχρησιμοποίουν οἱ Σουμέριοι. Οἱ χαρακτῆρες εἶναι ἐξ ἐκείνων ποὺ ὀνομάζονται σφηνοειδεῖς, διότι προκύπτουν ἐκ τοῦ συνδυασμοῦ τριῶν εἰδικῶν σημείων, ἤτοι μιᾶς γραμμῆς ὁριζοντίας, μιᾶς κατακορύφου καὶ μιᾶς τεθλασμένης ἐν εἴδει σφηνός. Τὰ σημεῖα αὐτὰ ἠμποροῦμεν ν' ἀναπαραστήσωμεν ὡς ἑξῆς : |, —, ⟨. Ὅσον ἀφορᾷ τώρα τὴν ἐπιστήμην μας, εἰς τὴν ὁποίαν ὀφείλουν φυσικὰ νὰ περιορισθοῦν αἱ σκέψεις μας, ἡ καλυτέρα πηγὴ πληροφοριῶν συνίσταται εἰς ἕνα κειμήλιον, ἀναγόμενον εἰς τὴν περίοδον 2300 - 1600 π. Χ., γνωστὸν ὑπὸ τὸ ὄνομα Πινακίδια τοῦ Σενκερέχ. Ὠνομάσθη τοιουτοτρόπως ἀπὸ τὸ ὄνομα τῆς τοποθεσίας ἐπὶ τῶν ὀχθῶν τοῦ Εὐφράτου, ὅπου ἀνεκαλύφθησαν ὑπὸ τοῦ γεωλόγου W. K. Loftus τὸ 1854.

Ἀπὸ τὸ πολύτιμον αὐτὸ δοκουμέντον συνάγεται ὅτι ἡ Βαβυλωνιακὴ ἀριθμητικὴ εἶχε δύο βάσεις, τὸ 10 καὶ τὸ 60. Ἡ ὕπαρξις τῆς πρώτης ἀποδεικνύεται ἀπὸ τὰ ἀκόλουθα εἰδικὰ σύμβολα, μὲ τὰ ὁποῖα παριστάνοντο οἱ ἀριθμοὶ 1, 10, 100, 1000, 10.000 καὶ 100.000 :

|, ⟨, |—, ⟨|—, ⟨⟨|—, ⟨⟨⟨⟨|—

Ἐπαναλαμβάνοντες κάθε ἕνα ἀπὸ αὐτά, ὄχι περισσότερον ἀπὸ ἐννέα φοράς, δυνάμεθα προφανῶς νὰ παραστήσωμεν ὅλους τοὺς μικροτέρους τοῦ ἑκατομμυρίου ἀριθμούς.

Ἐν πάσῃ περιπτώσει, διὰ τοῦ τρόπου τούτου προκύπτει ἕνα σύμβολον συνιστάμενον ἀπὸ ἀριθμόν τινὰ μονάδων, ἕνα σύμβολον δεκάδων κ.ο.κ. διαδεχόμενα τὸ ἕνα τὸ ἄλλο κατὰ τάξιν σύμφωνον πρὸς τὸν νόμον τοῦ Hankel.

Ἡ ὕπαρξις τοῦ δευτέρου θεμελιώδους ἀριθμοῦ 60 πιστοποιεῖται πρὸ πάντων ἀπὸ τὰ εἰδικὰ ὀνόματα (Soss, Ner, Sar) μὲ τὰ ὁποῖα οἱ Βαβυλώνιοι παρίστων τοὺς ἀριθμοὺς 60, 600, 3600 * καὶ ἀκόμη εὐκρινέστερα ἀπὸ τὴν

* Χάριν ἁπλῆς περιεργείας προσθέτομεν ὅτι μὲ τοὺς ἀριθμοὺς 1,2,....., 60 παριστάνοντο οἱ Θεοὶ τῆς βαβυλωνιακῆς μυθολογίας, ἐνῷ τὰ ἐνδιάμεσα κλάσματα ἐχρησι-

σταθερὰν χρῆσιν κλασμάτων ἐχόντων παρονομαστὰς τὰς διαδοχικὰς δυνάμεις τοῦ 60*. Πρόκειται ἀκριβῶς περὶ τῶν κλασμάτων ἐκείνων, τῶν ὁποίων εὐρεῖα ἐφαρμογὴ γίνεται εἰς τὴν ἑλληνικὴν 'Αστρονομίαν (διὸ καὶ ἐκαλοῦντο συνήθως «ἀστρονομικὰ κλάσματα») καὶ τῶν ὁποίων μερικὰ ἴχνη εὑρίσκονται εἰς τὴν διατηρηθεῖσαν συνήθειαν νὰ διαιροῦμεν τὴν μοῖραν εἰς 60 πρῶτα λεπτὰ καὶ τὸ πρῶτον λεπτὸν εἰς 60 δεύτερα λεπτά.

'Η παρουσία τοῦ ἀριθμοῦ 10, ὡς βάσεως τοῦ ἀριθμητικοῦ συστήματος τῶν Βαβυλωνίων, δὲν ἀπαιτεῖ καμμίαν ἰδιαιτέραν ἐξήγησιν, κατόπιν τῶν ὅσων εἴπομεν ἤδη περὶ τούτου ἀναφέροντες τὴν ὑπὸ τοῦ 'Αριστοτέλους δοθεῖσαν ἑρμηνείαν. 'Αλλὰ ἡ παρουσία τῶν ἀριθμῶν 6, 60, 360, δὲν εἶναι τόσον εὐεξήγητος, ἡ δὲ προέλευσις αὐτῶν ἀποτελεῖ σημεῖον σκοτεινὸν καὶ ἀντιλεγόμενον. Μερικοί, ὅπως ὁ Formaleoni καὶ ὁ Cantor, συνδέουν τὸ γεγονὸς μὲ τὴν ὑπόθεσιν ὅτι οἱ Βαβυλώνιοι πιθανῶς ἐγνώριζον ὅτι τὸ ἡλιακὸν ἔτος περιελάμβανε 360 ἡμέρας, ἐγνώριζον ὅτι ἡ περιφέρεια διαιρεῖται ἀκριβῶς εἰς 6 μέρη ἴσα ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ἰδιότητος τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου, κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ πλευρὰ ἰσοῦται πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου. "Αλλοι, ὅπως ὁ Kewitsch καὶ ὁ M. Simon, προέβαλον τὴν ἀντίρρησιν ὅτι ἡ γνῶσις τῆς ἀνωτέρω ἰδιότητος ὑπὸ τῶν Βαβυλωνίων δὲν εἶναι ἱστορικῶς ἐξηκριβωμένη, καὶ ἐπὶ πλέον, «ὅτι οὗτοι, ὡς δόκιμοι παρατηρηταὶ τῶν οὐρανίων φαινομένων, δὲν ἦτο δυνατὸν ν' ἀρκεσθοῦν εἰς τὴν χονδρικὴν ἐκείνην ἐκτίμησιν τῆς διαρκείας τοῦ ἡλιακοῦ ἔτους. 'Εξ ἄλλου, τέλος, ἡ ἀριθμητικὴ εἶναι μία προϋπόθεσις καὶ οὐχὶ συνέπεια τῆς οἱασδήποτε ἀστρονομικῆς παρατηρήσεως. 'Επροτίμησαν λοιπὸν νὰ ζητήσουν τὴν ἐξήγησιν τῆς παρουσίας τῶν ἀριθμῶν 6 καὶ 60 τοῦ ἀριθμητικοῦ συστήματος τῶν Βαβυλωνίων εἰς τὴν πολύτιμον ἰδιότητα τῶν ἀριθμῶν τούτων ὅτι ἔχουν μέγα πλῆθος διαιρετῶν.

Μία νεωτέρα ἐξήγησις τῶν ἀρχῶν τοῦ ἑξηκονταδικοῦ συστήματος ἐδόθη (E. Hoppe) ἀπὸ τὴν παρατήρησιν, ὅτι διὰ νὰ λαμβάνουν γνῶσιν τῆς παρόδου τοῦ χρόνου οἱ 'Ασσυρο - Βαβυλώνιοι, εἰς μίαν χώραν προικισμένην μὲ ἀληθῶς παραδεισιακὸν κλῖμα, ἐχρησιμοποίουν τὴν σκιὰν ἑνὸς κατακορύφου στύλου, διαιροῦντες τὴν περιβάλλουσαν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐδάφους εἰς τὴν βάσιν τοῦ στύλου εἰς ὡρισμένον ἀριθμὸν γωνιῶν ἴσων μεταξύ των. 'Επειδὴ λοιπὸν ἡ γωνία τῶν 60° δύναται νὰ ληφθῇ εὐκολώτατα διὰ τῆς κατασκευῆς ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου, αὐτομάτως ἀνέκυψεν ἡ ἐκλογὴ τοῦ ἀριθμοῦ 6, ὡς ἀριθμοῦ ὑποδιαιρέσεως τῆς περιφερείας καὶ τῆς διαρκείας τῆς ἡμέρας. "Ιχνη τοιαύτης χρονολογικῆς διαιρέσεως ἀνεκαλύφθησαν

μενον πρὸς παράστασιν τῶν «πνευμάτων» ἐκείνων, τὰ ὁποῖα ὁ λαὸς ἐπίστευεν ὡς ὑφιστάμενα μεταξὺ Θεοῦ καὶ ἀνθρώπων.

* Εἴς τινας περιπτώσεις οἱ Βαβυλώνιοι ἐχρησιμοποίουν κλάσματα μὲ παρονομαστὴν 6 καὶ δὲν ἦσαν ἄγνωστοι εἰς αὐτοὺς αἱ σχέσεις : 2/6 = 1/3, 3/6 = 1/2, 4/6 = 2/3.

πράγματι. Ἀλλὰ μὲ τὴν πάροδον τοῦ χρόνου καὶ τὴν πρόοδον τοῦ πολιτισμοῦ, αὕτη ἀπεδείχθη ἀνεπαρκής· συνδυάζοντες τότε τὸν ἀριθμὸν 6 μὲ τὸν ἀριθμὸν 10, βάσει τοῦ ἐν χρήσει συστήματος ἀριθμήσεως, ἔφθασαν εἰς τὸν ἀριθμὸν 60, ὁ ὁποῖος συνδυασθεὶς ἐκ νέου μὲ τὸν 6, ὡδήγησεν εἰς τὸν ἀριθμὸν 360. Καὶ εἶναι βέβαιον ὅτι τὸ ἀποτέλεσμα τοῦτο προσέλαβε μεγαλυτέραν σημασίαν, ὅταν ἀκριβέστεραι ἀστρονομικαὶ παρατηρήσεις ἀπεκατέστησαν τὴν ἀλήθειαν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς 360 μετρᾷ μὲ κάποιαν προσέγγισιν τὸν ἀριθμὸν τῶν ἡμερῶν, τὰς ὁποίας χρειάζεται ὁ ἥλιος διὰ νὰ ἐπιστρέψῃ εἰς τὴν ἀρχικήν του θέσιν. Ὅταν τοῦτο γίνῃ δεκτόν, ἡ διαίρεσις τῆς μοίρας εἰς 60 πρῶτα λεπτὰ καὶ τοῦ πρώτου λεπτοῦ εἰς 60 δεύτερα λεπτὰ κατανοεῖται χωρὶς μεγάλην δυσκολίαν.

6. Ἄλλο σπουδαῖον ζήτημα σχετικῶς μὲ τὴν ἀριθμητικήν, τῆς ὁποίας ἐγίνετο χρῆσις παρὰ τὰς ὄχθας τοῦ Εὐφράτου, εἶναι νὰ γνωρίσωμεν κατὰ πόσον οἱ Βαβυλώνιοι ἠσθάνθησαν τὴν ἀνάγκην εἰδικοῦ συμβόλου, διὰ νὰ σημάνουν τὴν ἀπουσίαν μονάδων ὡρισμένης τάξεως, μὲ ἄλλους λόγους κατὰ πόσον ἐγνώριζον τὴν χρῆσιν τοῦ μηδενός. Τὰ πινακίδια τοῦ Σενκερὲχ δὲν διευκολύνουν τὴν λύσιν τοῦ ἐνδιαφέροντος αὐτοῦ ζητήματος. Τὸ περίπλοκον γεγονός, ὅτι δὲν εἶναι πάντοτε φανερὸν μὲ ποίαν δύναμιν τοῦ 60 πρέπει νὰ ὑπονοοῦμεν ἑκάστοτε πολλαπλασιαζόμενον ἕνα δεδομένον ἀριθμόν, θὰ ἠδύνατο νὰ θεωρηθῇ ὡς μία ἀρνητικὴ ἔνδειξις. Μερικαὶ ἐν τούτοις, προσφάτως σημειωθεῖσαι ἔγγραφαὶ ἀστρονομικῶν παρατηρήσεων, εἰς τὰς ὁποίας ἕνα εἰδικὸν σύμβολον διαχωρισμοῦ μαρτυροῖ τὴν ἀπουσίαν μονάδων ὡρισμένης τάξεως, κατέστησαν ἔτι μᾶλλον ἐπιθυμητὴν τὴν ἀποκρυπτογράφησιν καὶ ἄλλων δοκουμένων, δυναμένων νὰ μεταβάλουν εἰς βεβαιότητα τὴν διαφαινομένην μέχρι τοῦδε δυνατότητα οἱ Βαβυλώνιοι νὰ προηγήθησαν τῶν Ἰνδῶν εἰς τὴν διατύπωσιν καὶ θεραπείαν τῆς ἀνάγκης ἑνὸς συμβόλου ἀναλόγου πρὸς τὸ μηδέν, τοῦ ὁποίου ἡ πρακτικὴ ἀξία εἶναι ἀληθῶς ἀντίστροφος τῆς ἀριθμητικῆς του τιμῆς.

Παρὰ ταῦτα πρέπει νὰ σημειώσωμεν ὅτι ἡ ἀνακάλυψις τῶν δύο θεμελιωδῶν ἀριθμῶν εἰς τὸ ἀριθμητικὸν σύστημα τῶν Βαβυλωνίων, εἶχεν ὡς ἄμεσον ἀποτέλεσμα τὴν ὁριστικὴν ἑρμηνείαν τῶν μαθηματικοῦ περιεχομένου πινακιδίων τοῦ Σενκερέχ. Ἐξαιρέσει μερικῶν κενῶν ὀφειλομένων εἰς ἀναποφεύκτους φθοράς, περιέχονται εἰς αὐτὰ τὰ τετράγωνα τῶν ἀριθμῶν 1, 2,.....60 καὶ οἱ κύβοι τῶν ἀριθμῶν 1, 2,..... 30, διὰ τῶν ὁποίων ἠδύνατο νὰ διευκολυνθῇ ἡ ἐκτέλεσις ἀντιστρόφων πράξεων (ἐξαγωγὴ τετραγωνικῆς καὶ κυβικῆς ῥίζης), ἀναγκαίων εἰς τοὺς ἱερεῖς, τοὺς ἀσχολουμένους μὲ ἀστρολογικὰς μελέτας.

Μεταγενέστεραι πληροφορίαι περὶ τῶν ἀριθμητικῶν γνώσεων τῶν Βαβυλωνίων ἦλθον εἰς φῶς, χάρις εἰς τὰς ἀνασκαφάς, αἱ ὁποῖαι ἤρχισαν τὸ

1889 πλησίον τοῦ Nuffar, δαπάναις τοῦ Πανεπιστημίου τῆς Πενσυλβανίας καὶ ὑπὸ τὴν διεύθυνσιν τοῦ Hilprecht. Πράγματι ἡ μελέτη πεντήκοντα περίπου χιλιάδων ὀρειχαλκίνων ἐπιγραφῶν μὲ χαρακτῆρας σφηνοειδεῖς ὡδήγησεν εἰς τὴν ἀνακάλυψιν πινάκων πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, διατεταγμένων εἰς στήλην κατὰ τὸν τρόπον ποὺ, ὅπως θὰ ἴδωμεν, ἐσυνειθίζετο τὸν Μεσαίωνα ἀπὸ τοὺς Ἰταλοὺς λογιστὰς καὶ τοὺς διαδόχους των. Ἡ ἔκτασίς των εἶναι πραγματικὰ ἐπιβλητική, διότι ὁ πολλαπλασιαστὴς φθάνει μέχρι τοῦ 180.000. Ἀκολουθοῦν πίνακες διαιρέσεως, ἐκτεινόμενοι μέχρι τοῦ $60^4 = 12.960.000$ (ἀριθμὸς συμπίπτων, κατά τινας, μὲ τὸν μυστηριώδη «ἀριθμὸν τοῦ Πλάτωνος», ρυθμιστὴν τῶν καλῶν καὶ κακῶν γεννήσεων). Ἀλλὰ δὲν εἶναι αὐτὸς ὁ μέγιστος ἀριθμός, ὅστις ἀπαντᾶται εἰς τὰ Βαβυλωνιακὰ δοκουμέντα τὰ μέχρι τοῦδε ἐρευνηθέντα, καθ' ὅσον εὑρίσκεται ἀκόμη εἰς αὐτὰ ὁ πολὺ ἐπιβλητικώτερος ἀριθμός, ὁ γραφόμενος σήμερον : 195.955.500.000.000.

Μία τελευταία πληροφορία ἦλθεν εἰς φῶς ἀπὸ τὰ δοκουμέντα, μὲ τὰ ὁποῖα ἐπλουτίσθη προσφάτως ἡ ἱστορία τῶν Βαβυλωνίων. Πρόκειται περὶ τῆς χρήσεως τῆς «ἀφαιρετικῆς μεθόδου» εἰς τὴν γραφικὴν καὶ φωνητικὴν παράστασιν τῶν ἀριθμῶν, ποὺ θεωρεῖται χαρακτηριστικὸν γνώρισμα τῆς προφορικῆς καὶ γραπτῆς ἀριθμήσεως τῶν Ρωμαίων. Πράγματι εἰς τὰ πινακίδια, τὰ ὁποῖα ἀνέγνωσεν ὁ Hilprecht, ἀπαντῶνται οὐχὶ ὀλιγώτερα τῶν δώδεκα παραδειγμάτων παραστάσεως ἀριθμῶν, κατὰ τρόπον ἀνάλογον πρὸς τὸ λατινικὸν «undeviginti» = XIX. Πρόκειται ἄραγε περὶ τυχαίας συμπτώσεως ἢ μήπως ὁ ἕνας ἀπὸ τοὺς δύο λαοὺς ἐδίδαξεν εἰς τὸν ἄλλον τὴν βασικὴν ἔννοιαν αὐτοῦ τοῦ εὐφυοῦς τεχνάσματος; Εἶναι ἕνα ζήτημα, τὸ ὁποῖον προσλαμβάνει μεγαλυτέραν σημασίαν, ἐὰν παρατηρήσωμεν ὅτι ἡ ἀφαιρετικὴ μέθοδος φαίνεται νὰ ἐχρησιμοποιήθη κάποτε καὶ ἀπὸ τοὺς Ἑβραίους, τὸ ὁποῖον ὅμως δὲν εἴμεθα ἀκόμη εἰς θέσιν νὰ λύσωμεν.

Ὅσον ἀφορᾷ τὸ εὖρος τῶν ἀριθμητικῶν γνώσεων τοῦ λαοῦ, περὶ τοῦ ὁποίου ὁ λόγος, δυνάμεθα ν' ἀναφέρωμεν ἕνα μόνον δεδομένον, τὸ ὁποῖον ἀναφέρει ὁ Dickson εἰς τὸ βιβλίον του «Ἱστορία τῆς θεωρίας τῶν ἀριθμῶν», τόμος I, 1919, σ. 337), ὅτι δηλαδὴ εἰς τὸ οὕτω καλούμενον «Βαβυλωνιακὸν Ταλμοὺδ» ἀναγράφεται ἡ πρότασις : Ἵνα ἀριθμὸς τῆς μορφῆς $1000\,a + b$ εἶναι διαιρετὸς διὰ 7, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι διαιρετὸς διὰ 7 ὁ ἀριθμὸς $2a + b$. Ὅπερ ἀποδεικνύεται εὐκόλως ἐκ τῆς ἰσοτητος $100\,a + b = 7 \cdot 14a + (2a + b)$. Δὲν ἀποκλείεται βεβαίως νὰ πρόκειται περὶ μεταγενεστέρου εὑρήματος τῆς ἀσσυρο - βαβυλωνιακῆς ἐπιστήμης.

7. Ἐνῷ τὰ προεκτεθέντα συντελοῦν εἰς τὸ νὰ γνωρίσωμεν τὸ μέγεθος τῶν προόδων, τὰς ὁποίας ἐπέτυχον οἱ Βαβυλώνιοι εἰς τὸν τομέα τῆς ἀριθμητικῆς, ἄλλα γεγονότα ἔρχονται ν' ἀποδείξουν ὅτι ἡ γεωμετρία δὲν ἔμει-

νεν ἐκτὸς τοῦ κύκλου τῶν πνευματικῶν των ἀπασχολήσεων, ἀφοῦ, διὰ τῶν γεωμετρικῶν σχημάτων, ἐζήτησαν βοήθειαν εἰς τὰς προσπαθείας των νὰ μελετήσουν τὸ μέγα βιβλίον τῆς εἱμαρμένης. Παράλληλοι, τετράγωνα, τρίγωνα, γωνίαι ὀρθαί, ἀπαντῶνται ὑπὸ τὰ ἐρείπια τοῦ Βαβυλωνιακοῦ πολιτισμοῦ. Δὲν εἶναι ἀπίθανον νὰ ἐγνώριζον τὴν ἰδιότητα, ὅτι ἕνα τρίγωνον μὲ πλευρὰς ὡς οἱ ἀριθμοὶ 3, 4, 5, εἶναι ὀρθογώνιον. Εἶναι ὅμως βέβαιον ὅτι ἦσαν εἰς θέσιν νὰ ὑπολογίζουν μὲ ἀκρίβειαν τὸ ἐμβαδὸν τῶν τετραγώνων, τῶν ὀρθογωνίων, τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων, ἀκόμη καὶ τῶν τραπεζίων ἐνῷ διὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κύκλου ἐχρησιμοποίουν τὴν τιμὴν $\pi = 3$, ἡ ὁποία ἀπαντᾶται εἰς τὴν Βίβλον.

Τοιαῦται γνώσεις δὲν πρέπει νὰ προκαλοῦν ἔκπληξιν, ὅταν ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν, ὅτι ὁ λαὸς περὶ τοῦ ὁποίου γίνεται λόγος, ὄχι μόνον ἐγνώριζε ν' ἀνεγείρῃ ἐπιβλητικὰ κτίρια (μερικὰ τῶν ὁποίων ἠδυνήθησαν ν' ἀντεπεξέλθουν νικηφόρως ἐναντίον τῆς φθορᾶς τοῦ χρόνου) ἀλλά, ὅπως ἀπεδείχθη ἐκ προσφάτων εὑρημάτων, ἦτο εἰς θέσιν νὰ καταστρώνῃ μὲ ἐπαρκῆ ἀκρίβειαν τὴν κάτοψιν ἑνὸς κτιρίου.

Διὰ τοῦτο δὲν στερεῖται βάσεως ἡ ὑπόθεσις ὅτι τὸ ἀνωτέρω δοθὲν διάγραμμα τῶν μαθηματικῶν γνώσεων τῶν Βαβυλωνίων περιλαμβάνει ὀλιγότερα τῶν ὅσων θὰ ἠδυνάμεθα ν' ἀναφέρωμεν, ἐὰν τὰ εἰς τὴν διάθεσίν μας ἀρχαιολογικὰ δεδομένα ἦσαν περισσότερα[4].

Μία τοιαύτη γνώμη εὑρίσκει ὑποστήριξιν καὶ εἰς τὴν πληροφορίαν ὅτι οἱ Βαβυλώνιοι εἶχον καθιερώσει ἕνα πλῆρες σύστημα μέτρων καὶ σταθμῶν. Μονὰς μετρήσεως ἦτο ὁ πῆχυς, ἴσος πρὸς 0,496 τοῦ μέτρου. Διὰ μικρότερα μήκη ἐχρησιμοποιεῖτο ὁ «δάκτυλος», ἤτοι τὸ τριακοστὸν τοῦ πήχεως, καὶ ὁ «ποῦς», ἴσος πρὸς τὰ 2/3 τοῦ πήχεως, ἤτοι πρὸς 20 δακτύλους. Φαίνεται περαιτέρω ὡς βέβαιον ὅτι ὡς μονάδα χωρητικότητος ἐλάμβανον τὸ 144ον μέρος τοῦ κυβικοῦ πήχεως, καὶ ὡς μονάδα βάρους τὸ βάρος ὄγκου ὕδατος, ἴσου πρὸς τὸ 240ον μέρος τοῦ κυβικοῦ πήχεως.

Οἱ Αἰγύπτιοι

8. Ἡ κοινωνικὴ καὶ πολιτικὴ ἱστορία τῆς Αἰγύπτου εἶναι γνωστὴ μὲ ἱκανοποιητικὴν ἀκρίβειαν. Ἡ ἱστορία διδάσκει ὅτι μέχρι τῆς κατακτήσεως αὐτῆς ὑπὸ τοῦ Μεγ. Ἀλεξάνδρου ἡ χώρα ἐκυβερνᾶτο διαδοχικῶς ἀπὸ μονάρχας ἀνήκοντας εἰς τριάκοντα διαφόρους δυναστείας, ἡ ἀρχαιοτέρα τῶν ὁποίων ἀνάγεται εἰς τὸ ἔτος 4500 π.Χ.

Ἐπιβλητικῆς δυνάμεως ἔργα, ὅπως αἱ ὀγκώδεις πυραμίδες (3600 ἢ 3700 π.Χ.), οἱ πανύψηλοι ὀβελίσκοι, οἱ μεγαλοπρεπεῖς ναοί, τὸ θαυμαστὸν σύστημα ἀρδεύσεως καὶ τὰ πανίσχυρα ὑδατοφράγματα, ἀποτελοῦν ἀκατα-

νεν ἐκτὸς τοῦ κύκλου τῶν πνευματικῶν των ἀπασχολήσεων, ἀφοῦ, διὰ τῶν γεωμετρικῶν σχημάτων, ἐζήτησαν βοήθειαν εἰς τὰς προσπαθείας των νὰ μελετήσουν τὸ μέγα βιβλίον τῆς εἱμαρμένης. Παράλληλοι, τετράγωνα, τρίγωνα, γωνίαι ὀρθαί, ἀπαντῶνται ὑπὸ τὰ ἐρείπια τοῦ Βαβυλωνιακοῦ πολιτισμοῦ. Δὲν εἶναι ἀπίθανον νὰ ἐγνώριζον τὴν ἰδιότητα, ὅτι ἕνα τρίγωνον μὲ πλευρὰς ὡς οἱ ἀριθμοὶ 3, 4, 5, εἶναι ὀρθογώνιον. Εἶναι ὅμως βέβαιον ὅτι ἦσαν εἰς θέσιν νὰ ὑπολογίζουν μὲ ἀκρίβειαν τὸ ἐμβαδὸν τῶν τετραγώνων, τῶν ὀρθογωνίων, τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων, ἀκόμη καὶ τῶν τραπεζίων ἐνῷ διὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κύκλου ἐχρησιμοποίουν τὴν τιμὴν $\pi = 3$, ἡ ὁποία ἀπαντᾶται εἰς τὴν Βίβλον.

Τοιαῦται γνώσεις δὲν πρέπει νὰ προκαλοῦν ἔκπληξιν, ὅταν ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν, ὅτι ὁ λαὸς περὶ τοῦ ὁποίου γίνεται λόγος, ὄχι μόνον ἐγνώριζε ν' ἀνεγείρῃ ἐπιβλητικὰ κτίρια (μερικὰ τῶν ὁποίων ἠδυνήθησαν ν' ἀντεπεξέλθουν νικηφόρως ἐναντίον τῆς φθορᾶς τοῦ χρόνου) ἀλλά, ὅπως ἀπεδείχθη ἐκ προσφάτων εὑρημάτων, ἦτο εἰς θέσιν νὰ καταστρώνῃ μὲ ἐπαρκῆ ἀκρίβειαν τὴν κάτοψιν ἑνὸς κτιρίου.

Διὰ τοῦτο δὲν στερεῖται βάσεως ἡ ὑπόθεσις ὅτι τὸ ἀνωτέρω δοθὲν διάγραμμα τῶν μαθηματικῶν γνώσεων τῶν Βαβυλωνίων περιλαμβάνει ὀλιγότερα τῶν ὅσων θὰ ἠδυνάμεθα ν' ἀναφέρωμεν, ἐὰν τὰ εἰς τὴν διάθεσίν μας ἀρχαιολογικὰ δεδομένα ἦσαν περισσότερα[4].

Μία τοιαύτη γνώμη εὑρίσκει ὑποστήριξιν καὶ εἰς τὴν πληροφορίαν ὅτι οἱ Βαβυλώνιοι εἶχον καθιερώσει ἕνα πλῆρες σύστημα μέτρων καὶ σταθμῶν. Μονὰς μετρήσεως ἦτο ὁ πῆχυς, ἴσος πρὸς 0,496 τοῦ μέτρου. Διὰ μικρότερα μήκη ἐχρησιμοποιεῖτο ὁ «δάκτυλος», ἤτοι τὸ τριακοστὸν τοῦ πήχεως, καὶ ὁ «πούς», ἴσος πρὸς τὰ 2/3 τοῦ πήχεως, ἤτοι πρὸς 20 δακτύλους. Φαίνεται περαιτέρω ὡς βέβαιον ὅτι ὡς μονάδα χωρητικότητος ἐλάμβανον τὸ 144ον μέρος τοῦ κυβικοῦ πήχεως, καὶ ὡς μονάδα βάρους τὸ βάρος ὄγκου ὕδατος, ἴσου πρὸς τὸ 240ον μέρος τοῦ κυβικοῦ πήχεως.

Οἱ Αἰγύπτιοι

8. Ἡ κοινωνικὴ καὶ πολιτικὴ ἱστορία τῆς Αἰγύπτου εἶναι γνωστὴ μὲ ἱκανοποιητικὴν ἀκρίβειαν. Ἡ ἱστορία διδάσκει ὅτι μέχρι τῆς κατακτήσεως αὐτῆς ὑπὸ τοῦ Μεγ. Ἀλεξάνδρου ἡ χώρα ἐκυβερνᾶτο διαδοχικῶς ἀπὸ μονάρχας ἀνήκοντας εἰς τριάκοντα διαφόρους δυναστείας, ἡ ἀρχαιοτέρα τῶν ὁποίων ἀνάγεται εἰς τὸ ἔτος 4500 π.Χ.

Ἐπιβλητικῆς δυνάμεως ἔργα, ὅπως αἱ ὀγκώδεις πυραμῖδες (3600 ἢ 3700 π.Χ.), οἱ πανύψηλοι ὀβελίσκοι, οἱ μεγαλοπρεπεῖς ναοί, τὸ θαυμαστὸν σύστημα ἀρδεύσεως καὶ τὰ πανίσχυρα ὑδατοφράγματα, ἀποτελοῦν ἀκατα-

μάχητα τεκμήρια τῆς ἐξαιρετικῆς ἀναπτύξεως, εἰς τὴν χώραν αὐτήν, τῶν διαφόρων κλάδων τῆς Ἐφηρμοσμένης Μηχανικῆς.

Ἡ ἀνακάλυψις τέλος, ἡ γενομένη ὑπὸ τῶν Γάλλων ἐπιστημόνων, οἱ ὁποῖοι εὑρίσκοντο εἰς τὴν ἀκολουθίαν τοῦ στρατηγοῦ Βοναπάρτου κατὰ τὴν περίφημον ἐκστρατείαν τῆς Αἰγύπτου, τῶν λειψάνων μιᾶς πλωτῆς διώρυγος, συνδεούσης τὴν Μεσόγειον μὲ τὴν Ἐρυθρὰν Θάλασσαν, δὲν ἀποδεικνύει τίποτε ἄλλο ἢ ὅτι ἡ τομὴ τοῦ ἰσθμοῦ τοῦ Σουέζ, διὰ τὴν ὁποίαν δικαίως ὑπερηφανεύεται ἡ νεωτέρα τεχνικὴ ἐπιστήμη τῶν Γάλλων Μηχανικῶν, ἐπεχειρήθη τοὐλάχιστον τριάκοντα αἰῶνας προτοῦ ἀχθῇ εἰς πέρας.

Ἐξ ἄλλου διάφορα διατάγματα, διαθῆκαι, συμβόλαια, ἀποδείξεις, συναλλαγματικαὶ καὶ ἄλλα παρόμοια ἔγγραφα, διαφυγόντα θαυματουργικῶς τὴν ἀδηφάγον ἐπίδρασιν τοῦ χρόνου, καταδεικνύουν πῶς μία σοφὴ διακυβέρνησις εἶχε περιβάλει τὴν Αἴγυπτον μὲ ἕνα δίκτυον διοικητικῶν διατάξεων προνοίας καὶ ἀντιλήψεως. Ἰδιαιτέρως πρέπει ν'ἀναφερθῇ ἡ ἀνάπτυξις ἑνὸς συστήματος μεταφορῶν προσώπων, ἐμπορευμάτων καὶ ἐπιστολῶν, ἱκανοῦ νὰ συγκριθῇ πρὸς τὰ ἀντίστοιχα συστήματα τοῦ συγχρόνου πολιτισμοῦ. Ἂς προστεθῇ ὅτι φαίνεται νὰ ἀνάγεται εἰς τὸ ἔτος 4236 καὶ ἴσως τὸ 4271 π.Χ. ἡ εἰσαγωγὴ τοῦ ἡλιακοῦ ἔτους τῶν 365 ἡμερῶν, ὑποδιαιρουμένου εἰς 12 μῆνας ἐκ 30 ἡμερῶν ἑκάστου, μὲ τὴν προσθήκην 5 ἐμβολίμων ἡμερῶν.

Περὶ τῆς ἐπιζήλου καταστάσεως τῶν ἐν Αἰγύπτῳ πραγμάτων ἔγραψαν μὲ ἀμέριστον θαυμασμὸν οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες, οἱ ὁποῖοι διέτρεξαν περιηγούμενοι τὴν χώραν, ὠθούμενοι ἄλλοτε ἀπὸ τὴν δίψαν τοῦ κέρδους, καὶ ἄλλοτε ἀπὸ τὴν εὐγενῆ ἐπιθυμίαν νὰ ἔλθουν εἰς ἐπαφὴν μὲ τὴν ἱερατικὴν τάξιν, εἰς τὴν ὁποίαν, κατὰ τὰ κρατοῦντα εἰς τοὺς πρώτους πολιτισμούς, ἐπεφυλάσσετο τὸ μονοπώλιον τῆς ἐπιστήμης.

Μεταξὺ τῶν ἄλλων, ὁ Ἡρόδοτος, ὁ πατὴρ τῆς ἱστορίας, ἀφοῦ διετύπωσε κατὰ τρόπον ἀνάγλυφον τὸ ἀξίωμα ὅτι «ἡ Αἴγυπτος εἶναι δῶρον τοῦ Νείλου» (θέλων μὲ τοῦτο νὰ βεβαιώσῃ ὅτι ἡ εὐφορία τῆς χώρας ὠφείλετο εἰς τὰς περιοδικὰς πλημμυρογενεῖς προσχώσεις τοῦ μεγάλου ἐκείνου ποταμοῦ), ἐξέφρασε τὴν ἄποψιν, ὅτι εἰς τὴν χώραν αὐτὴν ἐγεννήθη ἡ Γεωμετρία[5], ἐκ τῆς ἀνάγκης νὰ γίνεται συχνὰ ἀναπασσάλωσις τῶν ὁρίων τῶν ἀγροτικῶν ἰδιοκτησιῶν, τὰ ὁποῖα ἐξηφάνιζον κατ' ἔτος αἱ πλημμύραι τοῦ Νείλου*. Ὁ Ἰάμβλιχος, ἐξ ἄλλου, βεβαιώνει εἰς τὸ ἔργον του *Βιογραφία τοῦ Πυθαγόρου*, ὅτι οἱ Αἰγύπτιοι ἱερεῖς εἶχον ἀφιερώσει περισσότερα ἀπὸ 22 ἔτη εἰς τὴν σπουδὴν τῆς γεωμετρίας καὶ τῆς ἀστρονομίας.

* Ὁ βασιλεὺς Σέσωστρις (ὁ αὐτὸς πιθανῶς πρὸς τὸν Ραμσῆ II) τῆς XIX δυναστείας, περὶ τὸ 1300 π.Χ. διένειμε τὴν καλλιεργήσιμον γῆν εἰς τοὺς ὑπηκόους του, διῃρημένην εἰς τεμάχια τετράγωνα.

9. Αἱ πληροφορίαι γύρω ἀπὸ τὸν πολιτισμὸν ἐν γένει τῶν Αἰγυπτίων καὶ ἰδιαιτέρως γύρω ἀπὸ τὰς μαθηματικὰς καὶ ἀστρονομικὰς γνώσεις των προέρχονται ἀπὸ Ἕλληνας καὶ Λατίνους συγγραφεῖς, μὴ διαθέτοντας ἰδιαιτέραν ἁρμοδιότητα ἐπὶ τοῦ θέματος καὶ διὰ τοῦτο ἀντὶ νὰ ἱκανοποιοῦν, ἀντιθέτως καθιστοῦν σφοδροτέραν τὴν ἐπιθυμίαν πρὸς ἀπόκτησιν ἀμέσων πληροφοριῶν. Ἀλλὰ τὸ καλύτερον μέσον διὰ τὴν ἀπόκτησιν τοιούτων πληροφοριῶν, τουτέστιν ἡ ἀπ' εὐθείας μελέτη τῶν διασωθέντων γραπτῶν μνημείων, ἐπὶ πολλοὺς αἰῶνας ὑπερέβαινε τὰς ἀνθρωπίνους δυνάμεις.

Αἱ μακραὶ ταινίαι ἐκ παπύρου, ἐντὸς τῶν ὁποίων ἦσαν περιτυλιγμέναι αἱ Αἰγυπτιακαὶ μούμιαι, ἦσαν κατάφορτοι ἀπὸ σημεῖα καὶ σχήματα, τὰ ὁποῖα εὑρίσκοντο ἐπίσης χαραγμένα κανονικὰ ἐπάνω εἰς τοὺς τοίχους τῶν σημαντικωτέρων κτιριακῶν μνημείων τῆς Αἰγυπτιακῆς τέχνης καὶ ἔδιδον τὴν ἐντύπωσιν ὅτι τὰ σημεῖα αὐτὰ δὲν ἦσαν τίποτε ἄλλο ἀπὸ ἰδεογράμματα, τῶν ὁποίων τὸ μυστικὸν ἐκράτει ζηλοτύπως ἡ μυστηριώδης αἰγυπτιακὴ θεότης Ἶσις.

Εἰς τὸν J. F. Champollion (ἐγεν. 23 Δεκεμβρίου 1790, ἀπεθ. 4 Ἀπριλίου 1832) ἀνήκει ἡ ἄφθιτος δόξα ὅτι κατώρθωσε ν' ἀποσπάσῃ τὸν πέπλον ὁ ὁποῖος ἐπὶ αἰῶνας ἔκρυπτε ἀπὸ τοὺς βεβήλους τὴν σημασίαν τῶν ἱερογλυφικῶν σημείων, ποὺ εὑρίσκοντο ἐν χρήσει εἰς τὰς ἀκτὰς τοῦ Νείλου. Βοηθούμενος ἀπὸ τὰς βαθείας γνώσεις του ἐπὶ τῆς κοπτικῆς γλώσσης— ἑνὸς ἰδιώματος προερχομένου ἐκ τῆς ἑλληνικῆς καὶ χρησιμοποιουμένου εἰς τὴν Αἴγυπτον μετὰ τὴν ὑπὸ τοῦ Διοκλητιανοῦ εἰσαγωγὴν τοῦ Χριστιανισμοῦ— ἐπέτυχε ν' ἀποκρυπτογραφήσῃ μίαν τρίγλωσσον ἐπιγραφήν, ποὺ εἶχεν ἀνακαλυφθῇ εἰς Ροζέτταν κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς ἐκστρατείας τοῦ Ναπολέοντος, καὶ ἔπειτα νὰ ἐξηγήσῃ ὁριστικῶς τὴν ἱερογλυφικὴν γραφήν.

Ἐκτὸς ὅμως ἀπὸ αὐτὸ τὸ μνημειῶδες καὶ ἱερὸν ἀλφάβητον, ὑφίστατο εἰς τὴν Αἴγυπτον καὶ ἕνα ἄλλο, παράγωγον τοῦ ἱερογλυφικοῦ, τοῦ ὁποίου ἡ χρῆσις ἦτο προνόμιον τῆς ἱερατικῆς τάξεως. Πρόκειται περὶ τῆς ἱερατικῆς γραφῆς, τὴν ὁποίαν ὁ σοφὸς Γερμανὸς R. Lepsius (ἐγεν. 25 Ἰουνίου 1775, ἀπέθ. 23 Ἀπριλίου 1853) ἀπεκρυπτογράφησε πρῶτος. Τέλος εἰς τὴν Αἴγυπτον ἦτο ἐν χρήσει καὶ μία τρίτη γραφή, ἡ ὁποία ἐξυπηρέτει τὰς λαϊκὰς τάξεις καὶ ἐκαλεῖτο διὰ τοῦτο δημοτικὴ γραφή. Ἡ ἀποκρυπτογράφησις τῆς τρίτης αὐτῆς γραφῆς ἔγινεν ἀπὸ ἕνα ἄλλον Γερμανὸν σοφόν, τὸν H. Brugsch (ἐγεν. 18 Φεβρουαρίου 1827, ἀπέθ. 9 Σεπτεμβρίου 1894), ὁ ὁποῖος ἤνοιξε καὶ παρεσκεύασε τὸν δρόμον εἰς τὸν E. Révillout, τοῦ ὁποίου ἡ δημοτικὴ χρηστομάθεια ἀπεκάλυψεν ἕναν ὁλόκληρο κόσμον. Μὲ τὸ βιβλίον αὐτὸ ἔγιναν γνωστοὶ οἱ κύριοι χαρακτῆρες τοῦ λαοῦ ἐκείνου, ὁ ὁποῖος εἰς τὴν ἀπωτάτην ἀρχαιότητα ἔζη παρὰ τὰς ὄχθας τοῦ Νείλου, ἤτοι οἱ νόμοι του, τὰ ἤθη καὶ ἔθιμά του, ἀκόμη καὶ τὰ βαθύτερα συναισθήματα τῶν ἀνθρώπων. Τοιουτοτρόπως ἦλθον ἐν μέρει εἰς φῶς τὰ οὐράνια

φαινόμενα, ποὺ εἶχον ἐξετάσει, ὡς καὶ οἱ διάφοροι τρόποι μετρήσεως τοῦ χρόνου, τόσον διὰ πολιτικοὺς ὅσον καὶ ἀστρονομικοὺς σκοπούς. Ἡ μαθηματικὴ ὅμως τεχνική, τῆς ὁποίας ἐγίνετο χρῆσις, παρέμενε πάντοτε εἰς πλῆρες σκότος, μέχρι τοῦ 1868, ὅτε ὁ A. Eisenlohr ἀπεκρυπτογράφησεν ἕνα αἰγυπτιακὸν ἔγγραφον μαθηματικοῦ περιεχομένου, τὸ ὁποῖον διὰ μέσου μιᾶς σειρᾶς εὐτυχῶν περιστατικῶν, διέφυγε τὴν καταστροφήν. Τὸ ἔγγραφον αὐτὸ εἶναι γνωστὸν εἰς τὴν ἱστορίαν τῆς ἐπιστήμης ὑπὸ τὸν τίτλον Πάπυρος τοῦ Rhind, ἀπὸ τὸ ὄνομα τοῦ πρώτου κατόχου. Σήμερον ὁ πάπυρος αὐτὸς εὑρίσκεται ὑπὸ ἀσφαλεῖς συνθήκας διαφυλάξεως εἰς τὸ Βρετανικὸν Μουσεῖον τοῦ Λονδίνου. Μόνον ἕνα ἀπόσπασμα παρέμβλητον φυλάσσεται εἰς τὸ Μουσεῖον τῆς Νέας Ὑόρκης.

10. Τὸ γραπτὸν τοῦτο ἐγράφη μεταξὺ 1788 καὶ 1580 π.Χ. μὲ στοιχεῖα μικτὰ τῆς ἱερογλυφικῆς καὶ τῆς ἱερατικῆς γραφῆς καὶ ἀποτελεῖ ἀντίγραφον ἀρχαιοτέρου κειμένου, ἀναγομένου πιθανῶς εἰς τὴν περίοδον 1842 - 1801 π.Χ. * Κατά τινας πρόκειται περὶ βοηθητικοῦ ἐγκολπίου, προοριζομένου διὰ τοὺς ἀγροκαλλιεργητάς **. Εἰς τὴν πραγματικότητα εἶναι μία συλλογὴ προβλημάτων, ἐν μέρει γεωμετρικῆς φύσεως, λυομένων δι' ἐφαρμογῆς ἀναποδείκτων κανόνων, πιθανῶς ἀνηκόντων εἰς τὴν παράδοσιν. Τὰ προφανῆ σφάλματα ποὺ ἀπαντῶνται δεικνύουν τὴν μετριότητα, τόσον τοῦ ἀντιγραφέως, ὅσον καὶ ἐκείνων ἀπὸ τοὺς ὁποίους ἀρύεται. Ἡ δυσκολία τῆς ἀναγνώσεως καθίσταται μεγαλυτέρα ἀπὸ τὰ αἰφνίδια σχισίματα τοῦ παπύρου καὶ ἀπὸ τὴν παρουσίαν φωνητικῶν χαρακτήρων ἀμφιβόλου ἀποδόσεως, ἐπειδὴ δὲν συναντῶνται εἰς ἄλλα κείμενα.

Ἐν πάσῃ περιπτώσει, ἀπὸ τὸν πάπυρον αὐτὸν ἐξάγεται ὅτι τὴν ἐποχὴν ποὺ ἐγράφετο ἐχρησιμοποιεῖτο ὡς μονὰς μετρήσεως ὁ πῆχυς (λεγόμενος βασιλικὸς) ἰσοδύναμος πρὸς 0,523 m, τὸ ἕβδομον τούτου ἡ «παλάμη», τὸ δέκατον τέταρτον τῆς παλάμης, δηλαδὴ ὁ «δάκτυλος». Διὰ τὰς μετρήσεις τῶν γηπέδων ἐχρησιμοποιεῖτο ὁ ἑκατόπηχυς διὰ τὰ μήκη καὶ ὁ τετραγωνικὸς ἑκατόπηχυς διὰ τὰ ἐμβαδά, ἰσοδύναμος πρὸς δέκα χιλιάδες τετραγωνικοὺς πήχεις καὶ ὑποδιαιρούμενος εἰς μικροτέρας μονάδας 1/2, 1/4, 1/16, 1/32, ποὺ εἶχον ἰδιαίτερον ὄνομα.

Διὰ τοὺς ὄγκους ἐχρησιμοποιεῖτο συνήθως ὡς μονὰς τὸ 1/10 τοῦ κύβου

* Τὸ κείμενον ἀρχίζει μὲ τὰς φράσεις :

«Κανὼν διὰ νὰ μάθῃ κανεὶς ὅλα τὰ σκοτεινά, ὅλα τὰ μυστήρια ποὺ κρύβονται μέσα εἰς τὰ πράγματα. Τὸ κείμενον τοῦτο ἐγράφη τὸ ἔτος 33 τοῦ τετάρτου μηνὸς τῆς ἐποχῆς τῆς πλημμύρας ἐπὶ βασιλέως Raa-mus (Eisenlohr) ἢ Aauserre (Peet), συμφώνως πρὸς τὸ ὑπόδειγμα ἀρχαιοτέρων κειμένων τῆς ἐποχῆς τοῦ βασιλέως Ἄνω καὶ Κάτω Αἰγύπτου, Nemare. Τὴν ἀντιγραφὴν ἔκαμεν ὁ γραμματεὺς Ahmes (Eisenlohr) ἢ Ahmose (Peet)».

** Ἡ ἄποψις αὐτὴ ἐνισχύεται ἀπὸ τὰς τελικὰς λέξεις τοῦ παπύρου : «Πιάσε τὰ ἔντομα καὶ τοὺς ποντικούς..... Ζήτησε ἀπὸ τὸν Ρὰ ζέστη, ἀέρα καὶ νερὰ πολλά».

τοῦ ἔχοντος πλευρὰν ἴσην πρὸς 0,741 m, τοῦ κύβου τούτου ὑποδιαιρουμένου εἰς 320 μικροτέρας μονάδας. Περὶ μονάδων βάρους δὲν γίνεται λόγος εἰς τὸν πάπυρον τοῦ Rhind [6].

Προτοῦ ἀπαριθμήσωμεν τὰ διάφορα προβλήματα μὲ τὰ ὁποῖα ἀσχολεῖται ὁ πάπυρος τοῦ Rhind, παρατηροῦμεν ὅτι οἱ Αἰγύπτιοι, διὰ νὰ γράψουν ἕνα ἀριθμόν, κατέφευγον ἀρχικῶς εἰς τὴν ἐπανάληψιν τοῦ αὐτοῦ σημείου, εἰκονίζοντος συμβατικῶς τὴν μονάδα. Βραδύτερον, ὅταν κατέστησαν καταφανῆ τὰ μειονεκτήματα αὐτοῦ τοῦ συστήματος, ἐξέφρασαν κάθε ἀριθμὸν μὲ τὸ ὄνομα ποὺ εἰς τὴν γλῶσσαν των ἐσήμαινε τὸν ἀριθμὸν αὐτόν. 'Αλλὰ καὶ τοῦτο προσέκρουεν εἰς μεγάλας δυσκολίας, ὅταν ἐφηρμόζετο εἰς εὐρεῖαν κλίμακα, καὶ οὕτω ἠναγκάσθησαν νὰ ἐπινοήσουν ἄλλο, κατάλληλον πράγματι διὰ τὰς ἀνάγκας τῆς ἀριθμήσεως, λαμβάνοντες ὡς βάσιν ὅπως καὶ οἱ Βαβυλώνιοι τὸν ἀριθμὸν 10*. 'Επενόησαν δὲ ἰδιαίτερα σύμβολα διὰ τὴν παράστασιν τῶν μονάδων διαφόρων τάξεων, ἤτοι τῶν ἀριθμῶν 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000, 1000000, 10000000, μὲ τὴν συμφωνίαν νὰ ἐπαναλαμβάνωνται τὰ σύμβολα αὐτὰ ὅσας φορὰς ἑκάστοτε εἶναι ἀνάγκη. Καὶ ἐπειδὴ ὅταν τὸ πλῆθος αὐτῶν ἐγίνετο πολὺ μεγάλο, ἡ ἀνάγνωσις δὲν ἦτο εὐχερής, ἐσυμφωνεῖτο νὰ γράφωνται καθ' ὁμάδας, ἑκάστη τῶν ὁποίων νὰ μὴ περιέχῃ περισσότερα τῶν τεσσάρων συμβόλων. 'Η σειρὰ διαδοχῆς τῶν διαφόρων ὁμάδων ἦτο σύμφωνος πρὸς τὸν νόμον τοῦ Hankel, ἤτοι φθίνουσα ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιά. Εἰδικαὶ συντομογραφίαι ἐχρησιμοποιοῦντο πρὸς δήλωσιν τῆς «προσθέσεως» καὶ τῆς «ἀφαιρέσεως», ἡ δὲ ἐκτέλεσις τῶν πράξεων τούτων ἐγίνετο δι' ἐπαναλήψεως τῆς προσθέσεως ἢ ἀφαιρέσεως τῆς μονάδος τόσας φορὰς ὅσας ἐδήλου ὁ ἕτερος τῶν προσθετέων ἢ ὁ ἀφαιρετέος.

Διὰ τὰς πράξεις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως ἐχρησιμοποιοῦντο εἰδικαὶ μέθοδοι. 'Ο πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ 10 δὲν παρουσίαζε καμμίαν δυσκολίαν, διότι εἰς τὸ σύμβολον τοῦ πολλαπλασιαστέου ἦτο ἀρκετὸν ἡ μονὰς 10^{ν} νὰ ἀντικατασταθῇ ἀπὸ τὴν $10^{\nu+1}$. Κάθε ἄλλος πολλαπλασιασμὸς ἀνελύετο εἰς μίαν διαδοχὴν διπλασιασμῶν, ἀκολουθουμένων ὑπὸ μιᾶς προσθέσεως. Διὰ νὰ κατανοήσωμεν τὸ τέχνασμα τοῦτο, ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι τυχὼν ἀκέραιος ἀριθμὸς n δύναται νὰ γραφῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$n = 2^{\alpha} + 2^{\beta} + 2^{\gamma} + \dots,$$

ὅπου $\alpha > \beta > \gamma \dots$ Τὸ γινόμενον αὐτοῦ ἐπὶ ἕνα ἄλλον ἀριθμὸν m δύναται τώρα νὰ εὑρεθῇ, ἂν διπλασιάσωμεν τὸν m πρῶτα α φοράς, ὕστερα β φοράς, κατόπιν γ φορὰς κ.ο.κ., προσθέσωμεν δὲ τελικῶς μεταξύ των τὰ προκύπτοντα

* Σημειοῦνται ἐπίσης ἴχνη χρησιμοποιήσεως καὶ τοῦ ἀριθμοῦ 5 ὡς δευτερευούσης βάσεως.

ἀποτελέσματα. Ἔστω ὡς παράδειγμα ὁ πολλαπλασιασμός τοῦ 7 ἐπὶ 6. Ἡ πορεία τῶν πράξεων φαίνεται εἰς τὴν ἑπομένην κατάστρωσιν :

1	7
• 2	14
• 4	28
6	42

Ἀναζητοῦνται εἰς τὴν πρώτην στήλην οἱ ἀριθμοὶ οἱ ἔχοντες ἄθροισμα 6 καὶ τίθεται εἰς αὐτοὺς ἕνα διακριτικὸν σημεῖον (π. χ. ἕνας ἀστερίσκος). Οἱ ἀντίστοιχοι ἀριθμοὶ τῆς δευτέρας στήλης δίδουν ὡς ἄθροισμα τὸ ζητούμενον γινόμενον.

Ὅταν πρόκειται νὰ γίνῃ διαίρεσις, ἀφαιροῦνται ἀπὸ τὸν διαιρετέον τόσα γινόμενα τῆς μορφῆς $2^{\alpha} \cdot m$, $2^{\beta} \cdot m$,... ὅσα ἀπαιτοῦνται διὰ νὰ λάβωμεν ὑπόλοιπον μηδὲν ἢ ἕναν ἀριθμὸν μικρότερον τοῦ m. Ἔστω ὡς παράδειγμα ἡ διαίρεσις 327 : 12. Ἡ πορεία τῶν πράξεων δύναται νὰ συστηματοποιηθῇ πάλιν εἰς μίαν κατάστρωσιν, ὅπως ἡ ἀκόλουθος :

1	12 •
2	24 •
4	48
8	96 •
16	192 •
27	324

Ἀναζητοῦνται εἰς τὴν δευτέραν στήλην οἱ ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα ἰσοῦται πρὸς τὸν διαιρετέον ἢ πρὸς τὸν μέγιστον ἀκέραιον ποὺ τὸν προσεγγίζει καὶ σημειώνονται μὲ ἰδιαίτερον διακριτικὸν σημεῖον, π.χ. ἕνα ἀστερίσκον. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστοίχων ἀριθμῶν τῆς πρώτης στήλης δίδει, εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν κατὰ προσέγγισιν, τὸ πηλῖκον.

11. Ἰδιότυπον χαρακτῆρα παρουσιάζει ἡ θεωρία τῶν κλασμάτων εἰς τὴν πρακτικὴν ἀριθμητικὴν τῶν Αἰγυπτίων, διότι, ἐνῷ δὲν ἦτο εἰς αὐτοὺς ἄγνωστος ἡ γενικὴ ἔννοια τοῦ κλάσματος, οὔτε μερικαὶ ἰδιότητες αὐτῶν, ἐν τούτοις εἰς τοὺς ὑπολογισμοὺς ἐχρησιμοποίουν ἀποκλειστικῶς κλάσματα μὲ ἀριθμητὴν τὴν μονάδα (θὰ τὰ ὀνομάζωμεν χάριν συντομίας «κλάσματα θεμελιώδη»). Μία ἐξαίρεσις ἐγίνετο μόνον διὰ τὸ κλάσμα 2/3, μολονότι δὲν ἦτο ἄγνωστος ἡ ἰσοδυναμία τούτου πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο θεμελιωδῶν κλασμάτων 1/2 καὶ 1/6. Ἕνα θεμελιῶδες κλάσμα ἐδηλοῦτο μὲ τὸν παρονομαστήν του, φέροντα ὡρισμένον διακριτικὸν σημεῖον, πλὴν τοῦ 1/2, 1/3, 1/4 δι' ἕκαστον τῶν ὁποίων ὑπῆρχεν εἰδικὸν σημεῖον.

Εἶναι φανερὸν ὅτι, μὲ τὴν παραδοχὴν ἑνὸς τοιούτου συστήματος, ἐτίθετο ἀμέσως τὸ πρόβλημα τῆς «ἀναλύσεως δοθέντος κλάσματος εἰς ἄθροισμα θεμελιωδῶν κλασμάτων». Καὶ πράγματι ὁ πάπυρος τοῦ Rhind ἀρχίζει μὲ ἕνα πίνακα, ὁ ὁποῖος διδάσκει πῶς γίνεται ἡ ἀνάλυσις εἰς θεμελιώδη κλάσματα παντὸς κλάσματος τοῦ τύπου:

$$\frac{2}{2n+1}, \quad \text{διὰ } n=2,3,\ldots,50.$$

(Σημειωτέον ὅτι ἡ ἐξαίρεσις τῶν κλασμάτων τῆς μορφῆς $\frac{2}{2n}$ ἀποδεικνύει πλήρη γνῶσιν τοῦ γεγονότος ὅτι τοιαῦτα κλάσματα τρέπονται ἀμέσως εἰς θεμελιώδη).

Ἐπιτρέπει δὲ ἡ μέθοδος νὰ ἐπιτύχωμεν ἀνάλογον ἀνάλυσιν δι' ὅλα τὰ κλάσματα τῆς μορφῆς:

$$\frac{m}{2n+1}, \quad \text{διὰ } n=2,3,\ldots,50.$$

Θεωροῦμεν σκόπιμον νὰ μεταφέρωμεν τὸν ἐν λόγῳ πίνακα, ὑπὸ συγκεκομμένην μορφήν, ὑπονοοῦντες δηλαδὴ τὸν ἀριθμητὴν 2 εἰς τὰ πρῶτα μέλη καὶ τὸν ἀριθμητὴν 1 εἰς τὰ δεύτερα.

5 = 3 + 15	55 = 30 + 330
7 = 4 + 28	57 = 38 + 114
9 = 6 + 18	59 = 36 + 236 + 531
11 = 6 + 66	61 = 40 + 244 + 488 + 610
13 = 8 + 52 + 104	63 = 42 + 126
15 = 10 + 30	65 = 39 + 195
17 = 12 + 51 + 68	67 = 40 + 335 + 736
19 = 12 + 76 + 114	69 = 46 + 138
21 = 14 + 42	71 = 40 + 568 + 710
23 = 12 + 276	73 = 60 + 219 + 292 + 365
25 = 15 + 75	75 = 50 + 150
27 = 18 + 54	77 = 44 + 308
29 = 24 + 58 + 174 + 232	79 = 60 + 257 + 316 + 790
31 = 20 + 124 + 155	81 = 54 + 162
33 = 22 + 66	83 = 60 + 332 + 415 + 498
35 = 30 + 42	85 = 51 + 255
37 = 24 + 111 + 296	87 = 58 + 174
39 = 26 + 78	89 = 60 + 356 + 534 + 890
41 = 24 + 246 + 328	91 = 70 + 130
43 = 42 + 86 + 129 + 301	93 = 62 + 186

45 = 30 + 90	95 = 60 + 380 + 570
47 = 30 + 141 + 470	97 = 56 + 679 + 776
51 = 34 + 102	99 = 66 + 198
53 = 35 + 318 + 795	101 = 101 + 202 + 303 + 606

Παρατηρητέον ὅτι τὸ πρόβλημα τῆς ἀναλύσεως ἑνὸς τυχόντος κλάσματος εἰς ἄθροισμα θεμελιωδῶν εἶναι, ὡς ἐκ τῆς φύσεώς του, ἀπροσδιόριστον, διὰ τοῦτο εἶναι εὔλογος ἡ προσθήκη νέων συνθηκῶν, τὰς ὁποίας ὀφείλουν νὰ πληροῦν τὰ συνιστῶντα κλάσματα, μεταβαλλομένων μάλιστα ἑκάστοτε τῶν συνθηκῶν τούτων ὡς πρὸς τὸ πλῆθος καὶ τὸν χαρακτῆρα. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι πιθανὸν ὁ ἀναφερθεὶς πίναξ νὰ μὴ συνετάχθη ἀπὸ τὸ ἴδιο πρόσωπον, οὔτε τὴν ἰδίαν ἐποχήν, τίποτε δὲν ἐμποδίζει νὰ κάμωμεν τὴν σκέψιν ὅτι ἡ ἀνάλυσις ἔγινε μὲ κριτήρια καὶ τρόπους διαφόρους. Διὰ τὸν σκεπτόμενον τοιουτοτρόπως δὲν ὑφίσταται ζήτημα προσδιορισμοῦ τῆς μεθόδου καταστρώσεως τοῦ ἐν λόγῳ πίνακος. Ὁ σκεπτόμενος ὅμως διαφορετικά, θεωρεῖ σκόπιμον, νὰ ὑποβάλῃ τὸν πίνακα εἰς μίαν ἀκριβῆ ἀνάλυσιν, ἐκ τῆς ὁποίας νὰ διαπιστωθῇ ἂν ὑπάρχῃ κοινὸς χαρακτὴρ διέπων τὰς ἀναγραφομένας ἀναλύσεις. Κατ' ἀρχὴν μια ἁπλῆ ἐξέτασις τοῦ πίνακος δεικνύει: 1ον ὅτι κάθε κλάσμα ἀναλύεται εἰς πλῆθος θεμελιωδῶν κλασμάτων, τὰ ὁποῖα, ὅλα πλὴν ἑνός, ἔχουν παρονομαστὰς πολλαπλάσια τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ ἀναλυτέου κλάσματος, 2ον ὅτι τὸ ἐξαιρούμενον θεμελιῶδες, πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ δοθέντος κλάσματος, δίδει γινόμενον περιλαμβανόμενον μεταξὺ 1 καὶ 2.

Γεννᾶται διὰ τοῦτο ἡ ἰδέα μήπως ὁ κατασκευαστὴς τοῦ πίνακος, διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὸν σκοπόν του, ἐπεχείρησε ν' ἀφαιρέσῃ ἀπὸ κάθε κλάσμα τῆς μορφῆς $\frac{2}{2n+1}$ τόσα καὶ τοιαῦτα κλάσματα τῆς μορφῆς $\frac{2}{(2y+1)x}$ ὅσα ἐχρειάζετο διὰ νὰ λάβῃ ἕνα θεμελιῶδες. Μὲ βάσιν τὴν ἰδέαν αὐτὴν δύναται νὰ μορφωθῇ πράγματι μία ὁμοιόμορφος μέθοδος ὑπολογισμοῦ *.

* Ὁ τελευταῖος ἐκδότης τοῦ παπύρου Rhind (T.E.Peet) ὑποθέτει ὅτι αἱ εἰς τὸν πίνακα ἀναγραφόμεναι ἀναλύσεις προέκυψαν ἀπὸ τὴν ἀνάλυσιν τοῦ ἀριθμοῦ 2 μέσῳ μιᾶς ταυτότητος τῆς ἀκολούθου μορφῆς

$$2 = (2n+1)\,f + \frac{1}{a} + \frac{1}{6} + \dots$$

ὅπου f εἶναι 2/3 ἢ ἕνα κλάσμα θεμελιῶδες. Ἐξ αὐτῆς προκύπτει, ὡς ἐζητεῖτο:

$$\frac{2}{2n+1} = f + \frac{1}{(2n+1)a} + \frac{1}{(2n+1)b} + \dots$$

π. χ. ἐκ τῆς $2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{b}$ γεννᾶται ἡ ὄχι τόσον εὐνοϊκὴ ἀνάλυσις:

$$\frac{2}{101} = \frac{1}{101} + \frac{1}{202} + \frac{1}{303} + \frac{1}{606}\,.$$

Διὰ νὰ ἐκθέσωμεν αὐτὴν θὰ κάμωμεν χρῆσιν, χάριν συντομίας καὶ σαφηνείας, τῆς συγχρόνου τεχνικῆς, διότι εἶναι τόσον ἐλλιπεῖς καὶ ἀποσπασματικαὶ αἱ πληροφορίαι ποὺ ἔφθασαν μέχρις ἡμῶν ὅσον ἀφορᾷ τὰς λογιστικὰς μεθόδους τῶν ἀρχαίων Αἰγυπτίων, ὥστε ἐλλείπουν τὰ στοιχεῖα διὰ μίαν ἀληθοφανῆ ἀναπαράστασιν. Δὲν πρέπει λοιπὸν ὁ ἀναγνώστης νὰ ὑποθέσῃ ὅτι σκοποῦμεν ν' ἀποδώσωμεν εἰς τοὺς Αἰγυπτίους τὴν ἰδικήν μας ἀλγεβρο-ἀριθμητικὴν μέθοδον.

12. a) Ἄς ὑποθέσωμεν πρὸ πάντων ὅτι ἐπιθυμοῦμεν ν' ἀναλύσωμεν τὸ κλάσμα $\frac{2}{2n+1}$ εἰς δύο κλάσματα θεμελιώδη, ἕνα ἐκ τῶν ὁποίων νὰ ἔχῃ παρονομαστὴν $(2n+1)x$, ὅπου x προσδιοριστέος ἀκέραιος ἀριθμός. Οἱουδήποτε ὄντος τοῦ x, ὑφίσταται ἡ ἀκόλουθος ταυτότης :

$$\frac{2}{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)x} + \frac{1}{(2n+1)\frac{x}{2x-1}}$$

καὶ ἂν προσδιορίσωμεν τὸν x οὕτως, ὥστε τὸ τελευταῖον κλάσμα νὰ εἶναι θεμελιῶδες, θὰ ἔχωμεν ἐπιτύχει τὸν σκοπόν. Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι ἡ ὡς ἄνω ταυτότης ἀνάγεται εἰς τὸν περιορισμὸν

$$1 < (2n+1)\frac{1}{(2n+1)\frac{x}{2x-1}} < 2$$

σύμφωνα πρὸς μίαν προηγηθεῖσαν παρατήρησιν. Ἐπειδὴ τώρα τὸ $2x-1$ δὲν διαιρεῖται διὰ τοῦ x, ἂν $2n+1$ εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος, ἵνα τὸ γινόμενον $(2n+1)x$ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ $2x-1$, εἶναι ἀνάγκη νὰ ἔχωμεν

$$2n+1 = 2x-1,$$

ἤτοι $x = n+1$. Γεννᾶται λοιπὸν ἡ ἀκόλουθος ταυτότης :

$$\frac{2}{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)(n+1)} + \frac{1}{n+1}.$$

Διὰ $n=1$ ἡ ἐν λόγῳ ταυτότης παρέχει :

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}.$$

μὲ τὴν ὁποίαν καὶ κλείει ὁ πίναξ τοῦ παπύρου. Ἀλλὰ μήπως ἡ ὡς ἄνω ἀνάλυσις τοῦ 2 εἶναι ἐν γένει ζήτημα εὐκολώτερον τῆς ἀναλύσεως τοῦ $\frac{2}{2n+1}$ εἰς θεμελιώδη κλάσματα;

Διὰ $n = 2, 3, 5, 11$ λαμβάνονται ἰσάριθμοι ἀναλύσεις, περιεχόμεναι εἰς τὸν ἀνωτέρω πίνακα τοῦ παπύρου Rhind.

Ἂν πάλιν ὁ ἀριθμὸς $2n+1$ δὲν εἶναι πρῶτος, ἀρκεῖ νὰ ἐξισώσωμεν τὸν $2x-1$ πρὸς ἕνα τῶν παραγόντων τοῦ $2n+1$, καὶ κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον εὑρίσκομεν ὅλας τὰς ἄλλας διωνύμους ἀναλύσεις τοῦ πίνακος, θέτοντες διαδοχικῶς:

$$n = 4,\ 7,\ 10,\ 12,\ 13,\ 16,\ 19,\ 22,\ 24,\ 25,\ 27,\ 28,\ 31,\ 32,\ 34,\ 37,\ 38,\ 40,\ 42,\ 43,\ 46,\ 49.$$

Παραμένουν οὕτω ἐκτὸς αἱ μόναι διώνυμοι ἀναλύσεις τῶν κλασμάτων τῶν ἐχόντων παρονομαστὰς 35 καὶ 91, περὶ τῶν ὁποίων θὰ ὁμιλήσωμεν κατόπιν.

Ἀξιοσημείωτος εἶναι μία ἁπλοποίησις ἡ ὁποία δύναται νὰ πραγματοποιηθῇ καὶ ἡ ὁποία ἐχρησιμοποιήθη σιωπηρῶς εἰς τὴν κατάστρωσιν τοῦ ἐξεταζομένου πίνακος. Ἡ ἁπλοποίησις αὕτη συνίσταται εἰς τὸ ἑξῆς: ἐὰν γνωρίζωμεν μίαν ἀνάλυσιν τῆς μορφῆς

$$\frac{2}{2n+1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b},$$

τότε ἐξάγεται ἀμέσως ἐξ αὐτῆς ἡ ἀνάλογος:

$$\frac{2}{(2n+1)(2p+1)} = \frac{1}{a(2p+1)} + \frac{1}{b(2p+1)}.$$

Δὲν ὑπάρχει ἀμφιβολία ὅτι τούτου ἐγένετο χρῆσις διὰ τὴν συναγωγὴν ἐκ τῆς ἀναλύσεως:

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6},$$

ἐκείνων ἐκ τῶν κλασμάτων ἀριθμητοῦ 2, ποὺ ἔχουν παρονομαστὰς 9, 15 21, 27, 33, 39, 45, 51, 57, 63, 69, 75, 81, 87, 93, 99.
Ὁμοίως ἐκ τῆς ἀναλύσεως:

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$$

ἐξήχθησαν αἱ ἀναλύσεις τῶν κλασμάτων τῶν ἐχόντων παρονομαστὰς 25 καὶ 65. Ἐκ τῆς

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$$

αἱ ἀναλύσεις τῶν 2/49 καὶ 2/77 καὶ τέλος ἐκ τῆς

$$\frac{1}{11} = \frac{1}{60} + \frac{1}{66}$$

ἢ τοῦ 2/55, ὅπως ἐκ τῆς ἀναλύσεως τοῦ 2/19 ἀπέρρευσεν ἡ δοθεῖσα ὑπὸ τοῦ Ahmes διὰ τὸ 2/95.

b) Ἐρχόμεθα τώρα εἰς τὰς τριωνύμους ἀναλύσεις. Λαμβάνοντες ὡς ἀφετηρίαν τὴν ταυτότητα:

$$\frac{2}{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)x} + \frac{1}{(2n+1)y} + \frac{1}{(2n+1)\dfrac{xy}{2xy-(x+y)}} \qquad (\alpha)$$

βλέπομεν ἀμέσως ὅτι διὰ νὰ φθάσωμεν εἰς τὸ ἐπιδιωκόμενον ἀποτέλεσμα εἶναι ἀνάγκη νὰ ἐκλέξωμεν τοὺς ἀριθμοὺς x καὶ ψ οὕτως ὥστε ὁ $2n+1$ νὰ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ κλάσματος

$$\frac{xy}{2xy-(x+y)} \qquad (\beta)$$

ἠγμένου εἰς τὴν ἀνάγωγον αὐτοῦ μορφήν.

Σημειοῦμεν, ἐν τούτοις ὅτι ὁ τελευταῖος ὅρος τῆς ἀνωτέρω ταυτότητος πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ $2n+1$ δίδει ὡς γινόμενον

$$2 - \frac{x+y}{xy}, \qquad (\gamma)$$

ἤτοι ποσότητα πάντοτε περιεχομένην μεταξὺ 1 καὶ 2, ὅταν οἱ ἀριθμοὶ x καὶ ψ εἶναι διάφοροι ἀλλήλων ἀκέραιοι καὶ μεγαλύτεροι τῆς μονάδος. Διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῶν x καὶ ψ θὰ προχωρήσωμεν τώρα διὰ δοκιμῶν. Σήμερον προτιμῶμεν νὰ καταστρώσωμεν ἕνα πίνακα τιμῶν τῆς συναρτήσεως (β) δι' ἀκεραίας καὶ θετικὰς τιμὰς τῶν x, ψ.

Διὰ τοῦ τρόπου τούτου βλέπομεν ὅτι θέτοντες διαδοχικῶς $n = 6$, 8, 9, 15, 18, 20, 23, 26, 29, 33, 35, 47 καὶ 48, φθάνομεν εἰς ὅλας τὰς τριωνύμους ἀναλύσεις, ποὺ περιέχει ὁ πάπυρος Rhind.

c) Κατὰ παρόμοιον τρόπον δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὰς λοιπὰς ἀναλύσεις τῶν τεσσάρων ὅρων. Ἀρκεῖ πράγματι νὰ γράψωμεν τὴν ταυτότητα:

$$\frac{2}{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)x} + \frac{1}{(2n+1)y} + \frac{1}{(2n+1)z} + \\ + \frac{1}{(2n+1)\dfrac{xyz}{2xyz-(yz+zx+xy)}} \qquad (\alpha)$$

διὰ νὰ ἴδωμεν ὅτι φθάνομεν εἰς τὸν ἐπιδιωκόμενον σκοπὸν ἐκλέγοντες διὰ τοὺς ἀριθμοὺς x, ψ, z, τιμὰς ἀκεραίας καὶ θετικὰς τοιαύτας, ὥστε τὸ κλάσμα

$$\frac{xyz}{2xyz-(yz+zx+xy)}, \qquad (\beta)$$

ἀνηγμένον εἰς τὴν ἀνάγωγον αὐτοῦ μορφήν, νὰ ἔχῃ παρονομαστὴν ἕνα παράγοντα τοῦ $2n+1$. Τοῦτο δύναται νὰ γίνῃ πάλιν δοκιμαστικῶς. Σήμερον θὰ κατεσκευάζετο ἐκ τῶν προτέρων ἕνας πίναξ μὲ τριπλῆν εἴσοδον τῆς συναρτήσεως (β) διὰ τιμὰς x, ψ, z, ἀκεραίας θετικάς. Θέτοντες διαδοχικῶς $n = 14$, 21, 30, 36, 39, 41, 44, καὶ 50 ἐπιτυγχάνομεν τὰς ὀκτὼ ἀναλύσεις ἐκ 4 ὅρων, ποὺ ἔχει ἀναγράψει ὁ Αἰγύπτιος γραφεύς.

Ὅσον ἀφορᾷ τὰς διωνύμους ἀναλύσεις, τὰς ἐξαιρεθείσας ἐκ τῶν προηγουμένων σκέψεων, αὗται δύνανται νὰ ληφθοῦν ἀπ' εὐθείας, ὡς δεικνύεται, κατὰ σχηματοποιημένον τρόπον, εἰς τὰς ἀκολούθους ἰσότητας:

$$\frac{2}{35} = \frac{5+7}{5\cdot6\cdot7} = \frac{1}{6\cdot7} + \frac{1}{5\cdot6} = \frac{1}{42} + \frac{1}{30}$$

$$\frac{2}{91} = \frac{7+13}{7\cdot13\cdot10} = \frac{1}{13\cdot10} + \frac{1}{7\cdot10} = \frac{1}{130} + \frac{1}{70}.$$

Ἐπικαλούμεθα τέλος τὴν προσοχὴν τοῦ ἀναγνώστου ἐπὶ τῆς ἀναλύσεως τοῦ κλάσματος 2/101, τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν θεωροῦντες ἕνα μέρος αὐτῆς ἴσον πρὸς 1/101, σύστημα πολὺ ἁπλοποιητικόν, εἰς οὐδεμίαν ἄλλην περίπτωσιν ἐφαρμοζόμενον καὶ κατ' οὐδένα τρόπον δικαιολογούμενον, ἀφ' ἧς στιγμῆς ἠδύνατό τις νὰ δεχθῇ τὴν ἀνάλυσιν:

$$\frac{2}{101} = \frac{1}{60} + \frac{1}{404} + \frac{1}{1515}.$$

Μία τελευταία παρατήρησις: ἡ ἐνταῦθα ἐκτιθεμένη μέθοδος ὁδηγεῖ ἐν γένει ὄχι εἰς μίαν μόνον, ἀλλὰ εἰς πολλὰς ἀναλύσεις. Μὲ μίαν μελέτην ἀκόμη βαθυτέραν ἐκείνης τὴν ὁποίαν ἐκάμαμεν ἐδῶ, δύναται νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἐκλογὴ μεταξὺ τῶν διαφόρων ἀναλύσεων ἔγινε μὲ βάσιν τὸ κριτήριον τῆς ἁπλότητος.

Προσθέτομεν ὅτι νεώτεροι πίνακες τοῦ ἰδίου τύπου, ὡς αὐτὸς ποὺ ἐξητάσαμεν, ἀπαντῶνται εἰς ἄλλα δοκουμέντα τῆς ἀριθμητικῆς τῶν Αἰγυπτίων, ὅπως εἶναι ὁ πάπυρος τοῦ Michigan καὶ ὁ πάπυρος τοῦ Akhmim. Καὶ οἱ δύο ἀνάγονται εἰς μίαν ἐποχὴν μεταξὺ V καὶ VIII αἰῶνος π.Χ., καὶ ἀποδεικνύουν τὴν ἔμμονον χρῆσιν τῶν θεμελιωδῶν κλασμάτων εἰς τὴν χώραν τοῦ Νείλου. Καὶ ἐπειδὴ ὅπως θὰ ἴδωμεν (Κεφ. XII), πίνακες τοῦ εἴδους τούτου, εὑρίσκονται εἰς τὸ Liber Abbaci (1202), διὰ τοῦ ὁποίου ὁ Leonardo Pisano, ἀπεκάλυψεν εἰς τοὺς Εὐρωπαίους τὴν μαθηματικὴν Ἀνατολήν, ἀγόμεθα εἰς τὸ ἀδιαφιλονίκητον συμπέρασμα, ὅτι εὑρίσκοντο ἐν χρήσει ἀριθμητικαὶ μέθοδοι, τῶν ὁποίων δὲν σώζεται πλέον κανένα ἴχνος εἰς τὴν νεωτέραν ἐπιστήμην.

13. Ἐνῷ, ὡς πρὸς τὴν ἑρμηνείαν τοῦ εἰσαγωγικοῦ μέρους τοῦ παπύρου τοῦ Rhind, οὐδεμία διαφορὰ γνώμης μεταξὺ τῶν ἐρευνητῶν διετυπώθη,

ἐν τούτοις, ὡς πρὸς τὴν ἔννοιαν, τὴν ὁποίαν πρέπει ν' ἀποδώσωμεν εἰς τὰ ἐξεταζόμενα προβλήματα ἐξεδηλώθησαν σοβαραὶ διαφωνίαι μεταξὺ τῶν εἰδικῶν (Cantor, Rodet).

Μερικοὶ λαμβάνοντες ἀφορμὴν ἀπὸ τὴν παρουσίαν μιᾶς εἰδικῆς λέξεως (hau) πρὸς δήλωσιν τοῦ ἀγνώστου ποσοῦ εἰς ἕνα πρόβλημα, ἐπίστευσαν ὅτι εὑρίσκοντο ἐνώπιον μιᾶς προδρόμου φάσεως τῶν ἀλγεβρικῶν μεθόδων. Ἄλλοι ἀντιθέτως δὲν διέγνωσαν ἐκ τοῦ γεγονότος τούτου τίποτε περισσότερον ἀπὸ προβλήματα τῆς ἁπλῆς ἀριθμητικῆς.

Ἀπὸ ἰδικῆς μας πλευρᾶς παρατηροῦμεν ὅτι πρόκειται περὶ ζητημάτων, τὰ ὁποῖα σήμερον ἀνάγονται συνήθως εἰς τὴν λύσιν ἐξισώσεων πρώτου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον, ἀλλὰ τὰ ὁποῖα δύνανται ἐπίσης νὰ λυθοῦν δι' ἐφαρμογῆς τῆς μεθόδου τῶν τριῶν, ἁπλῆς ἢ συνθέτου. Κατὰ συνέπειαν τίποτε δὲν μᾶς παρακινεῖ εἰς τὸ νὰ θέσωμεν τὸν πάπυρον Rhind ὡς τὸ ὑπ' ἀριθμὸν 1 γραπτὸν μνημεῖον τῆς ἀλγεβρικῆς φιλολογίας.

Θ' ἀναφέρωμεν τώρα διὰ βραχέων τὰ κυριώτερα ἐκ τῶν προβλημάτων, τὰ ὁποῖα πραγματεύεται ὁ πάπυρος, τονίζοντες ἀπὸ τοῦδε τὸ γεγονός, ὅτι πολλοὶ τῶν διεξαγομένων ὑπολογισμῶν παρουσιάζουν μίαν ἔκδηλον ἀναλογίαν πρὸς ἐκείνους, τοὺς ὁποίους πρέπει νὰ ἐκτελέσῃ ὁ ἐπιθυμῶν νὰ ἐπιτύχῃ τὴν ἀνάλυσιν κλασμάτων τῆς μορφῆς $\frac{2}{2n+1}$ εἰς ἄλλα θεμελιώδη, κατὰ τὰ προεκτεθέντα.

Οὕτω, εἰς τὰ προβλήματα 1 - 6 (συμφώνως πρὸς τὴν ἀρίθμησιν τὴν δοθεῖσαν ὑπὸ τῶν νεωτέρων ἀντιγραφέων τοῦ παπύρου Rhind), τὰ ὁποῖα ἀναφέρονται εἰς διανομὴν ἄρτων εἰς περισσότερα πρόσωπα, πρόκειται κατ' οὐσίαν περὶ ἀναλύσεως εἰς θεμελιώδη κλάσματα τῆς μορφῆς $\frac{n}{10}$, εἰς τὰ προβλήματα 7 - 20 πρέπει νὰ ἐκφρασθῇ, ὡς ἄθροισμα ἑνὸς ἀκεραίου καὶ θεμελιωδῶν κλασμάτων, τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν, ἐκπεφρασμένων κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον. Εἰς τὰ προβλήματα 21 - 23 πρόκειται νὰ γίνῃ τὸ αὐτὸ διὰ τὴν διαφορὰν μεταξὺ $1\,^2/_3$ καὶ ἑνὸς ἀριθμοῦ τοῦ προηγουμένου εἴδους.

Τὰ προβλήματα 24 - 38 θὰ ἠδύναντο σήμερον νὰ διατυπωθοῦν ὡς ἐξισώσεις τῆς ἀκολούθου μορφῆς :

$$x + \frac{x}{m} + \frac{x}{n} + \ldots = a, \qquad (\alpha)$$

αἱ ὁποῖαι δύνανται νὰ λυθοῦν δι' ἐφαρμογῆς τοῦ κανόνος τῆς αὐθαιρέτου ἀντικαταστάσεως, ὡς ἑξῆς : Δεχόμεθα διὰ τὸν x μίαν αὐθαίρετον τιμὴν x_0 (ἡ ὁποία μολοντοῦτο θὰ ἠδύνατο νὰ ληφθῇ πολλαπλάσιον τῶν παρονομα-

στῶν m, n,...) καὶ ὑπολογίζεται ἡ τιμὴ a_0 ἡ προκύπτουσα ἐκ τῆς ἐκτελέσεως τῶν πράξεων εἰς τὸ πρῶτον μέλος, πληρουμένης οὕτω τῆς ἰσότητος

$$x_0 + \frac{x_0}{m} + \frac{x_0}{n} + \ldots = a_0 \qquad (\beta)$$

Ἀλλ' ἐκ τῶν ἰσοτήτων (α) καὶ (β) προκύπτει ἡ ἀναλογία:

$$\frac{x}{x_0} = \frac{a}{a_0}$$

καὶ ἐξ αὐτῆς ὁ x, ὡς μία τετάρτη ἀνάλογος.

Τὸ πρόβλημα 39 ἔχει ὡς ἀντικείμενον τὴν διανομὴν ἄρτων εἰς μέρη ὄχι ὅλα ἴσα, εἰς δὲ τὸ ἑπόμενον ἀπαντᾶται ἡ ἔννοια τῆς ἀριθμητικῆς προόδου. Προστρέχοντες πρὸς στιγμὴν εἰς τὰ γεωμετρικὰ προβλήματα, ἀπαντῶμεν εἰς τὸ πρόβλημα 61 ἕνα μικρὸν πίνακα πολλαπλασιασμοῦ θεμελιωδῶν κλασμάτων (περιλαμβανομένου καὶ τοῦ 2/3) ἐπὶ ἄλλα (δηλαδὴ τὴν ἔκφρασιν τῶν γινομένων ποὺ λαμβάνονται ὡς ἀθροίσματα θεμελιωδῶν κλασμάτων) Εἰς τὸ πρόβλημα 64 ἐπανευρίσκομεν ἀριθμητικὰς προόδους. Ἀξιόλογον εἶναι τὸ πρόβλημα 79, τὸ ὁποῖον, δι' ἀγνώστων ὁδῶν ἔφθασεν εἰς τὸν Leonardo Pisano, ὁ ὁποῖος τὸ παρενέβαλεν εἰς τὸ ἔργον του Liber Abbaci. Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο ἀπαντᾶται ἡ γεωμετρικὴ πρόοδος

$$\div\div\; 7,\ 49,\ 343,\ 2401,\ 16807$$

καὶ προσδιορίζεται τὸ ἄθροισμά της 19607.

Προτοῦ ἀφήσωμεν τὸ καθαρῶς ἀριθμητικὸν μέρος τοῦ παπύρου Rhind, παρατηροῦμεν ὅτι τὰ προβλήματα, μὲ τὰ ὁποῖα ἀσχολεῖται, δὲν ἀντιπροσωπεύουν τὸ ἀκρότατον ὅριον τῶν γνώσεων τῶν Αἰγυπτίων εἰς τὸ πεδίον τῆς ἀριθμητικῆς, ἀφοῦ εἰς ἕνα ἄλλον παρόμοιον πάπυρον, ἀνακαλυφθέντα εἰς τὸ Kahun (Ἀφγανιστάν) καὶ ἑρμηνευθέντα ὑπὸ τοῦ Griffiths, ὡς καὶ ἕνα τρίτον φυλασσόμενον εἰς Βερολῖνον καὶ ἐξηγηθέντα ὑπὸ τοῦ Schack, ἀπαντῶνται ζητήματα, τὰ ὁποῖα σήμερον θὰ ἐλύοντο μὲ συστήματα βαθμοῦ ἀνωτέρου τοῦ πρώτου, ὡς εἶναι τὰ ἀκόλουθα:

$$x^2 + y^2 = 100, \qquad x : y = 1 : 3/4 \qquad (\alpha)$$

$$xy = 12, \qquad x : y = 4 : 3 \qquad (\beta)$$

$$x^2 + y^2 = 400, \qquad x : y = 2 : 2/3 \qquad (\gamma)$$

Διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων, οἱ Αἰγύπτιοι κατέφευγον, ἀκόμη καὶ εἰς αὐτὰς τὰς περιπτώσεις εἰς τὸ τέχνασμα τῆς αὐθαιρέτου ἀντικαταστάσεως. Π.χ. διὰ τὴν λύσιν τοῦ συστήματος (α) ἂς δοκιμάσωμεν τὸ ζεῦγος τιμῶν $x = 1$, $y = 3/4$. Ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς ταύτας εἰς τὸ πρῶτον μέλος τῆς πρώτης τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος λαμβάνομεν

25/16, ὅπερ διὰ νὰ γίνῃ 100 πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 4·16. Ὁ ἀριθμὸς οὗτος ἔπρεπε νὰ ἦτο κοινὸς παράγων τοῦ x^2 καὶ $ψ^2$, ἢ ὁ ἀριθμὸς $2 \cdot 4 = 8$, τῶν x καὶ ψ. Οἱ ζητούμενοι λοιπὸν ἀριθμοὶ εἶναι $x = 1 \cdot 8 = 8$ καὶ $y = \frac{3}{4} \cdot 8 = 6$. Εἶναι ἄξιον σημειώσεως ὅτι τὰ δεδομένα τῶν ἐξεταζομένων προβλημάτων ἐξελέγησαν οὕτως, ὥστε νὰ προκύπτουν λύσεις ἀκέραιοι ἀριθμοί.

15. Ὁ ἀποδίδων εἰς τοὺς Αἰγυπτίους τὴν γνῶσιν τοῦ κλασσικοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου μὲ πλευρὰς 3, 4, 5 (τοῦ ὁποίου μολαταῦτα δὲν ὑπάρχουν ἴχνη εἰς τὸν Πάπυρον Rhind) θεωρεῖ συγχρόνως ὡς ἀληθὲς ὅτι εἰς τὰς ὄχθας τοῦ Νείλου ἐφηρμόζετο μία εὐφυὴς μέθοδος πρὸς χάραξιν, ἐπὶ τοῦ γηπέδου, τῆς ὀρθῆς γωνίας. Συνίστατο δὲ ἡ μέθοδος αὕτη εἰς τὴν χρῆσιν ἑνὸς σχοινίου, ἔχοντος μῆκος ἴσον πρὸς $3+4+5=12$ μονάδας, ἐπὶ τοῦ ὁποίου εἶχον τεθῆ σημεῖα ἀπέχοντα ἐκ τῶν ἄκρων ἀντιστοίχως 3 καὶ 5 μονάδας. Εἶναι εὐνόητον ὅτι, ἂν χρησιμοποιήσωμεν τὰ σημεῖα ταῦτα ἐπὶ τοῦ ἐδάφους καὶ ἑνώσωμεν τεταμένα τὰ ἐλεύθερα ἄκρα εἰς ἕνα τρίτον σημεῖον, τότε θὰ σχηματισθῇ ἕνα τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ ἀπέναντι τῆς πλευρᾶς 5 μέτρων γωνία θὰ εἶναι ὀρθή. Μία τοιαύτη ἐργασία, ἂν πράγματι ἐξετελεῖτο ὑπὸ κυβερνητικῶν ὑπαλλήλων ἐπιφορτισμένων μὲ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ φόρου ἐγγείου παραγωγῆς δι' ἕκαστον ἀγρότην, ἠδύνατο νὰ ἐξηγήσῃ τὸ ὄνομα «ἁρπεδονάπται»[1] ποὺ ἐδίδετο εἰς αὐτούς. Ἀλλ' ἀκόμη καὶ ἂν δὲν θέλωμεν ν' ἀποδώσωμεν εἰς τοὺς Αἰγυπτίους ὑπαλλήλους τὴν ὡς ἄνω κατασκευὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας, πάλιν πρέπει νὰ δεχθῶμεν, ὅτι θὰ προσέτρεχον εἰς τὴν χρῆσιν νημάτων (ράμματα) πρὸς ἐκτέλεσιν τοῦ ἔργου των καὶ πάλιν θὰ ἥρμοζεν εἰς αὐτοὺς τὸ ὄνομα ἁρπεδονάπται. Αἱ ἐλπίδες ὅτι θὰ ἐλαμβάνοντο ἐκ τοῦ παπύρου Rhind θετικαὶ πληροφορίαι ἐπὶ τοῦ ζητήματος τούτου διεψεύσθησαν.

Πράγματι τὸ γεωμετρικὸν μέρος τοῦ πολυτίμου τούτου κειμηλίου δὲν περιέχει παρὰ ἀριθμόν τινα προβλημάτων ἀποβλεπόντων εἰς τὸν ἀριθμητικὸν ὑπολογισμὸν ἐπιφανειῶν καὶ ὄγκων. Δυστυχῶς εἰς τὰ περισωθέντα γραπτὰ μνημεῖα, δὲν ἀνευρέθη τίποτε ὡς πρὸς τοὺς ὁρισμοὺς τῶν ἐξεταζομένων σχημάτων. Καὶ δύναται κανεὶς νὰ ὑποθέσῃ, ὅτι θὰ ὑπῆρχε κάποιο ἐγχειρίδιον γεωμετρίας, περιέχον τὴν διδακτικὴν βάσιν τῶν λύσεων τῶν ἐκτιθεμένων ὑπὸ τοῦ Ahmes.

Ἡ ἀνακάλυψις τοιούτου ἐγχειριδίου θὰ ἦτο πράγματι ἔργον θείας προνοίας, διότι τὰ σχήματα ποὺ συνοδεύουν τὰ λελυμένα γεωμετρικὰ προβλήματα εἰς τὸν πάπυρον Rhind ἔχουν χαραχθῆ τόσον χονδροειδῶς, ὥστε νὰ ἐγείρωνται εὐλόγως ἀμφιβολίαι ὡς πρὸς τὸ εἶδος αὐτῶν τούτων τῶν σχημάτων. Τὸ γεγονὸς δὲ τοῦτο εἶχεν ὡς συνέπειαν μίαν ἀσυμφωνίαν κατὰ τὴν

ἐξήγησιν τῶν ἐν λόγῳ προβλημάτων, ὅταν, μετὰ τὰ ἁπλούστερα σχήματα τετραγώνων καὶ ὀρθογωνίων, εὑρέθησαν ἄλλα παριστάνοντα τρίγωνα καὶ τετράπλευρα.

Μερικοὶ ἱστορικοί, ὅπως οἱ Eisenlohr καὶ Cantor, ἐνόμισαν ὅτι ἐπρόκειτο ἐδῶ διὰ τρίγωνα ἰσοσκελῆ (βάσις a, πλευρὰ b) καὶ τραπέζια ἰσοσκελῆ (βάσεις b_1 καὶ b_2, πλευρὰ a) καὶ ἔκριναν ὡς ἐσφαλμένους τοὺς ὑπολογισμοὺς τῶν ἐμβαδῶν ἐπὶ τῇ βάσει τῶν μὴ ὀρθῶν τύπων $\frac{ab}{2}$ καὶ $\frac{a(b_1+b_2)}{2}$. Ἐζήτησαν δὲ μίαν ἐξήγησιν τῆς τοιαύτης πλάνης, παρατηροῦντες ὅτι ἐπὶ ἑνὸς τοίχου τοῦ ναοῦ Oro εἰς τὸ Edfu (τοῦ ὁποίου ἡ κατασκευὴ ἐτελείωσε τὴν 23ην Αὐγούστου 273 π.Χ.) τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τετραπλεύρου μὲ πλευρὰς a, b, c, d, ἐκτιμᾶται ἀπὸ τὸν τύπον $\frac{(a+b)(c+d)}{2}$, τοῦ ὁποίου μερικαὶ περιπτώσεις εἶναι οἱ χρησιμοποιούμενοι εἰς τὸν πάπυρον Rhind. Ἄλλοι ὅμως (Révillout, Simon) ἰσχυρίζονται, ὅτι δὲν πρόκειται περὶ λάθους τοῦ Ahmes, θεωροῦντες ὅτι τόσον τὰ τρίγωνα ὅσον καὶ τὰ τραπέζια ἦσαν ὀρθογώνια.

Ἄλλα προβλήματα, περιλαμβανόμενα εἰς τὸν ἴδιον πάπυρον, ἀφοροῦν τὴν ἁπλουστέραν ἐκ τῶν καμπύλων γραμμῶν καὶ μαρτυροῦν ὅτι τὸ πρόβλημα τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου εἶναι ἀρχαιότατον. Συνάγεται πράγματι, ὅτι οἱ Αἰγύπτιοι εἶχον λύσει μὲ ἱκανοποιητικὴν προσέγγισιν τὸ πρόβλημα τοῦτο, ἀφοῦ ἐγνώριζαν μίαν κατασκευήν, ἀνταποκρινομένην εἰς τιμὴν τοῦ ἀριθμοῦ

$$\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3{,}1604.$$

Χωρὶς νὰ ἐνδιατρίψωμεν εἰς τὰς ὑποθέσεις, αἱ ὁποῖαι ἐπροτάθησαν (Simon, Vacca) πρὸς ἐξήγησιν τῆς εὑρέσεως τῆς τιμῆς ταύτης τοῦ π, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἀνωτέρω τιμὴ διαφέρει κατὰ 2 μόλις ἑκατοστὰ τῆς τιμῆς ἐκείνης, ἡ ὁποία χρησιμοποιεῖται συνήθως εἰς τοὺς πρακτικοὺς ὑπολογισμοὺς (3,14). Εἰς τὸν πάπυρον τοῦ Rhind γίνεται χρῆσις τοῦ π εἰς προβλήματα ἀποβλέποντα εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ὄγκου σιταποθηκῶν (ἢ ἐν γένει ἀποθηκῶν γεωργικῶν προϊόντων), περιοριζομένων ὑπὸ ἐπιφανειῶν οὐχὶ ὅλων ἐπιπέδων. Ὅσοι ἐκ τῶν ὄγκων τούτων περιορίζονται ἀποκλειστικῶς ὑπὸ ἐπιπέδων ἐπιφανειῶν ἐφείλκυσαν εὐλόγως τὴν προσοχὴν τῶν ἱστορικῶν, οἱ ὁποῖοι, ἂν καὶ δὲν συμφωνοῦν ἀπὸ ἑρμηνευτικῆς ἀπόψεως ἐφ' ὅλων τῶν λεπτομερειῶν, παραδέχονται ὁμοφώνως, ὅτι εἰς τοὺς ὑπολογισμοὺς τοῦ Ahmes εὑρίσκεται εἰς ἐμβρυώδη κατάστασιν ἡ ἔννοια μερικῶν ἐκ τῶν τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων. Δὲν παρασιωπᾶται πάντως τὸ γεγονός, ὅτι τοιαῦτα προβλήματα ἐπιτρέπουν νὰ συμπληρώσωμεν τὸ πλαίσιον τῶν ἀριθ-

μητικῶν γνώσεων τῶν Αἰγυπτίων, ἀφοῦ ἕνα ἐξ αὐτῶν (τὸ φέρον ἀριθμὸν 45) ἀποδεικνύει ὅτι οὗτοι ἦσαν εἰς θέσιν νὰ ἐξαγάγουν, ἔστω καὶ μὲ δοκιμάς, κυβικὰς ρίζας ἀριθμῶν.

Προσθέτομεν τέλος, ὅτι εἰς τὸ πλέον πρόσφατον δοκουμέντον τοῦ εἴδους τούτου, ποὺ ἔχει ἑρμηνευθῆ, γνωστὸν ὑπὸ τὸ ὄνομα Πάπυρος τῆς Μόσχας, εὑρίσκεται ὁ ὑπολογισμὸς τῆς ἐπιφανείας ἑνὸς ἡμισφαιρικοῦ δοχείου, μὲ μίαν μέθοδον, τῆς ὁποίας ἡ δικαιολογία στηρίζεται ἐπὶ τοῦ γνωστοῦ θεωρήματος ὅτι «ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἰσοῦται πρὸς τὸ τετραπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ ἑνὸς μεγίστου κύκλου της».

16. Ὅσον καὶ ἂν εἶναι ἐπιμελὴς ἡ ἀπαρίθμησις ὅλων τῶν σχημάτων, τὰ ὁποῖα πραγματεύονται οἱ πάπυροι ποὺ ἔχουν μέχρι σήμερον ἀποκρυπτογραφηθῆ, δὲν ἀρκεῖ διὰ νὰ σχηματίσωμεν πλήρη εἰκόνα τῶν γεωμετρικῶν γνώσεων τῶν Αἰγυπτίων. Ἡ ἐξέτασις πράγματι τῶν εἰκόνων, αἱ ὁποῖαι περισωθεῖσαι ἀπὸ τὴν φθοροποιὸν δρᾶσιν τοῦ χρόνου, προκαλοῦν ἀκόμη τὸν θαυμασμὸν ἐπὶ τῶν τοιχωμάτων τῶν σωζομένων ἀκόμη ναῶν, τῶν τάφων καὶ τῶν ἄλλων θαυμαστῶν μνημείων, ὁδηγεῖ εἰς τὴν σκέψιν ὅτι ἀσφαλῶς ἐγνώριζον καὶ ἄλλα σχήματα, τῶν ὁποίων μερικὰς ἁπλᾶς ἰδιότητας εἶχον ἀναγνωρίσει κατὰ τρόπον ἐμπειρικόν.

Δὲν ὑπάρχει ἀμφιβολία π.χ. ὅτι ἀνεγνώρισαν τὴν συμμετρίαν ἑνὸς τετραγώνου ὡς πρὸς τὰς διαγωνίους του καὶ ὅτι ἐγνώριζον νὰ διαιροῦν τὴν περιφέρειαν εἰς 12 καὶ 16 ἴσα μέρη μὲ τὴν βοήθειαν διαμέτρων.

Τὰ ἴδια σχήματα δεικνύουν ὅτι εἰς τὸ πνεῦμα τῶν Αἰγυπτίων ὑπέφωσκεν ἡ ἰδέα τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων καὶ μερικῶν ἀρχῶν τῆς προοπτικῆς (σημειωτέον ἐπ' εὐκαιρίᾳ ὅτι ἡ τελευταία αὕτη ἦτο ἐντελῶς ἄγνωστος εἰς τοὺς λαοὺς τῆς Ἄπω Ἀνατολῆς). Τέλος ἡ χρῆσις σχεδίων οἰκοδομημάτων ἐν «κατόψει» καὶ «τομῇ» ἢ «ὄψει», ἀποδεικνύει ὅτι οἱ Αἰγύπτιοι ὑπερέβαλον τοὺς Βαβυλωνίους καὶ ὅτι προηγήθησαν τοῦ Βιτρουβίου, τοῦ κορυφαίου Ρωμαίου ἀρχιτέκτονος τῆς αὐτοκρατορικῆς περιόδου, εἰς τὴν χρῆσιν τῆς πρωτογόνου ἐφαρμογῆς τῆς μεθόδου παραστάσεως τῶν στερεῶν σχημάτων διὰ προβολῆς ἐπὶ δύο ἐπιπέδων.

Ἐξ ὅλων τούτων συνάγεται, ὅτι αἱ γεωμετρικαὶ γνώσεις τῶν Αἰγυπτίων, δὲν ἦσαν ἀνεπαρκεῖς οὔτε ἐπισφαλεῖς, ἀλλὰ εὑρίσκοντο εἰς πλήρη ἀνταπόκρισιν πρὸς τὰς ἀπαιτήσεις τῆς Ἀγρονομίας καὶ τῆς Ἀρχιτεκτονικῆς. Αἱ γνώσεις καὶ αἱ μέθοδοι ποὺ συνεσσωρεύοντο κατὰ τὴν διάρκειαν τῶν αἰώνων μετελαμπαδεύοντο ζηλοτύπως ἀπὸ γενεᾶς εἰς γενεάν, πιθανῶς μέσῳ τῆς ἱερατικῆς τάξεως, ἡ ὁποία ἦτο θεματοφύλαξ πάσης ἐπιστημονικῆς γνώσεως. Καὶ ἡ πλέον ἐντυπωσιακὴ μαρτυρία τῆς διαφυλάξεως τῆς πολυτίμου ταύτης κληρονομίας προσφέρεται ἀπὸ τὸ ἱστορικὸν γεγονός, ὅτι ὅταν κατὰ τὸν 1ον αἰῶνα μ.Χ., ὁ Αὔγουστος ἠθέλησε νὰ καταμετρηθῇ

ἡ ἔκτασις τοῦ Ρωμαϊκοῦ Κράτους, ἐνεπιστεύθη τὴν κολοσσιαίαν ταύτην ἐπιχείρησιν, εἰς πρόσωπα μεγάλης φήμης, τὰ ὁποῖα εἶχον ἀνδρωθῆ καὶ σπουδάσει εἰς τὴν ἀρχαίαν χώραν τῶν Φαραώ.

Δὲν ὡμιλήσαμεν καθόλου διὰ τὰς ἐκτεταμένας γεωμετρικὰς γνώσεις, ποὺ ἀπεδώθησαν εἰς τοὺς Αἰγυπτίους ὑπὸ ἐκείνων, οἱ ὁποῖοι, ἀρχῆς γενομένης ἀπὸ τοῦ ἀστρονόμου Carlo Piazzi Smyth (1819 - 1900), ἠθέλησαν νὰ παρουσιάσουν ὡς συναγομένας ἐκ τῶν μετρήσεων ποὺ ἔγιναν εἰς τὴν μεγάλην πυραμίδα τοῦ Χέοπος, διότι αἱ ἐπιχειρηματολογίαι των στηρίζονται ἐπὶ ἀριθμῶν μειωμένης ἀκριβείας διὰ δύο λόγους, πρῶτον ἕνεκα τῆς καταστάσεως εἰς ἣν εὑρίσκεται τὸ σεβαστὸν ἐκεῖνο μνημεῖον καὶ δεύτερον ἕνεκα τῆς μὴ ἀκριβοῦς γνώσεως τοῦ μήκους τοῦ «αἰγυπτιακοῦ πήχεως».

Τελευταίως ἠθέλησαν ν' ἀποδείξουν ὅτι αἱ διαστάσεις τῆς ἐν λόγῳ πυραμίδος ἐξελέγησαν οὕτως, ὥστε νὰ ἱκανοποιοῦν τὴν σχέσιν τῆς «χρυσῆς τομῆς», χωρὶς ὅμως νὰ λαμβάνουν ὑπ' ὄψιν δύο οὐσιώδη γεγονότα: α) ὅτι οἱ Αἰγύπτιοι ἐγνώριζον τὴν σχέσιν τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος μόνον διὰ τὸ τρίγωνον μὲ πλευρὰς 3, 4, 5, ἐνῷ εἰς τὴν σχέσιν τῆς χρυσῆς τομῆς φθάνομεν μόνον διὰ γενικῆς ἐφαρμογῆς τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος, β) ὅτι ἡ διαίρεσις εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον παρέμενεν ἄγνωστος εἰς τοὺς Αἰγυπτίους, οἱ ὁποῖοι δὲν ἄφησαν ἴχνη περιλαμβάνοντα κανονικὰ πεντάγωνα καὶ δεκάγωνα, δηλαδὴ σχήματα, εἰς τὰ ὁποῖα ἀκριβῶς παρεμβαίνει ἡ σχέσις τῆς χρυσῆς τομῆς [8].

17. Ἐξ ὅσων ἐν συντομίᾳ ἐξεθέσαμεν εἰς τὸ κεφάλαιον τοῦτο, συνάγεται ὅτι ἡ Ἀριθμητικὴ καὶ ἡ Γεωμετρία ἐκαλλιεργήθησαν μὲ κάποιαν ἐπιμέλειαν εἰς τὰς ὄχθας τοῦ Τίγρητος, τοῦ Εὐφράτου καὶ τοῦ Νείλου καὶ ὅτι μερικὰ ἐκ τῶν ἐπιτευχθέντων ἀποτελεσμάτων κατέλαβον σταθερὰν θέσιν εἰς τὴν ἐπιστήμην.

Ἀλλὰ τόσον οἱ Βαβυλώνιοι, ὅσον καὶ οἱ Αἰγύπτιοι δὲν κατώρθωσαν νὰ δώσουν ζωὴν εἰς κάποιαν μαθηματικὴν θεωρίαν, οὔτε ἀκόμη νὰ γράψουν ἕνα κεφάλαιον Ἀριθμητικῆς ἢ Γεωμετρίας. Ὁ λόγος αὐτῆς τῆς ἀδυναμίας πρέπει ν' ἀναζητηθῇ εἰς τὴν γενικὴν τάσιν τῶν ἐρευνῶν των νὰ μὴ ἀποβλέπουν εἰς τὴν ἀποκατάστασιν ἀληθειῶν θεωρητικοῦ χαρακτῆρος, ἀλλὰ μόνον εἰς τὴν ἐξυπηρέτησιν πρακτικῶν ἀναγκῶν τοῦ ἀστρολόγου καὶ τοῦ μηχανικοῦ.

Εἰς τὸν λαόν, τοῦ ὁποίου τὰ ἐπιτεύγματα πρόκειται ἐν συνεχείᾳ νὰ ἐξετάσωμεν, ἐπεφυλάσσετο ἡ ἄφθιτος δόξα νὰ καταστήσῃ τὴν ἐπιστημονικὴν ἔρευναν καὶ ἰδιαιτέρως τὴν μαθηματικὴν σκοπὸν κύριον τῆς διανοήσεως καὶ ν' ἀποδείξῃ ὅτι μόνον οὕτω δύναται ἡ ἔρευνα νὰ φθάσῃ εἰς τὰ ὑπέρτατα ὕψη, διὰ τὰ ὁποῖα ἡ ἀνθρωπίνη διάνοια εἶναι προωρισμένη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ II

ΤΑ ΕΛΛΗΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΕΝ ΣΥΜΒΙΩΣΕΙ ΜΕ ΤΗΝ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΝ

18. Ἡ πρώτη περίοδος τῆς ἱστορίας τῶν ἑλληνικῶν Μαθηματικῶν ἀρχίζει τὴν στιγμήν, κατὰ τὴν ὁποίαν ἥναψε δειλά, εἰς τὴν ἀρχήν, ὁ σπινθὴρ τῆς ἐπιστημονικῆς ἐρεύνης καὶ κλείει μὲ τὸν θάνατον τοῦ Μεγάλου Ἀλεξάνδρου (323 π.χ.). Περιλαμβάνει λοιπὸν περίπου τρεῖς αἰῶνας. Εἶναι μία ἐποχὴ χαρακτηριζομένη περισσότερον ἀπὸ ἀπρογραμμάτιστον ἐπιστημονικὴν ἔρευναν, παρὰ ἀπὸ μεθοδικὴν καὶ ἐπίπονον ἐργασίαν. Εἶναι μία ἐποχή, κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ ἔρευνα εἰδικῶν φαινομένων διατελεῖ ὑποτεταγμένη εἰς ἀπόψεις οἰκουμενικοῦ χαρακτῆρος, τῶν ὁποίων σκοπὸς ἦτο νὰ ἐξηγήσουν τὴν προέλευσιν καὶ τὴν δομὴν τοῦ Κόσμου καὶ ν' ἀποκαλύψουν τοὺς διέποντας αὐτὸν νόμους.

Τὴν ἐποχὴν ἐκείνην, κάθε ἐπιστήμη καὶ εἰδικώτερον τὰ Μαθηματικὰ ἦτο συνδεδεμένη μὲ τὴν Φιλοσοφίαν διὰ σχέσεων ὑπαγορευομένων ἐξ ἀμοιβαίας ὠφελιμότητος, ἀναλόγων πρὸς ἐκείνας, αἱ ὁποῖαι ὑφίστανται μεταξὺ ζώων διαβιούντων ἐν καταστάσει παρασιτισμοῦ ἢ συμβιώσεως. Διὰ τὸν λόγον αὐτὸν ἦτο τὴν ἐποχὴν ἐκείνην ἐντελῶς ἄγνωστος ἡ εἰδίκευσις ποὺ χαρακτηρίζει τὴν σύγχρονον ἐπιστήμην. Εἶναι μία ἐποχή, ἡ ὁποία δὲν μᾶς ἔδωσεν ὡς κληρονομίαν κανένα σύγγραμμα ἀναφερόμενον εἰς τὴν ἐπιστήμην μας. Ἑπομένως διὰ νὰ σχηματίσωμεν ἰδέαν, ἔστω καὶ κατὰ προσέγγισιν, τῶν ἐπιτευχθεισῶν κατακτήσεων, πρέπει νὰ ἐπαιτήσωμεν πληροφορίας ἀπὸ τοὺς σχολιαστὰς καὶ ἀπὸ ἔργα χαρακτῆρος φιλοσοφικοῦ, ἱστορικοῦ, βιογραφικοῦ καὶ ἐγκυκλοπαιδικοῦ. Ἀλλ' ἐκεῖνος ὁ ὁποῖος γνωρίζει πόσον δύσκολος εἶναι ἡ ἐξήγησις τῶν πηγῶν, ἀπὸ τὰς ὁποίας ἤντλησαν οἱ συγγραφεῖς παρομοίων ἔργων, πόσον ἐπιρρεπεῖς εἰς ὑπερβολὰς εἶναι κατὰ κανόνα οἱ πανηγυρισταί, πόσον βαθέως ἀλλοιοῦνται αἱ ἐπιστημονικαὶ ἀλήθειαι, ὅταν διαβιβάζωνται ἀπὸ πρόσωπα ἐστερημένα εἰδικῆς ἁρμοδιότητος ἐπὶ τοῦ θέματος, πόσον συχναὶ εἶναι αἱ προκύπτουσαι ἀμφιβολίαι, δύναται νὰ ἐννοήσῃ, χωρὶς μεγάλην προσπάθειαν, πόσον δύσκολον ἀπο-

βαίνει τὸ ἔργον νὰ συνθέσωμεν μὲ τοιαῦτα στοιχεῖα ἕνα σύνολον γνώσεων, χωρὶς σφάλματα καὶ εἰκασίας, χωρὶς κενά.

Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι ἰδιαιτέρως δύσκολον νὰ ἱκανοποιήσωμεν τὴν τελευταίαν ταύτην ἀπαίτησιν, εὐνόητον τυγχάνει ὅτι τόσον ὁ πίναξ τῶν ὀνομάτων, ὅσον καὶ ὁ κατάλογος τῶν ἀνακαλύψεων τὰς ὁποίας πρόκειται νὰ παρουσιάσωμεν, εἶναι στοιχεῖα προωρισμένα νὰ ὑποστοῦν εἰς τὸ μέλλον προσθήκας καὶ ἀλλοιώσεις εἴτε λόγῳ ἀνακαλύψεως νέων δοκουμέντων, εἴτε λόγῳ πληρεστέρας κατανοήσεως τῶν ἤδη ὑπαρχόντων. Καὶ εἶναι πιθανόν, ἑπομένως, ἀκόμη καὶ τὰ βιογραφικὰ στοιχεῖα τὰ σχετικὰ πρὸς τὰ πρόσωπα τῆς ἐξεταζομένης περιόδου νὰ καταστοῦν καὶ αὐτὰ εἰς τὸ μέλλον πληρέστερα καὶ ἀσφαλέστερα ἀπὸ ὅ,τι εἶναι σήμερον.

Κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς περιόδου, μὲ τὴν ὁποίαν πρόκειται ν' ἀσχοληθῶμεν, οἱ Ἕλληνες ἐσυνέχισαν τὰς ἐμπορικὰς καὶ πνευματικὰς σχέσεις ποὺ εἶχον ἐγκαινιάσει πρὸ ἀμνημονεύτων ἐτῶν μὲ τοὺς ἄλλους μεσογειακοὺς λαούς, οἱ ὁποῖοι εἶχον προηγηθῆ εἰς τὴν πορείαν τοῦ πολιτισμοῦ. Ἡ ἐπίδρασις τὴν ὁποίαν ὑπέστησαν ἐκ τῶν σχέσεων τούτων κατὰ τὴν ἀπωτέραν ἀρχαιότητα πρέπει νὰ ἦτο ἀρκετὰ σημαντική, ἀφοῦ ὁ ἴδιος ὁ ἑλληνικὸς λαὸς — οὐδενὸς ἄλλου δεύτερος εἰς ἐθνικὴν ὑπερηφάνειαν, ὅπως εἶναι παγκοίνως γνωστὸν — μὲ τὸν μῦθον περὶ Κάδμου ἀνεγνώριζεν ἑαυτὸν ὀφειλέτην πρὸς τὴν Ἀνατολὴν καὶ ἀφοῦ, μὲ τὸ ν' ἀποκαλῇ τὰ γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου φοινικικὰ στοιχεῖα, διετήρει ζῶσαν τὴν ἀνάμνησιν τῆς ὑπερποντίου καταγωγῆς των.

Τοιαύτη ἐπίδρασις διατηρεῖται ζωηρὰ ἀκόμη καὶ κατὰ τὴν ἐποχὴν τὴν ὁποίαν ἐξετάζομεν, ἀφοῦ πολλοὶ διανοούμενοι ἀκμάσαντες κατὰ τὴν ἐποχὴν ταύτην αὐτοαποκαλοῦνται μαθηταὶ τῶν Αἰγυπτίων ἱερέων. Παρὰ ταῦτα δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ ὑπερτιμῶμεν τὴν δύναμιν τῆς ἐπιδράσεως ταύτης, ἂν μή τι ἄλλο, διότι ἡ ἀτελὴς γνῶσις τὴν ὁποίαν εἶχον οἱ Ἕλληνες τῶν ἄλλων γλωσσῶν, μοιραίως ἔθετε τούτους εἰς ἀδυναμίαν νὰ εἰσδύσουν εἰς τὰ μύχια τῆς σκέψεως τῶν λαῶν, μὲ τοὺς ὁποίους διετήρουν ἐμπορικὰς σχέσεις.

Ἐξ ἄλλου ὅ,τι γνωρίζομεν γύρω ἀπὸ τὸ ἐπιστημονικὸν ἔργον τῆς ἀρχαίας Ἑλλάδος ἀποδεικνύει ὅτι, ἀκόμη καὶ ἂν οἱ Ἕλληνες ἤντλησαν ἐκτὸς τῆς μητρὸς πατρίδος τὰ στοιχεῖα τῆς γνώσεως, οὗτοι μετεσχημάτισαν ταῦτα τόσον βαθέως καὶ τὰ ἀνέπτυξαν περαιτέρω κατὰ τρόπον τόσον πρωτότυπον, ὥστε δὲν εἶναι δυνατὸν ν' ἀρνηθῶμεν ὅτι ὁλόκληρος ἡ ἐπιστημονική των δημιουργία ἀποτελεῖ ἀποκλειστικὴν καὶ ἀναπαλλοτρίωτον πνευματικὴν ἰδιοκτησίαν των, τόσον μᾶλλον, καθ' ὅσον δὲν ὑπάρχει εἰς τὸ ἑλληνικὸν πνεῦμα κανένα ἰδιαίτερον γνώρισμα ἢ γεγονός, ποὺ νὰ μὴ εὑρίσκεται εἰς πλήρη συμφωνίαν πρὸς ὅ,τι ἄλλο γνωρίζομεν γύρω ἀπὸ τὴν ἰδιοφυΐαν αὐτῆς τῆς προνομιούχου φυλῆς τῆς φύσεως.

Ὁ Θαλῆς καὶ ἡ Ἰωνικὴ Σχολὴ

19. Περὶ τὸ τέλος τοῦ 6ου αἰῶνος καὶ τὴν ἀρχὴν τοῦ 5ου, τὰ στρατεύματα τῆς Μηδίας καὶ τῆς Λυδίας εὑρίσκοντο παρατεταγμένα ἀπέναντι ἀλλήλων εἰς τὴν κοιλάδα τοῦ ποταμοῦ Ἅλυος, ἕτοιμα διὰ τὴν μάχην, ἡ ὁποία θ' ἀπεφάσιζε διὰ τὰς τύχας τῆς Μικρᾶς Ἀσίας, ὁπότε αἰφνιδίως ὁ ἥλιος ἤρχισε νὰ βυθίζεται εἰς τὸ σκότος, τὰ δὲ ἀντίπαλα στρατεύματα, σεβόμενα ἀρχαίαν παράδοσιν τῶν ἰρανικῶν λαῶν, νὰ μὴ μάχωνται παρὰ μόνον εἰς τὸ φῶς τῆς ἡμέρας, κατέθεσαν τὰ ὅπλα καὶ προέβησαν εἰς διαπραγματεύσεις εἰρήνης.

Ἡ ἡμέρα κατὰ τὴν ὁποίαν ἔλαβε χώραν τὸ ἀξιοσημείωτον αὐτὸ γεγονὸς δὲν εἶναι ἐπακριβῶς γνωστή. Οἱ ἱστορικοὶ ταλαντεύονται νὰ ἐκλέξουν μεταξὺ τῶν χρονολογιῶν :

30 Σεπτεμβρίου	610
31 Ἰουλίου	597
28 Μαΐου	585

αἱ ὁποῖαι προτείνονται ἀπὸ τὴν σύγχρονον Ἀστρονομίαν ὡς πιθαναί. Ἐκεῖνο ὅμως τὸ ὁποῖον γίνεται δεκτὸν ὁμοφώνως ἀπὸ τοὺς συγγραφεῖς τῆς ἐποχῆς ποὺ ἐξετάζομεν, εἶναι ὅτι τὸ ἐντυπωσιακὸν ἐκεῖνο φαινόμενον εἶχε προείπει ὁ Θαλῆς ὁ Μιλήσιος, ἡ πρώτη ἐξέχουσα προσωπικότης, ἡ ὁποία ἐμφανίζεται εἰς τὸ προσκήνιον τῆς ἱστορίας τῶν Ἐπιστημῶν, εἰς τὴν Ἀρχαίαν Ἑλλάδα. Ἡ πρόρρησις αὕτη προεκάλεσε τόσον θαυμασμὸν εἰς τοὺς συμπολίτας του, ὥστε ἐπὶ ἀρχοντείας Δαμασίου (585 - 583 π. Χ.), συγκατηριθμήθη καὶ ὁ Θαλῆς μεταξὺ τῶν ἑπτὰ σοφῶν τῆς Ἑλλάδος.

Ἡ ἐπιστήμη τῆς ὁποίας ἦτο κάτοχος ὁ Θαλῆς, δὲν ἦτο ἐξ ὁλοκλήρου καρπὸς προσωπικῶν του μελετῶν καὶ παρατηρήσεων, ἀφοῦ αὐτὸς ὁ ἴδιος, μετὰ τὴν ἵδρυσιν τῆς περιφήμου Ἰωνικῆς Σχολῆς, δὲν ἐδίσταζε νὰ δηλώνῃ ὅτι πολλὰ ἔμαθεν εἰς τὴν Αἴγυπτον ἐκ τῆς ἐπαφῆς του μὲ τοὺς ἐκεῖ ἱερεῖς, κατὰ τὴν διάρκειαν τῶν Μεσογειακῶν του ἐξορμήσεων, εἰς τὰς ὁποίας ὠθεῖτο μᾶλλον ἀπὸ ἐπιχειρηματικὸν οἶστρον παρὰ ἀπὸ καθαρὰν δίψαν τοῦ εἰδέναι. Μολονότι μία τοιαύτη δήλωσις ἀποτελεῖ ἀπόδειξιν τῆς ἀμέμπτου χρηστότητος τοῦ σοφοῦ τῆς Μιλήτου, δὲν πρέπει νὰ καταβιβάσωμεν τοῦτον εἰς τὸ ἐπίπεδον περιοδεύοντος μεταπράτου τῶν Φαραώ, διότι π.χ. καμμία ξενικὴ ἐπίδρασις δὲν ἔχει μέχρι σήμερον διαπιστωθῇ εἰς τὸ ἰδιάζον φιλοσοφικόν του σύστημα, κατὰ τὸ ὁποῖον τὸ ὕδωρ ἀποτελεῖ τὸ ἀρχικὸν καὶ ἑνιαῖον συστατικὸν ὅλων τῶν ὄντων.

20. Οὔτε αἱ εἰς ἡμᾶς γνωσταὶ ἀρχαιολογικαὶ μαρτυρίαι ἐπιτρέπουν νὰ συμπεράνωμεν, ὅτι αἱ γεωμετρικαὶ γνώσεις, τῶν ὁποίων ἦτο κάτοχος, εἶχον ξενικὴν προέλευσιν. Αἱ γνώσεις αὗται συνοψίζονται εἰς τὴν ἀπόδει-

ξιν καὶ λύσιν θεωρημάτων καὶ προβλημάτων τῆς Στοιχειώδους Γεωμετρίας, ὡς εἶναι τὰ ἀκόλουθα :

1) Ὁ κύκλος διχοτομεῖται ὑπὸ τῆς διαμέτρου.

2) Αἱ παρὰ τὴν βασιν ἰσοσκελοῦς τριγώνου γωνίαι εἶναι ἴσαι.

3) Αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι εἶναι ἴσαι.

4) Νὰ προσδιορισθῇ ἡ ἀπὸ τοῦ λιμένος ἀπόστασις τοῦ πλοίου.

5) Νὰ προσδιορισθῇ τὸ ὕψος μιᾶς πυραμίδος μέσῳ τῆς σκιᾶς, τὴν ὁποίαν ρίπτει ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς βασεως.

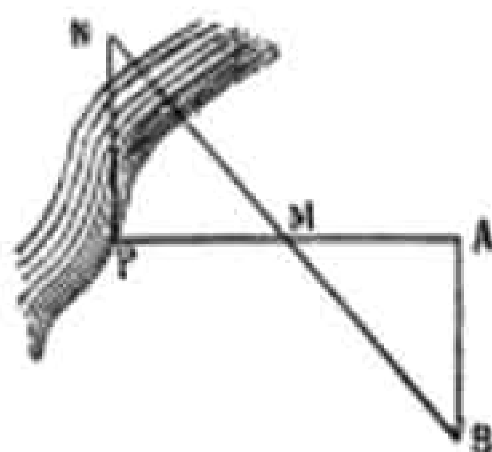
Ἀποδίδεται ἀκόμη εἰς τὸν Θαλῆ καὶ ἡ πρότασις «ἡ ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνία, ὀρθή ἐστιν» καὶ εἶναι, διὰ τοῦτο, δίκαιον ν' ἀποδώσωμεν εἰς αὐτὸν ἐπίσης τὴν τιμήν, ὅτι εἶναι ὁ πρῶτος ἐμπνευστὴς τῶν πολὺ γνωστῶν στίχων τοῦ θείου ποιητοῦ Dante :

«ἂν τρίγωνο μπορεῖς σὲ μισοκύκλι
χωρὶς ὀρθὴ γωνιὰ ποτὲ νὰ μπάσεις».

(Παράδεισος, XIII, 101 - 2)[9].

Δυστυχῶς δὲν ἔφθασε μέχρις ἡμῶν καμμία πληροφορία ὡς πρὸς τὸν τρόπον μὲ τὸν ὁποῖον ἀπεδείκνυεν αὐτὰς τὰς ἀληθείας •. Τὸ αὐτό, πρέπει νὰ λεχθῇ καὶ διὰ τὰς γεωμετρικὰς κατασκευάς, μὲ τὰς ὁποίας ἐπέτυχε τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων, ποὺ τοῦ ἀποδίδονται.

Ὡς πρὸς τὸν προδιορισμὸν τῆς ἀπὸ τοῦ λιμένος ἀποστάσεως τοῦ πλοίου παρατηροῦμεν ὅτι τίποτε δὲν ἐμποδίζει νὰ παραδεχθῶμεν ὅτι ὁ Θαλῆς εἶχε κάμει χρῆσιν τῆς ἑπομένης ἁπλουστάτης κατασκευῆς, ποὺ ἦτο ἐν χρήσει ὑπὸ τῶν Ρωμαίων ἀγρονόμων.



Σχ. 1

Ἔστω (σχ. 1) Ν ἡ θέσις τοῦ πλοίου καὶ Ρ ὁ λιμήν. Φέρομεν τὴν ΡΑ κάθετον ἐπὶ τὴν σκοπευτικὴν ἀκτῖνα ΡΝ καὶ ὁρίζομεν ἐπ' αὐτῆς αὐθαιρέτως ἕνα σημεῖον Α. Ἔστω Μ τὸ μέσον τοῦ τμήματος ΡΑ καὶ Β τὸ σημεῖον καθ' ὃ ἡ εὐθεῖα ΝΜ προεκτεινομένη τέμνει εἰς Α τὴν ἀγομένην κάθετον ἐπὶ τὴν ΡΑ. Ἡ ἀπόστασις τῶν σημείων Α καὶ Β εἶναι προφανῶς ἴση πρὸς τὴν ζητουμένην ἀπόστασιν τῶν σημείων Ρ καὶ Ν.

Ὀλιγώτερον εὔκολον εἶναι νὰ μαντεύσωμεν τὴν λύσιν τοῦ ἑτέρου προβλήματος, τοῦ προσδιορισμοῦ δηλαδὴ τοῦ ὕψους τῆς πυραμίδος. Κατὰ

• Ἂς σημειωθῇ μολαταῦτα ὅτι τὰ ἀναφερόμενα θεωρήματα 1), 2), 3), δύνανται ν' ἀποδειχθοῦν πολὺ εὔκολα δι' ἐπιθέσεως ἢ ἀκόμη διὰ τοῦ νεωτέρου τεχνάσματος τῆς πτυχώσεως τοῦ χάρτου.

τινας διὰ τὴν λύσιν αὐτοῦ ὁ Θαλῆς ἐχρησιμοποίει μίαν ῥάβδον, μὲ τὴν βοήθειαν τῆς ὁποίας προσδιώριζε τὴν στιγμήν, κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ μῆκος της ἦτο ἀκριβῶς ἴσον πρὸς τὴν σκιάν της. Τὴν ἰδίαν χρονικὴν στιγμὴν πᾶν ἄλλο σῶμα (εἰδικῶς ἡ θεωρουμένη πυραμίς) ῥίπτει σκιὰν ἴσου μήκους πρὸς τὸ ὕψος του. Ἡ ἐν λόγῳ μέθοδος εἶναι ἀρκετὰ ἁπλῆ, ἀλλ' ἀνεφάρμοστος εἰς στερεά, τῶν ὁποίων ἡ βάσις δὲν ἔχει ἀμελητέας διαστάσεις ὡς πρὸς τὸ ὕψος, ἄρα καὶ εἰς τὴν ὑπ' ὄψει περίπτωσιν τῆς πυραμίδος.

Ἡ δυσκολία ὑπερνικᾶται, ἂν παραδεχθῶμεν ὅτι ὁ Μιλήσιος σοφὸς δὲν ἀπέβλεπεν εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ὕψους πυραμίδος, ἀλλ' ἑνὸς ὀβελίσκου. Ἐπανέρχεται ὅμως, ἐὰν παραδεχθῶμεν μὲ τὸν Πλίνιον τὸν Πρεσβύτερον, ὅτι ὁ Θαλῆς ἐχρησιμοποίει βεβαίως μίαν ῥάβδον, ἀλλ' εἰς οἱανδήποτε ὥραν τῆς ἡμέρας, ἐκμεταλλευόμενος τὸν σταθερὸν λόγον, ὁ ὁποῖος ὑπάρχει κατὰ τὴν αὐτὴν στιγμὴν μεταξὺ τοῦ ὕψους ἑνὸς ἀντικειμένου καὶ τοῦ μήκους τῆς ῥιπτομένης ἐπὶ ὁριζοντίου ἐδάφους σκιᾶς. Ἡ δευτέρα αὕτη μέθοδος προϋποθέτει τὴν γνῶσιν τῶν θεμελιωδῶν σχέσεων τῆς ὁμοιότητος καὶ τῶν προτασσομένων αὐτῆς θεωριῶν, πρᾶγμα δυσκόλως δυνάμενον νὰ γίνῃ δεκτόν, διὰ τὸν Θαλῆν, ἕνεκα τῆς νοοτροπίας του, περὶ τῆς ὁποίας ὁμοφώνως ἀναφέρεται, ὅτι δὲν ἐνδιεφέρετο διὰ τὰ μαθηματικά, ὡς αὐτόνομον θεωρίαν, ἀλλ' ὡς πολύτιμον βοήθημα διὰ τὴν ἔρευναν τῶν προβλημάτων τῆς Φυσικῆς Φιλοσοφίας. Κατὰ μείζονα λόγον ἀποκλείεται νὰ ἦτο εἰς αὐτὸν γνωστὴ ἡ σχέσις ἡ ὑφισταμένη μεταξὺ τῶν δύο σημειοσειρῶν προκυπτουσῶν ἐκ τῆς τομῆς δέσμης παραλλήλων εὐθειῶν[10], ἡ γνωστὴ ὡς θεώρημα τοῦ Θαλοῦ. Πρέπει λοιπὸν ἡ ὀνομασία αὕτη νὰ θεωρεῖται πρὸς τιμὴν τοῦ σοφοῦ τῆς Μιλήτου, ἀκριβῶς ὅπως δίδεται τὸ ὄνομα ἑνὸς μεγάλου ἀνδρὸς εἰς μίαν ὁδὸν διὰ τὴν κατασκευὴν τῆς ὁποίας οὐδένα ἔπαιξε ῥόλον.

21. Ἂν ἀπεκαλέσαμεν τὸν Θαλῆ ἀρχηγὸν μιᾶς σχολῆς, τοῦτο δὲν ἔγινε διότι πράγματι οὗτος συνήθροισε γύρω του μίαν ὁμάδα ἀκροατῶν, ἀλλὰ μόνον διότι αἱ πλέον χαρακτηριστικαὶ ἰδέαι του υἱοθετήθησαν καὶ ἀνεπτύχθησαν περαιτέρω ἀπὸ μερικοὺς συμπατριώτας του, τῶν ὁποίων ἡ ἱστορία διετήρησε τὴν ἀνάμνησιν. Μεταξὺ τούτων περιοριζόμεθα ν' ἀναφέρωμεν τὸν Ἀναξίμανδρον καὶ τὸν Ἀναξιμένην, οἱ ὁποῖοι, ὄχι μόνον ἀνεψηλάφησαν τὰς βασικὰς ἀρχὰς τοῦ φιλοσοφικοῦ συστήματος τοῦ Θαλοῦ (μὲ τὸ ν' ἀντικαταστήσουν τὸ ὕδωρ, ὡς ἀρχικὸν στοιχεῖον τῶν ὄντων, μὲ τὸ ἄπειρον ὁ πρῶτος καὶ τὸν ἀέρα ὁ δεύτερος), ἀλλὰ ἔδωσαν ἔμφασιν εἰς τὴν ἀπομάκρυνσίν των ἀπὸ τὰ μαθηματικὰ τῆς Ἰωνικῆς Σχολῆς. Διὰ τὸν λόγον αὐτὸν ἡ Ἰωνικὴ Σχολὴ κατέχει μίαν θέσιν εἰς τὴν ἱστορίαν τῶν θετικῶν Ἐπιστημῶν, ὄχι διὰ τὰς ἀμέσους καὶ σημαντικὰς συμβολάς της εἰς τὴν ἀνάπτυξιν τῶν θετικῶν μας γνώσεων, ἀλλὰ κυρίως διότι ἔστρεψε τὴν προσοχήν της εἰς μερικὰς γεωμετρικὰς προτάσεις, αἱ ὁποῖαι εἶχον διαφύγει

τῆς ἀντιλήψεως τῶν Βαβυλωνίων καὶ Αἰγυπτίων. Συνεπῶς ἡ Ἰωνικὴ Σχολὴ δὲν ἀντιπροσωπεύει τὴν αὐγὴν τῶν ἑλληνικῶν μαθηματικῶν, ἀλλὰ μᾶλλον τὴν περίοδον ἐκείνην τῆς ἀσιγάστου ζυμώσεως, ἡ ὁποία προοιωνίζει καὶ προαναγγέλλει τὴν ἀληθῆ καὶ γνησίαν ἐπιστημονικὴν ἔρευναν.

Ὁ Πυθαγόρας καὶ ἡ Ἰταλικὴ Σχολὴ

22. Τὸ καθωρισμένον περιεχόμενον τῆς ἑπομένης περιόδου τῆς ἱστορίας τῶν μαθηματικῶν ἀποτελεῖ δόξαν ἄφθιτον τοῦ ἐκ Σάμου Πυθαγόρου. Οὗτος ἐδημιούργησεν ἕνα φιλοσοφικὸν σύστημα, εἰς τὸ ὁποῖον τὸ πρωταρχικὸν στοιχεῖον τῆς δημιουργίας δὲν εἶναι ψηλαφητόν, ὅπως εἰσηγοῦντο ὁ Θαλῆς, ὁ Ἀναξίμανδρος καὶ ὁ Ἀναξιμένης, ἀλλὰ μία ὀντότης πνευματική, ὁ ἀριθμός, θεωρούμενος ὄχι ὡς δύναμις ἐμψυχώνουσα καὶ κυβερνῶσα τὸν κόσμον, ἀλλὰ ὡς αὐτὴ αὕτη ἡ ἐσχάτη οὐσία τῶν ὄντων. «Ἀριθμὸν εἶναι τὴν οὐσίαν ἁπάντων», λέγει τὸ θεμελιῶδες δόγμα τῆς Πυθαγορικῆς Φιλοσοφίας. Ὅτι μία τοιαύτη ἐκδοχὴ προέρχεται ἐκ τῆς Ἀνατολῆς, ὅπως πολλοὶ ὑποστηρίζουν, εἶναι δυνατόν, δὲν εἶναι ὅμως ἱστορικῶς ἀποδεδειγμένον. Ἐξ ἄλλου δὲν εἶναι ἐστερημένη βάσεως ἡ ὑπόθεσις, ὅτι εἰς τὴν διατύπωσιν τοῦ δόγματος τούτου ἔφθασαν μὲ ταχεῖαν γενίκευσιν, ὅταν εἰς τὴν Πυθαγόρειον Σχολὴν ἔγινεν ἀντιληπτὴ ἡ αὐστηρὰ ἀριθμητικὴ νομοτέλεια τῶν ἀκουστικῶν φαινομένων.

Ὁ μῦθος, ὁ ὁποῖος ἀνθεῖ πάντοτε πλουσίως ὑπὸ τὸν οὐρανὸν τῆς Ἑλλάδος, ἀρεσκόμενος νὰ περιβάλλῃ μὲ φανταστικὰς λεπτομερείας καὶ διηγήσεις ὅλα τὰ ἀφορῶντα τὸν Πυθαγόραν, ἐξαναγκάζει τὸν ἐρευνητήν, τὸν ἐπιθυμοῦντα νὰ συνθέσῃ τὴν βιογραφίαν του, εἰς τὴν μεγαλυτέραν προσοχὴν καὶ περίσκεψιν. Περιοριζόμενοι εἰς ὅ,τι τουλάχιστον φαίνεται ἀνώτερον πάσης ἀμφιβολίας, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὡς ἀσφαλῆ τὴν πληροφορίαν, ὅτι ἐγεννήθη εἰς τὴν Σάμον κατὰ τὸ 586 π.Χ., ὅτι ἐπεσκέφθη τὴν Αἴγυπτον, καὶ ὅτι διὰ ν' ἀπαλλαγῇ ἀπὸ τὴν ἀφόρητον τυραννίαν τοῦ Πολυκράτους ἐγκατέλειψε, περὶ τὸ 540, τὴν πατρίδα του μὲ προορισμὸν τὴν Μεγάλην Ἑλλάδα. Ἐκεῖ, εἰς τὸν Κρότωνα, καὶ κατὰ τὴν ἐποχὴν περίπου καθ' ἣν οἱ Ταρκύνιοι ἐξεδιώχθησαν ἐκ τῆς Ρώμης, ἵδρυσε τὴν ἰδιότυπον ἐκείνην ὀργάνωσιν, ἀπὸ τὴν ὁποίαν δὲν ἀπεκλείοντο αἱ γυναῖκες.

Ἡ ὀργάνωσις ἐκείνη, ἀποβλέπουσα περισσότερον εἰς πολιτικοθρησκευτικοὺς σκοποὺς καὶ ὀλιγώτερον εἰς ἀποκλειστικὴν ἐπιστημονικὴν ἔρευναν, ἐπωνομάσθη Ἰταλικὴ Σχολὴ καὶ ἀπέβη πολὺ γρήγορα κέντρον μιᾶς ἀνησύχου ἀριστοκρατικῆς μερίδος, μὲ ἀποτέλεσμα νὰ γίνῃ στόχος τοῦ λαϊκοῦ κινήματος, ποὺ συνετάραξε τότε ὅλα τὰ κράτη τῆς Ἑλλάδος καὶ νὰ διαλυθῇ διὰ τῆς βίας. Ἀλλ' οὔτε ἡ διάλυσις τῆς Σχολῆς, οὔτε ὁ θάνατος τοῦ ἱδρυτοῦ της (500 π.Χ. περίπου), ἐπελθὼν ὑπὸ συνθήκας μὴ

τῆς ἀντιλήψεως τῶν Βαβυλωνίων καὶ Αἰγυπτίων. Συνεπῶς ἡ Ἰωνικὴ Σχολὴ δὲν ἀντιπροσωπεύει τὴν αὐγὴν τῶν ἑλληνικῶν μαθηματικῶν, ἀλλὰ μᾶλλον τὴν περίοδον ἐκείνην τῆς ἀσιγάστου ζυμώσεως, ἡ ὁποία προοιωνίζει καὶ προαναγγέλλει τὴν ἀληθῆ καὶ γνησίαν ἐπιστημονικὴν ἔρευναν.

Ὁ Πυθαγόρας καὶ ἡ Ἰταλικὴ Σχολή

22. Τὸ καθωρισμένον περιεχόμενον τῆς ἑπομένης περιόδου τῆς ἱστορίας τῶν μαθηματικῶν ἀποτελεῖ δόξαν ἄφθιτον τοῦ ἐκ Σάμου Π υ θ α γ ό ρ ο υ. Οὗτος ἐδημιούργησεν ἕνα φιλοσοφικὸν σύστημα, εἰς τὸ ὁποῖον τὸ πρωταρχικὸν στοιχεῖον τῆς δημιουργίας δὲν εἶναι ψηλαφητόν, ὅπως εἰσηγοῦντο ὁ Θαλῆς, ὁ Ἀναξίμανδρος καὶ ὁ Ἀναξιμένης, ἀλλὰ μία ὀντότης πνευματική, ὁ ἀ ρ ι θ μ ό ς, θεωρούμενος ὄχι ὡς δύναμις ἐμψυχώνουσα καὶ κυβερνῶσα τὸν κόσμον, ἀλλὰ ὡς αὐτὴ αὕτη ἡ ἐσχάτη οὐσία τῶν ὄντων. «Ἀ ρ ι θ μ ὸ ν ε ἶ ν α ι τ ὴ ν ο ὐ σ ί α ν ἁ π ά ν τ ω ν», λέγει τὸ θεμελιῶδες δόγμα τῆς Πυθαγορικῆς Φιλοσοφίας. Ὅτι μία τοιαύτη ἐκδοχὴ προέρχεται ἐκ τῆς Ἀνατολῆς, ὅπως πολλοὶ ὑποστηρίζουν, εἶναι δυνατόν, δὲν εἶναι ὅμως ἱστορικῶς ἀποδεδειγμένον. Ἐξ ἄλλου δὲν εἶναι ἐστερημένη βάσεως ἡ ὑπόθεσις, ὅτι εἰς τὴν διατύπωσιν τοῦ δόγματος τούτου ἔφθασαν μὲ ταχεῖαν γενίκευσιν, ὅταν εἰς τὴν Πυθαγόρειον Σχολὴν ἔγινεν ἀντιληπτὴ ἡ αὐστηρὰ ἀριθμητικὴ νομοτέλεια τῶν ἀκουστικῶν φαινομένων.

Ὁ μῦθος, ὁ ὁποῖος ἀνθεῖ πάντοτε πλουσίως ὑπὸ τὸν οὐρανὸν τῆς Ἑλλάδος, ἀρεσκόμενος νὰ περιβάλλῃ μὲ φανταστικὰς λεπτομερείας καὶ διηγήσεις ὅλα τὰ ἀφορῶντα τὸν Πυθαγόραν, ἐξαναγκάζει τὸν ἐρευνητήν, τὸν ἐπιθυμοῦντα νὰ συνθέσῃ τὴν βιογραφίαν του, εἰς τὴν μεγαλυτέραν προσοχὴν καὶ περίσκεψιν. Περιοριζόμενοι εἰς ὅ,τι τουλάχιστον φαίνεται ἀνώτερον πάσης ἀμφιβολίας, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὡς ἀσφαλῆ τὴν πληροφορίαν, ὅτι ἐγεννήθη εἰς τὴν Σάμον κατὰ τὸ 586 π.Χ., ὅτι ἐπεσκέφθη τὴν Αἴγυπτον, καὶ ὅτι διὰ ν' ἀπαλλαγῇ ἀπὸ τὴν ἀφόρητον τυραννίαν τοῦ Πολυκράτους ἐγκατέλειψε, περὶ τὸ 540, τὴν πατρίδα του μὲ προορισμὸν τὴν Μεγάλην Ἑλλάδα. Ἐκεῖ, εἰς τὸν Κρότωνα, καὶ κατὰ τὴν ἐποχὴν περίπου καθ' ἣν οἱ Ταρκύνιοι ἐξεδιώχθησαν ἐκ τῆς Ρώμης, ἵδρυσε τὴν ἰδιότυπον ἐκείνην ὀργάνωσιν, ἀπὸ τὴν ὁποίαν δὲν ἀπεκλείοντο αἱ γυναῖκες.

Ἡ ὀργάνωσις ἐκείνη, ἀποβλέπουσα περισσότερον εἰς πολιτικοθρησκευτικοὺς σκοποὺς καὶ ὀλιγώτερον εἰς ἀποκλειστικὴν ἐπιστημονικὴν ἔρευναν, ἐπωνομάσθη Ἰ τ α λ ι κ ὴ Σ χ ο λ ὴ καὶ ἀπέβη πολὺ γρήγορα κέντρον μιᾶς ἀνησύχου ἀριστοκρατικῆς μερίδος, μὲ ἀποτέλεσμα νὰ γίνῃ στόχος τοῦ λαϊκοῦ κινήματος, ποὺ συνετάραξε τότε ὅλα τὰ κράτη τῆς Ἑλλάδος καὶ νὰ διαλυθῇ διὰ τῆς βίας. Ἀλλ' οὔτε ἡ διάλυσις τῆς Σχολῆς, οὔτε ὁ θάνατος τοῦ ἱδρυτοῦ της (500 π.Χ. περίπου), ἐπελθὼν ὑπὸ συνθήκας μὴ

ἀκριβολογουμένας, εἶχον τὴν δύναμιν νὰ καταστρέψουν τὸ ἔργον της· αἱ ἰδέαι τοῦ Πυθαγόρου διεδόθησαν, πράγματι, ἀνὰ τὴν Ἑλλάδα καὶ κατόπιν, ἀνὰ τὸν κόσμον, εὑρίσκουσαι παντοῦ θαυμαστὰς καὶ θιασώτας, οἱ ὁποῖοι ἀπετέλεσαν ἀληθῆ λεγεῶνα καὶ οἱ ὁποῖοι οὔτε σήμερον ἔχουν ἐντελῶς ἐκλείψει.

Ὁ θρῦλος ἀποτελεῖ βεβαίως σοβαρὸν ἐμπόδιον δι' ἐκεῖνον, ὁ ὁποῖος ἐπιθυμεῖ νὰ χαράξῃ ἕνα διάγραμμα τῆς προσωπικότητος τοῦ Πυθαγόρου, ἀλλ' ἀκόμη σοβαρότερον ἐμπόδιον, εἶναι ἡ ἀπόλυτος μυστικότης, ἡ ὁποία ἐπεβάλλετο εἰς τὰ μέλη τῆς Ἰταλικῆς Σχολῆς, ὅσον ἀφορᾷ τὴν ἐντὸς αὐτῆς συντελουμένην ἐργασίαν, διότι ἕνεκα τοῦ λόγου τούτου καθίσταται πολὺ δύσκολος καὶ ἀμφίβολος ἡ προσπάθεια ἀναπαραγωγῆς ὁλοκλήρου τοῦ μαθηματικοῦ ἔργου τοῦ κορυφαίου διανοουμένου τῆς Σάμου καὶ ὁ ἐρευνητὴς εὑρίσκεται ἐνώπιον τῆς ἀπολύτου ἀδυναμίας ν' ἀναμετρήσῃ ποῖον μέρος τῶν ἀνακαλύψεων καὶ ἐφευρέσεων, ποὺ ἐγένοντο ἐντὸς τῆς Ἰταλικῆς Σχολῆς, ὀφείλεται εἰς τὸν ἀρχηγόν της. Διὰ τοῦτο ὅταν ἀναφερώμεθα εἰς εὑρήματα τοῦ Πυθαγόρου, δὲν πρέπει ν' ἀποκλείωμεν διόλου τὸ ἐνδεχόμενον νὰ πρόκειται περὶ ἐργασιῶν, εἰς τὰς ὁποίας ἔλαβον μέρος καὶ οἱ μαθηταί του.

23. Δύο πράγματα χαρακτηρίζουν ἕνα κυρίως εἰπεῖν ἐπιστημονικὸν σύστημα γνώσεων καὶ τὸ διαστέλλουν ἀπὸ μίαν ἁπλῆν συλλογὴν μαθηματικῶν προτάσεων, ἤτοι: 1ον μία μεθοδικὴ κατάταξις τῆς σπουδαζομένης ὕλης. 2ον ἕνας πίναξ ὁρισμῶν ὅλων τῶν ἐξεταστέων ἐννοιῶν. Καὶ τὸ ἕνα καὶ τὸ ἄλλο ἐπροτάθησαν διὰ πρώτην φοράν, ἐξ ὅσων γνωρίζομεν, ἀπὸ τὸν Πυθαγόραν. Εἰς αὐτὸν πράγματι ὀφείλεται ἡ διαίρεσις τῶν μαθηματικῶν εἰς τέσσαρας κλάδους: Ἀριθμητική, Μουσική, Γεωμετρία, Ἀστρονομία· ἐθεωρήθη δὲ ἡ ἐν λόγῳ διαίρεσις τόσον ἱκανοποιητική, ὥστε οἱ ἀνωτέρω κλάδοι παρέμειναν εἰς τὸ ἐκπαιδευτικὸν πρόγραμμα ὅλων τῶν σχολείων τοῦ Μεσαίωνος, τὸ περιώνυμον «quadrivium». Εἰς αὐτὸν ἀνήκει ἐξ ἄλλου ὁ ὁρισμὸς τοῦ σημείου ὡς «μονάδος ἐχούσης θέσιν», εἰς αὐτὸν ἡ διάκρισις τῶν εὐθυγράμμων γωνιῶν εἰς τρεῖς κατηγορίας (ὀξείας, ὀρθὰς καὶ ἀμβλείας). Εἰς αὐτὸν ἡ γεωμετρικὴ ἔννοια τοῦ διαστήματος ὡς ὀντότητος συνεχοῦς, ἀπεριορίστου, ὁμογενοῦς. Μὲ τὰς ἐννοίας αὐτὰς συνδέονται μερικοὶ φανταστικοὶ παραλληλισμοὶ σχημάτων καὶ θεοτήτων, τῶν ὁποίων δὲν δύναται ν' ἀποκλεισθῇ ἡ ἀνατολικὴ προέλευσις. Σήμερον ἠμπορεῖ ἰδέαι τοιαύτης φύσεως νὰ φαίνωνται ὡς φαντασιοπληξίαι ἀνισορρόπων ἐγκεφάλων, ἀλλὰ οἱ Πυθαγόρειοι καλύπτοντες ὑπὸ τὴν σημαίαν τῆς «μυστικῆς γεωμετρίας» τοὺς καρποὺς τῆς καθαρᾶς ἐπιστημονικῆς ἐρεύνης, διηυκόλυνον τοιουτοτρόπως τὴν διάδοσιν αὐτῶν, ἀκόμη καὶ μεταξὺ ἐκείνων, οἱ ὁποῖοι δὲν θὰ ἦσαν εἰς θέσιν νὰ ἐκτιμήσουν τὴν ἀξίαν μιᾶς ἐπιστήμης, εὑρισκομένης τότε εἰς τὰ σπάργανα.

Σημασίαν κατὰ πολὺ ἀνωτέραν ἔχουν αἱ ἔρευναι τῶν Πυθαγορείων ἐπὶ τῶν ἀναλογιῶν : ἀριθμητικῆς, γεωμετρικῆς καὶ ἁρμονικῆς, αἱ ὁποῖαι προκύπτουν ἂν θέσωμεν τὸν λόγον

$$\frac{a-b}{b-c}$$

ἴσον διαδοχικῶς πρὸς τοὺς τρεῖς λόγους: $\frac{a}{a}$, $\frac{a}{b}$, $\frac{a}{c}$. ὅτε, σημειωτέον, προκύπτουν ἀντιστοίχως αἱ ἰσοδύναμοι σχέσεις :

$$b=\frac{a+c}{2} \qquad \text{(μέσος ἀριθμητικός)}$$

$$b=\sqrt{ac} \qquad \text{(μέσος γεωμετρικός)}$$

$$b=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right) \qquad \text{(μέσος ἁρμονικός).}$$

Ὅτι εἰς τοιαύτας μελέτας ὡδηγήθη ὁ Πυθαγόρας ἀπὸ τὴν τελειοτέραν ἀναλογίαν

$$a:\frac{a+b}{2}=\frac{2ab}{a+b}:b,$$

τὴν ὁποίαν λέγεται, ὅτι οὗτος ἔμαθεν ἀπὸ τοὺς Βαβυλωνίους, εἶναι δυνατόν, ἀλλ' ὄχι βέβαιον. Ἀντιθέτως εἶναι ἐκτὸς πάσης ἀμφιβολίας, ὅτι εἰς τὴν Σχολὴν ἐξητάσθησαν ἀποκλειστικῶς αἱ ἀναλογίαι μεταξὺ ἀκεραίων ἀριθμῶν, ὅπως θὰ ἴδωμεν ὅτι ἔκαμεν ἀργότερα ὁ Εὐκλείδης εἰς τὸ VII βιβλίον τῶν Στοιχείων του, ἐμπνεόμενος ἀκριβῶς ἀπὸ ἕνα κλασικὸν παράδειγμα.

Εἰς τοὺς Πυθαγορείους ἀποδίδεται ἡ γνῶσις τοῦ γεγονότος ὅτι τὰ ἰσόπλευρα τρίγωνα, τὰ τετράγωνα καὶ τὰ κανονικὰ ἑξάγωνα εἶναι τὰ μόνα κανονικὰ σχήματα, μὲ τὰ ὁποῖα δυνάμεθα νὰ καλύψωμεν πλήρως μίαν ἐπίπεδον ἐπιφάνειαν. Εἰς αὐτοὺς ἀποδίδεται ἐπίσης ἡ ἀνακάλυψις τῶν πέντε κυρτῶν κανονικῶν στερεῶν, τὰ ὁποῖα ὠνόμασαν οἱ ἴδιοι «κοσμικὰ στερεά», διότι, ἐμπνεόμενοι ἀπὸ τὸν προσφιλῆ εἰς αὐτοὺς μυστικισμόν, ἔδωσαν εἰς τὸ τετράεδρον, τὸν κύβον (ἑξάεδρον), τὸ ὀκτάεδρον καὶ τὸ εἰκοσάεδρον τὴν σημασίαν νὰ παριστάνουν ἀντιστοίχως τὸ πῦρ, τὴν γῆν, τὸν ἀέρα, καὶ τὸ ὕδωρ, ἐπιφυλάσσοντες εἰς τὸ δωδεκάεδρον τὸν ρόλον νὰ παριστᾷ ὁλόκληρον τὸν Κόσμον.

Πρέπει νὰ σημειωθῇ ὅτι τὰ τρία ἁπλούστερα ἐκ τῶν στερεῶν τούτων ἦσαν χωρὶς ἀμφιβολίαν γνωστὰ πολὺ προηγουμένως, τὸ δὲ δωδεκάεδρον ἦτο πιθανῶς γνωστὸν ἐπίσης εἰς τοὺς Ἐτρούσκους, μὲ τοὺς ὁποίους εἰκάζεται ὅτι εἶχε σχέσεις ὁ Πυθαγόρας κατὰ τὴν ἄφιξίν του εἰς Ἰταλίαν.

Ἡ κατασκευὴ τοῦ κανονικοῦ δωδεκαέδρου καὶ τοῦ κανονικοῦ εἰκο-

σαέδρου ἀπαιτοῦν τὴν γνῶσιν τῆς κατασκευῆς τοῦ κανονικοῦ πενταγώνου, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον δὲν ὑπερβαίνει τὰ ὅρια τῶν ὅσων ἐγνώριζον ἤδη οἱ μαθηταὶ τῆς Σχολῆς τοῦ Κρότωνος. Εἶναι μάλιστα ἀληθὲς ὅτι οἱ Πυθαγόρειοι ἐγνώριζον τόσον καλῶς τὸ σχῆμα τοῦτο, ὥστε εἶχον θεσπίσει ὡς συνθηματικὸν σημεῖον ἀμοιβαίας ἀναγνωρίσεως τὸ ἀστεροειδὲς πεντάγωνον, τὸ ἄλλως λεγόμενον ὑπό τινων καὶ π ε ν τ ά γ ρ α μ μ α ἢ π ε ν τ ά λ φ α (P. Kircher : Ἀριθμολογία, Ρώμη, 1665) *.

Ἐξ ἄλλου τὸ πρόβλημα τῆς κατασκευῆς κανονικοῦ πενταγώνου ἰσοδυναμεῖ κατὰ βάθος πρὸς τὴν διαίρεσιν εὐθυγράμμου τμήματος εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον, ἤτοι πρὸς τὸ οὕτω καλούμενον «πρόβλημα τῆς χρυσῆς τομῆς», τὸ ὁποῖον εἶναι μερικὴ περίπτωσις τῆς γεωμετρικῆς κατασκευῆς τῶν ριζῶν τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως. Κατὰ τὸν Πρόκλον[11], ἡ λύσις τοῦ θεμελιώδους αὐτοῦ προβλήματος ἀποτελεῖ ἕνα ἀπὸ τὰ ἐξοχώτερα ἐπιτεύγματα τῆς Πυθαγορείου Σχολῆς. Τὸ πρόβλημα διεκρίνετο ἀπὸ τοὺς ἀρχαίους εἰς τρεῖς μερικὰς περιπτώσεις, ποὺ ἐκαλοῦντο ἀντιστοίχως, «ἁπλῆ παραβολή», «ὑπερβολικὴ παραβολή», «ἐλλειπτικὴ παραβολή», ἢ συντομώτερα «παραβολή», «ὑπερβολή», «ἔλλειψις», ὀνόματα χρησιμοποιηθέντα βραδύτερον διὰ τὴν ὀνομασίαν τῶν τριῶν κωνικῶν τομῶν[12].

Ἡ ἁπλῆ παραβολὴ ἔχει ὡς σκοπὸν νὰ κατασκευάσῃ ἐπὶ βάσεως δοθείσης a ἕνα ὀρθογώνιον δοθέντος ἐμβαδοῦ b^2. Ἐὰν εἶναι x ἡ ἄλλη πλευρὰ τοῦ ὀρθογωνίου, αὕτη πρέπει προφανῶς νὰ πληροῖ τὴν σχέσιν

$$a x = b^2 \qquad (\alpha)$$

Ἡ ὑπερβολικὴ παραβολὴ συνίσταται εἰς τὴν κατασκευὴν ἐπὶ δοθείσης βάσεως a, καταλλήλως προεκτεινομένης, ἕνα ὀρθογώνιον δοθέντος ἐμβαδοῦ b^2 καὶ ὕψους ἴσου πρὸς τὴν κατάλληλον προέκτασιν τῆς a. Ἐὰν εἶναι x ἡ ἐν λόγῳ προέκτασις, αὕτη δέον νὰ πληροῖ τὴν σχέσιν :

$$x(a + x) = b^2 \qquad (\beta)$$

Τέλος ἡ ἐλλειπτικὴ παραβολὴ συνίσταται εἰς τὴν κατασκευὴν ἐπὶ δοθείσης βάσεως a, καταλλήλως μειουμένης, ἕνα ὀρθογώνιον δοθέντος ἐμβαδοῦ b^2 καὶ ὕψους ἴσου πρὸς τὴν κατάλληλον μείωσιν τῆς a. Τὸ ζητούμενον μέγεθος x θὰ ἱκανοποιῇ τώρα τὴν σχέσιν :

$$x(a - x) = b^2 \qquad (\gamma)$$

Παρατηρητέον ὅτι εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν $b = a$, ἔχομεν τὸ πρόβλημα τῆς διαιρέσεως εὐθείας εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον (χρυσὴ τομή).

---

* Ἀκολουθοῦντες τὸ παράδειγμα τῶν Πυθαγορείων, τὰ μέλη μιᾶς μαθηματικῆς ἀμερικανικῆς ἑταιρείας τῶν ἡμερῶν μας, ἐξέλεξαν ὡς σύμβολον ἀναγνωρίσεως τὸ σχῆμα τοῦτο (The American mathem., monthly, June, 1958).

Αἱ λύσεις αἱ δοθεῖσαι ὑπὸ τῶν Πυθαγορείων εἰς τὰ ἀνωτέρω προβλήματα εἰκάζεται ὅτι συμπίπτουν πρὸς τὰς ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου παρεχομένας εἰς τὰ Στοιχεῖα [13].

24. Εἰς τοὺς Πυθαγορείους ἦτο γνωστὴ ἡ ἰδιότης, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν παντὸς τριγώνου εἶναι δύο ὀρθαί, ὡς καὶ ἡ ἀπόδειξίς της. Εἰς αὐτοὺς ἀποδίδεται ἐπίσης, ἐξ ὅλων τῶν ἱστορικῶν μαρτυριῶν, ἡ ἀνακάλυψις καὶ ἡ ἀπόδειξις τῆς ἰδιότητος, ἡ ὁποία χαρακτηρίζει τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον* καὶ ἡ ὁποία διὰ τοῦτο ὠνομάσθη «Πυθαγόρειον θεώρημα»: «ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις» (Εὐκλείδου I, 47). Μία πρότασις, ποὺ θεωρεῖται εὐλόγως ἀπὸ τὰς σημαντικωτέρας, ἐξ ὅσων ἀπαντῶνται εἰς τὴν μαθηματικὴν ἐπιστήμην.

Μὲ τὸ θεμελιῶδες αὐτὸ θεώρημα συνδέεται ἀναποσπάστως ἡ ἀνακάλυψις τῶν ἀσυμμέτρων μεγεθῶν, ἡ ὁποία ὀφείλεται ἐπίσης εἰς τοὺς Πυθαγορείους. Ἡ ἔννοια πράγματι τῶν ἀσυμμέτρων μεγεθῶν ἐμφανίζεται εἰς τὸ κλασσικὸν παράδειγμα τῆς συγκρίσεως διαγωνίου καὶ πλευρᾶς ἑνὸς τετραγώνου δι' ἐφαρμογῆς τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος εἰς ἕνα ἐκ τῶν δύο ἴσων ὀρθογωνίων καὶ ἰσοσκελῶν τριγώνων, εἰς τὰ ὁποῖα τὸ τετράγωνον χωρίζεται ὑπὸ τῆς διαγωνίου [15].

Περιττὸν εἶναι νὰ ἐπιμείνωμεν ἐπὶ τῆς ἐξαιρετικῆς σπουδαιότητος τῆς ἀνακαλύψεως ταύτης τόσον ἀπὸ θεωρητικῆς, ὅσον καὶ ἀπὸ πρακτικῆς ἀπόψεως. Δὲν δυνάμεθα ὅμως παρὰ νὰ θρηνήσωμεν, διότι πυκνὸν σκότος ἐκάλυψε τὸν δρόμον, ὁ ὁποῖος ὡδήγησεν εἰς τὰς νέας μαθηματικὰς ὀντότητας καὶ εἰς τὰς χαρακτηριστικάς των ἰδιότητας. Ὡς πρὸς τὸ τελευταῖον τοῦτο εἰκάζεται ὅτι τὰ ἀσύμμετρα μεγέθη καθωρίσθησαν μέσῳ ἀρνητικῶν χαρακτήρων· εἰκάζεται δὲ τοῦτο εἴτε ἐπὶ τῇ βάσει συμφυῶν σκέψεων, εἴτε ἐξ ὅσων μανθάνομεν ἀπὸ τὴν ἀρχαιοτέραν ἐν προκειμένῳ πηγήν. Ἐννοοῦμεν τὴν ἀπόδειξιν τῆς προτάσεως, ὅτι «ἡ διαγώνιος τοῦ τετραγώνου εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν πλευράν του», τὴν ὁποίαν ἀναφέρει ὁ Ἀριστοτέλης, χωρὶς βεβαίως νὰ τὴν ἔχῃ ὁ ἴδιος ἐπινοήσει [16]. Εἰς σύγχρονον γλῶσσαν ἡ ἀπόδειξις δύναται νὰ συνοψισθῇ ὡς ἑξῆς: Ἡ $\sqrt{2}$ δὲν δύναται νὰ εἶναι ἀριθμὸς ἀκέραιος ἀφοῦ μεταξὺ 1 καὶ 4 δὲν ὑπάρχει κανένα τέλειον τετράγωνον. Ἄς ὑποθέσωμεν λοιπὸν ὅτι ὑπάρχει κλασματικὸς ἀριθμὸς (ἤ, ὅπερ

---

* Κατὰ τὴν γνώμην μας ἡ πλέον πιθανὴ ἀπόδειξις τῶν πυθαγορείων εἶναι ἡ στηριζομένη ἐπὶ τῆς ὁμοιότητος τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου πρὸς τὰ δύο ἄλλα ποὺ γεννῶνται, ἂν φέρωμεν τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου. Μὲ μίαν εὔκολον τροποποίησιν ταυτίζεται πρὸς τὴν ἀπόδειξιν, τὴν ὁποίαν παρέχει ὁ Εὐκλείδης εἰς τὰ Στοιχεῖα [14].

τὸ αὐτό, σύμμετρος, ρητὸς) p/q, τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι p, q ὑποτίθενται ἀκέραιοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Θὰ ἔχωμεν τότε $p^2 = 2 . q^2$. Τοῦτο δεικνύει ὅτι τὸ p διαιρεῖται διὰ τοῦ 2 (ἀφοῦ τὸ p^2 εἶναι ἄρτιος). Θέτομεν λοιπὸν $p = 2p'$ καὶ ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν προηγουμένην σχέσιν, ὅτε εὑρίσκομεν $q^2 = 2p'^2$. Ἀλλ' ἐκ τῆς σχέσεως ταύτης συνάγεται, διὰ τοὺς ἰδίους λόγους, ὅτι τὸ q εἶναι ἐπίσης ἄρτιος. Ἀλλὰ τοῦτο ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν, ὅτι οἱ p καὶ q εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Εἶναι λοιπὸν ἄτοπος ἡ ὑπόθεσις ὅτι ἡ $\sqrt{2}$ εἶναι ἀριθμὸς ρητός.

Παρόμοιος συλλογισμὸς εἶναι ἐφαρμόσιμος ἐπίσης διὰ τὴν ἀπόδειξιν ὅτι καὶ οἱ ἀριθμοὶ $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$.......εἶναι ἀσύμμετροι, πιθανῶς δὲ ἐχρησιμοποίησε τοῦτον ἀργότερα ὁ διδάσκαλος τοῦ Πλάτωνος Θεόδωρος ὁ Κυρηναῖος, διὰ ν' ἀποδείξῃ ὅτι ὅλα τὰ μεγέθη τοῦ τύπου τούτου μέχρι τῆς $\sqrt{17}$ συμπεριλαμβανομένης εἶναι ἀσύμμετρα, πλὴν τῶν $\sqrt{4}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{16}$ [17].

Ἔπειτα ἀπὸ ὅσα ἐλέχθησαν δύναται κανεὶς νὰ συμπεράνῃ ὅτι εἰς τὸν Πυθαγόραν δὲν ἀπαντᾶται ἕνα ἀκατάστατον συνονθύλευμα προτάσεων, ἀγνώστου προελεύσεως, ἀλλὰ γραμμαὶ διαυγεῖς καὶ ἀσφαλεῖς μιᾶς ἐπιστήμης μὲ πρόγραμμα ἐντελῶς καθωρισμένον, μὲ ἀντικείμενα τελείως ὡρισμένα καὶ μὲ μέθοδον συνοδευομένην ἀπὸ λογικὴν ἄψογον. Πρόκειται λοιπὸν δι' ἕνα σύστημα γνώσεων, τὸ ὁποῖον ἔχει ὅλα τὰ χαρακτηριστικὰ γνωρίσματα τῆς συγχρόνου μαθηματικῆς ἐπιστήμης. Εἰς τὸν Πυθαγόραν λοιπὸν ἀνήκει κατ' ἀδιαφιλονίκητον δικαίωμα, ὁ τίτλος τοῦ γενάρχου τῆς εὐγενοῦς οἰκογενείας τῶν μαθηματικῶν, ἡ ὁποία πληθύνεται συνεχῶς ἐπὶ εἴκοσι τώρα αἰῶνας καὶ ἡ ὁποία, ὅπως φανερώνουν τὰ πράγματα, δὲν πρόκειται νὰ παύσῃ ἀεὶ πληθυνομένη καὶ εἰς τὸ μέλλον.

25. Πρέπει νὰ ἐγγράψωμεν εἰς τὴν κατηγορίαν τῶν διαδόχων καὶ συνεχιστῶν τοῦ Πυθαγόρου τὸν Οἰνοπίδην τὸν Χῖον, ὁ ὁποῖος ἐπέρασεν εἰς τὴν ἱστορίαν ἐπειδὴ ἐδίδαξε πρῶτος τὴν κατασκευὴν καθέτου ἐπὶ εὐθεῖαν ἐκ σημείου ἐκτὸς αὐτῆς, ὡς καὶ τὴν ἐπὶ δεδομένης πλευρᾶς καὶ κορυφῆς κατασκευὴν γωνίας δοθέντος μεγέθους; Θὰ ἦτο ἴσως δυνατόν, ἀλλὰ τὸ πρᾶγμα εἶναι ἐν πρώτοις ἀβέβαιον καὶ ἔπειτα εἶναι τοῦτο δευτερευούσης σημασίας, ὡς εἶναι πράγματι καὶ ἡ προσωπικότης τοῦ Οἰνοπίδου.

Πολὺ σημαντικώτερον εἶναι τὸ ἔργον ἑνὸς ἄλλου μαθηματικοῦ, ἀνήκοντος εἰς τὸ δεύτερον ἥμισυ τοῦ V αἰῶνος π. Χ., τὸν ὁποῖον θεωροῦν ὅλοι ὁμοφώνως ὡς ὑστερότερον ὀπαδὸν τοῦ μεγάλου φιλοσόφου τῆς Σάμου. Ὁ μαθηματικὸς οὗτος εἶναι ὁ Ἱπποκράτης ὁ Χῖος, σύγχρονος τοῦ Οἰνοπίδου, γεννηθεὶς κατὰ τὸ 470 π.Χ., ὅστις δὲν πρέπει νὰ συγχέεται μὲ τὸν ὁμώνυμον διάσημον ἰατρόν, γεννηθέντα εἰς τὴν νῆσον Κῶ.

Ὁ Ἀριστοτέλης ἀναφέρει τὸν Ἱπποκράτην τὸν Χῖον, ὡς παράδειγμα προσώπου μὲ μονόπλευρον διάνοιαν, διότι ἐνῷ διέπρεψεν ὡς διανοούμενος,

ἔπεσε θῦμα ἀπάτης ἐξ ἀφελείας του, ἀπὸ αἰσχροκερδεῖς ἐμπόρους. Εἰς αὐτὸν ἀποδίδεται ἡ τιμὴ ὅτι εἶναι ὁ πρῶτος συγγράψας βιβλίον γεωμετρίας. Ἂν καὶ ἐκ τοῦ βιβλίου τούτου δὲν σώζεται οὔτε τὸ παραμικρὸν ἴχνος, πάντως ἡ ἐμφάνισις ἑνὸς ἔργου τοῦ εἴδους τούτου, χαρακτηρίζεται ὡς σύμπτωμα ἀξιολόγου βαθμοῦ ἀναπτύξεως τοῦ κλάδου εἰς τὸν ὁποῖον ἀναφέρεται. Πιθανώτατα εἰς τὸ ἔργον ἐκεῖνο ἐξετίθετο μὲ γενικοὺς ὅρους ἡ μέθοδος ἀναγωγῆς ἑνὸς προβλήματος εἰς ἄλλο, ἡ ὁποία ἀποδίδεται εἰς τὸν Ἱπποκράτην, μολονότι δὲν ἀποκλείεται τὸ ἐνδεχόμενον ὅτι καὶ ἄλλοι, πρὸ καὶ ἀνεξαρτήτως αὐτοῦ, τὴν εἶχον χρησιμοποιήσει εἰς τινα μερικὴν περίπτωσιν.

Μὲ τὸν Ἱπποκράτην κάνουν τὴν εἴσοδόν των εἰς τὴν ἑλληνικὴν ἱστορίαν δύο ἀπὸ τὰ ἐνδοξότερα προβλήματα, ἐξ ὅσων ἀπαντῶνται εἰς τὰ μαθηματικὰ ὅλων τῶν ἐποχῶν: Ὁ «διπλασιασμὸς τοῦ κύβου» καὶ ὁ «τετραγωνισμὸς τοῦ κύκλου».

Τὸ πρῶτον ἀπέκτησεν ὑπέρμετρον δημοσιότητα, ὅταν εἰς μίαν ἀρχαίαν τραγῳδίαν παρεστάθη κάποιος θρυλικὸς βασιλεὺς τῆς Κρήτης θρηνολογῶν, διότι τὸ κενοτάφιον ποὺ προωρίζετο διὰ τὸν υἱόν του ἦτο πολὺ μικρὸν δι' ἕνα βασιλικὸν μνημεῖον, καὶ ἀπαιτῶν νὰ διπλασιασθῇ εἰς ὄγκον, μὲ διατήρησιν ὅμως τοῦ κυβικοῦ σχήματός του. Ἡ διασημότης ὅμως τοῦ προβλήματος ἔλαβε τεραστίας διατάσεις, ὅταν, ἐρωτηθέντος τοῦ μαντείου ὑπὸ τῶν κατοίκων τῆς Δήλου, περὶ τοῦ πρακτέου, πρὸς κατάπαυσιν τοῦ μαστίζοντος τὴν νῆσον λοιμοῦ, ἐδόθη ἡ ἀπόκρισις, ὅτι ἔπρεπε νὰ διπλασιάσουν κάποιον κυβικὸν βωμόν. Ἐντεῦθεν προῆλθεν τὸ ὄνομα «Δήλιον πρόβλημα», ποὺ φέρει μέχρι σήμερον.

Εἶναι ἄξιον παρατηρήσεως ὅτι ἀκόμη καὶ χωρὶς ν' ἀνατρέξωμεν εἰς τοιαύτας περιπτώσεις τυχαίας καὶ ἴσως φανταστικάς, τὸ πρόβλημα προβάλλεται αὐτομάτως εἰς τοὺς γεωμέτρας ὡς τὸ ἀνάλογον, εἰς τὸν χῶρον, πρὸς τὸ πρόβλημα τοῦ «διπλασιασμοῦ τοῦ τετραγώνου». Μὲ τὴν διαφορὰν ὅτι ἐνῷ τὸ τελευταῖον λύεται εὐκολώτατα μὲ τὸ Πυθαγόρειον θεώρημα, ἐφαρμοζόμενον εἰς ἕνα ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνον, δὲν ὑπάρχει στοιχειῶδες γεωμετρικὸν θεώρημα, παρέχον γεωμετρικὴν λύσιν διὰ τὴν ἀνάλογον ἐξίσωσιν:

$$x^3 = 2 \cdot a^3. \tag{1}$$

Εἰς τὸν Ἱπποκράτην ἀποδίδεται μία μεταμόρφωσις τοῦ προβλήματος τῆς Δήλου, ἡ ὁποία εἶναι καρπὸς τῆς μεθόδου ἀναγωγῆς, περὶ τῆς ὁποίας ὡμιλήσαμεν ἀνωτέρω. Παρετήρησε δηλαδὴ ὁ Ἱπποκράτης ὅτι θὰ δυνηθῶμεν νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν (1), ὅταν κατορθώσωμεν νὰ παρεμβάλωμεν δύο μέσας ἀναλόγους μεταξὺ τῶν μεγεθῶν a καὶ $a\sqrt{2}$, ἀφοῦ ἐκ τῶν ἰσοτήτων:

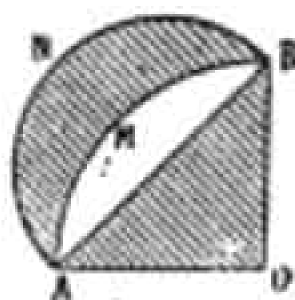
$$\frac{a}{y} = \frac{y}{x} = \frac{x}{a\sqrt{2}} \tag{2}$$

προκύπτουν αἱ σχέσεις :

$$ax = y^2$$
$$ay\sqrt{2} = x^2 \qquad (3)$$

καὶ τελικῶς $x^3 = 2a^3$. Τὸ προτεινόμενον πρόβλημα ἀνάγεται τοιουτοτρόπως εἰς ἄλλο οὐχὶ μικροτέρας δυσκολίας. Ἀλλά, ὅπως θὰ ἴδωμεν, ἡ ὡς ἄνω ἀναγωγὴ τοῦ προβλήματος ὑπῆρξε γόνιμος εἰς συνεπείας, ἐκ τῶν ὁποίων τὰ μέγιστα ὠφελήθη ἡ γεωμετρία [18].

Δὲν εἶναι μικροτέρας ἀξίας αἱ συμβολαὶ τοῦ Ἱπποκράτους εἰς τὴν λύσιν τοῦ ἄλλου προβλήματος, τουτέστι τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου. Ἔλαβε δὲ τὴν ὤθησιν ἐκ τῆς ἀκολούθου παρατηρήσεως : Ἐὰν (σχ. 2) ΟΑΒ εἶναι ἕνα ὀρθογώνιον ἰσοσκελὲς τρίγωνον καὶ γράψωμεν τὸ τεταρτοκύκλιον ΟΑΜΒ καὶ τὴν ἡμιπεριφέρειαν ΑΝΒ προκύπτουν δύο κυκλικὰ τόξα περιορίζοντα ἕνα σχῆμα, ποὺ ὀνομάζεται μ η ν ί σ κ ο ς, καὶ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ τρίγωνον ΟΑΒ. Πράγματι, ὁ ἐν λόγῳ μηνίσκος προκύπτει, ἂν εἰς τὸ τρίγωνον ΟΑΒ προσθέσωμεν τὸ ἡμικύκλιον ΑΝΒ καὶ ἀφαιρέσωμεν κατόπιν τὸ τεταρτοκύκλιον ΟΑΜΒ. Ἀλλὰ τὸ τεταρτοκύκλιον τοῦτο καὶ τὸ ἡμικύκλιον ΑΝΒ εἶναι ἰσοδύναμα, ὡς εὐκόλως ἀποδεικνύεται. Ἑπομένως ὁ μηνίσκος εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὸ τρίγωνον καὶ κατὰ συνέπειαν τετραγωνίζεται.



Σχ. 2

Ἀναχωρῶν ἀπὸ τὸ συμπέρασμα τοῦτο ὁ Ἱπποκράτης ἠρεύνησε καὶ ἀνεκάλυψεν ἄλλα σχήματα παρόμοια, ἐπακριβῶς τετραγωνίσιμα, διὰ νὰ μὴ εἴπωμεν, ὡς ὑπεστηρίχθη ἐπὶ τῶν ἡμερῶν μας, ὅτι εὗρεν ὅ λ α ὅσα ἔχουν πράγματι αὐτὴν τὴν ἀξιόλογον ἰδιότητα.

Δὲν ὑπάρχει ἀμφιβολία ὅτι εἰς τὰς πρωτοτύπους αὐτὰς ἐρεύνας ὠθήθη ὁ Ἱπποκράτης ἀπὸ τὸν πόθον τῆς ἀνακαλύψεως ἑνὸς μηνίσκου τετραγωνισίμου, ὁ ὁποῖος ν' ἀποτελῇ ρητὸν τμῆμα ὁλοκλήρου τοῦ κύκλου. Διότι εὑρισκομένου τοιούτου μηνίσκου, τὸ ἐπίμαχον πρόβλημα θὰ εὕρισκεν αὐτομάτως τὴν λύσιν του.

Ἀπὸ μερικοὺς ὑπομνηματιστὰς τῶν ἀνακαλύψεών του βεβαιοῦται ὅτι ὁ Ἱπποκράτης ἐπλανήθη, πιστεύων ὅτι ἐπέτυχε τὸν σκοπόν. Ἀλλὰ τὰ ἐπιζήσαντα τεμάχια τῶν γραπτῶν του, διατηρηθέντα ἀπὸ τὸν Σιμπλίκιον καὶ ἀποτελοῦντα τὸ πρῶτον γραπτὸν μνημεῖον, ποὺ κατέχομεν σήμερον σχετικῶς πρὸς τὰ ἑλληνικὰ μαθηματικά, περιελθόντα δὲ εἰς ἡμᾶς ἔπειτα ἀπὸ ἀλλεπαλλήλους φθορὰς καὶ ἀκρωτηριασμοὺς ἐκ μέρους τῶν ἀντιγραφέων καὶ τῶν σχολιαστῶν, θὰ ἔπρεπε μᾶλλον νὰ μᾶς ὁδηγήσουν εἰς συγχώρησιν τῆς πλάνης τοῦ συγγραφέως, παρὰ εἰς διατύπωσιν ὁριστικῆς καταδίκης.

Ἐν πάσῃ περιπτώσει τὸ πρόβλημα τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου

ὑπῆρξεν ὁ τάφος τόσων ὑπολήψεων, ὥστε δὲν δύναται ν' ἀποκλεισθῇ τὸ ἐνδεχόμενον ὅτι καὶ ἐκείνη τοῦ Ἱπποκράτους συνετρίβη ἐπὶ ἑνὸς τόσον ἐπικινδύνου σκοπέλου. Ἀλλ' ἀκόμη καὶ ἂν οὗτος δὲν ἠδυνήθη ν' ἀποφύγῃ αὐτὴν τὴν ἀτυχίαν, ἡ ἱστορία θὰ ἐξηκολούθη ν' ἀναγράφῃ τὸ ὄνομά του μεταξὺ τῶν εὐγενῶν ἐκείνων ἀνθρώπων, οἱ ὁποῖοι ἐπλούτισαν τὴν γεωμετρικήν μας κληρονομίαν μὲ γραπτά, μὲ μεθόδους καὶ μὲ ἐπιτεύγματα ἄξια τῆς μεγαλυτέρας ἐκτιμήσεως.

26. Εἶναι βέβαιον ὅτι ἀναμφισβήτητα ἐπίσης δικαιώματα εἰς τὸν θαυμασμόν μας, ὄχι ὀλιγώτερα τοῦ Ἱπποκράτους, κατέχει ὁ Ἀρχύτας ὁ Ταραντῖνος (428 - 365 π.Χ.), ὁ τελευταῖος τῶν Πυθαγορείων (ultimus Pithagoreorum), ὁ ὁποῖος ὑπὸ τῶν συγχρόνων, ἀλλὰ καὶ τῶν ἀμέσως μεταγενεστέρων των, περιγράφεται ὡς ὁ ἰδεώδης τύπος τοῦ ἑλληνικοῦ ἀνθρώπου ἐν μέσῳ μιᾶς ἐκφυλισθείσης γενεᾶς. Στρατηγὸς συγκρίσιμος πρὸς τοὺς μεγίστους, οὐδέποτε ὑπέστη τὸ ὄνειδος τῆς ἥττης, φιλόσοφος καὶ ἠθικολόγος ἐπιφανής, εἶχε τὴν δόξαν νὰ ἴδῃ τὸν Πλάτωνα μεταξὺ τῶν πολυαρίθμων ἄλλων μαθητῶν του. Ἄριστος ἐργάτης τῆς Ἀστρονομίας καὶ τῆς Μηχανικῆς, ἐθαυμάζετο ἀπὸ τὸν Ὁράτιον, ὁ ὁποῖος δὲν παρέλειψε νὰ μνημονεύσῃ εἰς στίχους τὸ τραγικόν του τέλος κατὰ τὴν διάρκειαν ἑνὸς ναυαγίου εἰς τὴν Ἀδριατικὴν θάλασσαν :

«Ἀρχύτα, ἐσύ, ποὺ νὰ μετρᾷς τὴ γῆ,
τὴ θάλασσα νογᾶς, τὴν ἄπειρη ἄμμο,
λίγη μονάχα σκόνη
κοντὰ στὸ Λίντο - Μαρτίνο τώρα ἐσὺ κρατᾶς·
οὔτε ὠφελήθηκες, γιὰ νὰ σωθῇς, ἀπὸ τὴ γῆ
τὰ ἄστρα ἀκολουθῶντας, στὸν Πόλο ν' ἀνεβῇς».

(Ὠδὴ 28η τοῦ Ι Βιβλίου)

Εἰς τὴν ἱστορίαν τῶν μαθηματικῶν τὰ ἴχνη του παρέμειναν ἀπὸ μίαν πνευματώδη λύσιν, ποὺ ἔδωσεν εἰς τὸ πρόβλημα τοῦ διπλασιασμοῦ τοῦ κύβου, στηριζόμενος εἰς τὴν μέθοδον τῆς ἀναγωγῆς τοῦ Ἱπποκράτους, διὰ τῆς παρεμβολῆς δύο μέσων ἀναλόγων μεταξὺ δύο δοθέντων μηκῶν. Διὰ νὰ χαρακτηρίσωμεν τὴν μέθοδον ποὺ ἐπενόησεν ὁ Ἀρχύτας, ἂς θεωρήσωμεν τὰς κατωτέρω ἐπιφανείας, αἱ ὁποῖαι εἰς ὀρθογωνίους καρτεσιανὰς συντεταγμένας παρίστανται ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις :

$$x^2+y^2=ax$$

$$x^2+y^2+z^2=\frac{a^2}{b^2}x^2$$

$$x^2+y^2+z^2=a\sqrt{x^2+y^2}$$

Ἐκ τούτων ἡ πρώτη παριστᾷ ὀρθὸν κυκλικὸν κύλινδρον παρὰ τὸν ἄξονα τῶν z μὲ βάσιν κύκλον διαμέτρου a. Ἡ δευτέρα ὀρθὸν κυκλικὸν κῶνον μὲ κορυφὴν εἰς τὴν ἀρχὴν καὶ ἄξονα τὸν ἄξονα τῶν z. Ἡ τρίτη παριστᾷ ἅμφοισμα γεννώμενον ἐκ τῆς περιφερείας διαμέτρου a, περιστρεφομένης περὶ μίαν ἐφαπτομένην της συμπίπτουσαν μὲ τὸν ἄξονα τῶν z. Ἔστω P ἕνα κοινὸν σημεῖον τῶν ἐπιφανειῶν τούτων — διάφορον τῆς ἀρχῆς — καὶ ἂς θέσωμεν :

$$u = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$
$$v = \sqrt{x^2+y^2}$$

Τότε αἱ προηγούμεναι ἐξισώσεις γράφονται :

$$v^2 = ax, \qquad u = \frac{a}{b}x, \qquad u^2 = av$$

Ἐκ τούτων δὲ λαμβάνομέν :

$$\frac{a}{u} = \frac{u}{v} = \frac{v}{b}.$$

Ἐπειδὴ τώρα ἡ θέσις τοῦ P εἶναι ὡρισμένη, καθορίζονται αἱ δύο μέσαι ἀνάλογοι u, v μεταξὺ τῶν a, b καὶ ἂν συνεπῶς ληφθῇ $b = a\sqrt{2}$, ὁ κύβος διπλασιάζεται. Ἡ ἀνωτέρω μέθοδος, τόσον εὐφυὴς ὑφ' ἣν ἔννοιαν ἐκτίθεται, δὲν ἀποδεικνύει μόνον τὸ ἐφευρετικὸν δαιμόνιον τοῦ Ἀρχύτα καὶ τὴν μεγάλην του οἰκειότητα μὲ τὰ σχήματα τοῦ χώρου, ἀλλὰ ὅταν ἀναλυθῇ εἰς τὰ ἐπὶ μέρους βήματα, μᾶς ὁδηγεῖ ἐπίσης εἰς τὸ νὰ ἐκτιμήσωμεν μὲ ἀκρίβειαν τὰς μεγάλας προόδους, τὰς ὁποίας εἶχεν ἐπιτελέσει εἰς τὴν Ἑλλάδα ἡ γεωμετρία τοῦ ἐπιπέδου καὶ τοῦ χώρου, κατὰ τὸν αἰῶνα ποὺ ἠκολούθησε τὸν θάνατον τοῦ Πυθαγόρου.

Ἐλεᾶται, ἀτομικοί, σοφισταί

27. Ἐδείξαμεν εἰς τὰ προηγούμενα πόσον ἀποτελεσματικὴ ὑπῆρξεν ἡ συμβολὴ εἰς τὴν πρόοδον τῶν ἀκριβῶν ἐπιστημῶν, τῆς Ἰταλικῆς Σχολῆς μέχρι τῶν ἡμερῶν ποὺ ὑφίσταντο ἀκόμη ἴχνη αὐτῆς. Εἶναι ὅμως ἀληθὲς ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ φιλοσοφικαὶ αἱρέσεις, ποὺ ἔβριθον εἰς τὴν Ἀρχαίαν Ἑλλάδα, συνέβαλον κατὰ πολλοὺς καὶ διαφόρους τρόπους εἰς τὴν τελειοποίησίν των.

Οὕτω, ὁ Ζήνων ὁ Ἐλεάτης (495- 435 π.Χ.), ἀνήκων εἰς τὴν Σχολήν, ἡ ὁποία ἀκριβῶς ἐκ τῆς πόλεως ταύτης λαμβάνει τὸ ὄνομά της, συνέδεσε τὸ ὄνομά του μὲ ὡρισμένους συλλογισμούς, σκοπὸς τῶν ὁποίων ἦτο ν' ἀποδειχθῇ τὸ ἀδύνατον τῆς κινήσεως ἢ τῆς πολλαπλότητος καὶ οἱ

Ἐκ τούτων ἡ πρώτη παριστᾷ ὀρθὸν κυκλικὸν κύλινδρον παρὰ τὸν ἄξονα τῶν z μὲ βάσιν κύκλον διαμέτρου a. Ἡ δευτέρα ὀρθὸν κυκλικὸν κῶνον μὲ κορυφὴν εἰς τὴν ἀρχὴν καὶ ἄξονα τὸν ἄξονα τῶν z. Ἡ τρίτη παριστᾷ ἅμφοισμα γεννώμενον ἐκ τῆς περιφερείας διαμέτρου a, περιστρεφομένης περὶ μίαν ἐφαπτομένην της συμπίπτουσαν μὲ τὸν ἄξονα τῶν z. Ἔστω P ἕνα κοινὸν σημεῖον τῶν ἐπιφανειῶν τούτων — διάφορον τῆς ἀρχῆς — καὶ ἄς θέσωμεν :

$$u = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$
$$v = \sqrt{x^2+y^2}$$

Τότε αἱ προηγούμεναι ἐξισώσεις γράφονται :

$$v^2 = ax, \qquad u = \frac{a}{b}x, \qquad u^2 = av$$

Ἐκ τούτων δὲ λαμβάνομεν :

$$\frac{a}{u} = \frac{u}{v} = \frac{v}{b}.$$

Ἐπειδὴ τώρα ἡ θέσις τοῦ P εἶναι ὡρισμένη, καθορίζονται αἱ δύο μέσαι ἀνάλογοι u, v μεταξὺ τῶν a, b καὶ ἂν συνεπῶς ληφθῇ $b = a\sqrt{2}$, ὁ κύβος διπλασιάζεται. Ἡ ἀνωτέρω μέθοδος, τόσον εὐφυὴς ὑφ' ἣν ἔννοιαν ἐκτίθεται, δὲν ἀποδεικνύει μόνον τὸ ἐφευρετικὸν δαιμόνιον τοῦ Ἀρχύτα καὶ τὴν μεγάλην του οἰκειότητα μὲ τὰ σχήματα τοῦ χώρου, ἀλλὰ ὅταν ἀναλυθῇ εἰς τὰ ἐπὶ μέρους βήματα, μᾶς ὁδηγεῖ ἐπίσης εἰς τὸ νὰ ἐκτιμήσωμεν μὲ ἀκρίβειαν τὰς μεγάλας προόδους, τὰς ὁποίας εἶχεν ἐπιτελέσει εἰς τὴν Ἑλλάδα ἡ γεωμετρία τοῦ ἐπιπέδου καὶ τοῦ χώρου, κατὰ τὸν αἰῶνα ποὺ ἠκολούθησε τὸν θάνατον τοῦ Πυθαγόρου.

Ἐλεᾶται, ἀτομικοί, σοφισταί

27. Ἐδείξαμεν εἰς τὰ προηγούμενα πόσον ἀποτελεσματικὴ ὑπῆρξεν ἡ συμβολὴ εἰς τὴν πρόοδον τῶν ἀκριβῶν ἐπιστημῶν, τῆς Ἰταλικῆς Σχολῆς μέχρι τῶν ἡμερῶν ποὺ ὑφίσταντο ἀκόμη ἴχνη αὐτῆς. Εἶναι ὅμως ἀληθὲς ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ φιλοσοφικαὶ αἱρέσεις, ποὺ ἔβριθον εἰς τὴν Ἀρχαίαν Ἑλλάδα, συνέβαλον κατὰ πολλοὺς καὶ διαφόρους τρόπους εἰς τὴν τελειοποίησίν των.

Οὕτω, ὁ Ζήνων ὁ Ἐλεάτης (495- 435 π.Χ.), ἀνήκων εἰς τὴν Σχολήν, ἡ ὁποία ἀκριβῶς ἐκ τῆς πόλεως ταύτης λαμβάνει τὸ ὄνομά της, συνέδεσε τὸ ὄνομά του μὲ ὡρισμένους συλλογισμούς, σκοπὸς τῶν ὁποίων ἦτο ν' ἀποδειχθῇ τὸ ἀδύνατον τῆς κινήσεως ἢ τῆς πολλαπλότητος καὶ οἱ

ὁποῖοι ὅσον καὶ ἂν φαίνωνται εἰς τὴν πραγματικότητα παράδοξοι, συνετέλεσαν μολαταῦτα εἰς τὸ νὰ προσδιορισθοῦν μὲ ἀκρίβειαν μερικαὶ ἀπὸ τὰς θεμελιωδεστέρας ἐννοίας τῶν μαθηματικῶν.

Τὸ γνωστότερον ἀπὸ τὰ ἐπιχειρήματα τοῦ Ζήνωνος εἶναι τὸ ἀκόλουθον ἐναντίον τῆς κινήσεως: «Ὁ ὠκύπους Ἀχιλλεὺς δὲν δύναται νὰ φθάσῃ τὴν βραδυποροῦσαν χελώνην, τὴν ὁποίαν καταδιώκει· διότι οὗτος πρέπει πρῶτα νὰ διατρέξῃ τὸ διάστημα ποὺ τὸν χωρίζει ἀπὸ τὴν νῦν θέσιν τῆς χελώνης, ἔπειτα τὸ διάστημα ποὺ διέτρεξεν ἡ χελώνη κατὰ τὴν πρώτην φάσιν τῆς κινήσεως, κατόπιν τὸ διάστημα ποὺ διατρέχει τὸ ζῷον κατὰ τὴν δευτέραν φάσιν καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς ἐπ' ἄπειρον».

Ἡ ἀντινομία αἴρεται, ἂν παρατηρήσωμεν ὅτι ἕνα πεπερασμένον διάστημα δύναται νὰ χωρισθῇ εἰς ἄπειρα μέρη, ἀπεριορίστως μικρά, ὅπως ἕνα πεπερασμένον χρονικὸν διάστημα δύναται νὰ χωρισθῇ εἰς ἀπειρίαν μερῶν, μερικὰ τῶν ὁποίων νὰ εἶναι ἀπειροστοῦ μήκους. Ἄλλα ἐπιχειρήματα τοῦ Ζήνωνος ἀποδεικνύονται εὐκόλως ὡς ἀβάσιμα, ὅταν γνωρίζωμεν τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ἀθροίσματος μιᾶς φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου, ὅπως π.χ. ὅταν γνωρίζομεν ὅτι:

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots$$

Αἱ ἑρμηνεῖαι, αἱ ὁποῖαι ἐδόθησαν σὺν τῷ χρόνῳ εἰς τὰ σοφίσματα τοῦ Ζήνωνος, ἀποτελοῦν τὸ πρῶτον παράδειγμα μιᾶς γενικῆς διαπιστώσεως, ὅτι εἰς τὰ μαθηματικὰ δὲν δύνανται νὰ ὑπάρχουν ἀντιφάσεις. Ἐκεῖ ὅπου ἐμφανίζεται μία, ἀσφαλῶς ὑπάρχει καὶ μία ἀλήθεια, ἡ ἀνακάλυψις τῆς ὁποίας θὰ θέσῃ τέρμα εἰς τὴν παροδικὴν ἀντιγνωμίαν. Διὰ τοῦτο κάθε παράδοξον ὑπαγορεύει ἕνα πρόβλημα καὶ ὠθεῖ πρὸς τὴν λύσιν του[19].

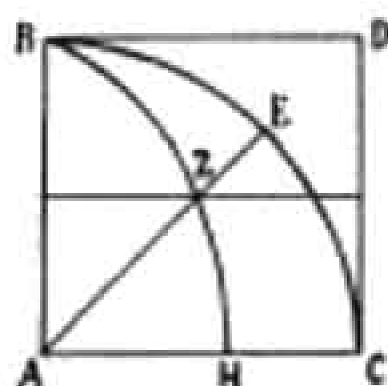
Ὁμοίως ὁ περίφημος φιλόσοφος Ἀναξαγόρας ὁ Κλαζομένιος (500 - 428 π.Χ.), ὁ ὁποῖος ἀφιέρωσε τόσας ἀγρυπνίας εἰς τὴν σπουδὴν φιλοσοφικῶν προβλημάτων, ἀναφέρεται ὡς ἀσχοληθεὶς μὲ τὸν τετραγωνισμὸν τοῦ κύκλου καὶ ὡς τελειοποιήσας τὰς ἐφαρμοζομένας τότε μεθόδους πρὸς χάραξιν τῶν θεατρικῶν σκηνῶν.

Καὶ ὁ γνωστότατος ἀτομικὸς φιλόσοφος Δημόκριτος ὁ Ἀβδηρίτης (460 - 360 π.Χ.) ἔστρεψε τὴν σκέψιν του εἰς γεωμετρικὰ προβλήματα. Ὁ Πλούταρχος τοῦ ἀποδίδει τὴν παρατήρησιν, ὅτι δύο λίαν γειτονικαὶ διατομαὶ ἑνὸς κώνου, παράλληλοι πρὸς τὴν βάσιν του, δὲν δύνανται νὰ γίνουν ἴσαι, παρὰ μόνον ἐὰν ὁ κῶνος μεταβληθῇ εἰς κύλινδρον, ἀλλ' οὔτε καὶ ἄνισοι, διότι τότε ὁ κῶνος θὰ παρουσίαζεν ἀσυνέχειαν καὶ ἀνωμαλίαν.

Ἐξ ἄλλου ὁ σοφιστὴς Βρύσων ὁ Ἡρακλειώτης ὅπως καὶ ὁ σύγχρονός του Ἀντιφῶν ὁ Ἀθηναῖος (περὶ τὸ 420 π.Χ.) κατέ-

βαλον προσπαθείας διὰ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου, αἱ ὁποῖαι ἂν καὶ ὡδήγησαν αὐτοὺς εἰς ἀναμφισβητήτους πλάνας, περὶ τῶν ὁποίων κάμνει μνείαν ὁ Δάντης (Παράδεισος, XIII, 123 - 6)[20] περιέχουν ὅμως ἐντός των ἕνα γόνιμον σπόρον: τὴν χρῆσιν δηλαδὴ τῶν ἐγγεγραμμένων καὶ περιγεγραμμένων πολυγώνων, τῶν ὁποίων ἀργότερον ὁ Ἀρχιμήδης ἔκαμε τόσον γόνιμον καὶ θαυμαστὴν ἐφαρμογήν.

28. Κατὰ πολὺ ἐξοχωτέρα εἶναι ἡ συμβολή, ποὺ ἐδόθη εἰς τὸ αὐτὸ πρόβλημα ἀπὸ ἕνα ἄλλον σοφιστήν, τὸν Ἠλεῖον Ἱππίαν (β' ἥμισυ Ε' αἰῶνος π.Χ.) εἰς τὸν ὁποῖον ἀποδίδεται ἡ ἀνακάλυψις μιᾶς νέας καμπύλης καὶ ἡ ἐφαρμογή της εἰς τὴν λύσιν ὄχι μόνον τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου, ἀλλὰ καὶ εἰς τὴν λύσιν τοῦ τρίτου τῶν διασημοτέρων προβλημάτων τῆς ἀρχαιότητος, τουτέστι τῆς τριχοτομήσεως τῆς γωνίας. Ἡ ἐν λόγῳ καμπύλη, ἡ ὁποία ἐκ τῆς πρώτης ἐφαρμογῆς της ὠνομάσθη τετραγωνίζουσα, προκύπτει ὡς τροχιὰ ἑνὸς κινητοῦ σημείου μετέχοντος συγχρόνως δύο μερικῶν ὁμαλῶν κινήσεων, ὁριζομένων ὡς ἑξῆς: «Ἔστω (σχ. 3) ὅτι δίδεται ἕνα τετράγωνον ABCD, τοῦ ὁποίου ὑποτίθεται ὅτι ἡ πλευρὰ BD κινεῖται ὁμαλῶς καὶ παραλλήλως πρὸς ἑαυτήν, μέχρις ὅτου ἔλθῃ εἰς σύμπτωσιν μὲ τὴν πλευρὰν AC, ἐνῷ εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον ἡ πλευρὰ AB στρέφεται περὶ τὸ A μὲ σταθερὰν γωνιακὴν ταχύτητα μέχρις ὅτου ἔλθῃ ὁμοίως εἰς σύμπτωσιν μὲ τὴν πλευρὰν AC. Αἱ δύο εὐθεῖαι συναντῶνται ἀνὰ πᾶσαν στιγμὴν εἰς ἓν σημεῖον Z, τοῦ ὁποίου γεωμετρικὸς τόπος εἶναι ἡ τετραγωνίζουσα τοῦ Ἱππία».



Σχ. 3

Πρὸς ἐξακρίβωσιν τῆς φύσεως τῆς καμπύλης ταύτης, ἂς λάβωμεν ὡς ἀρχὴν τὸ σημεῖον A καὶ ὡς ἄξονας ὀρθογωνίων συντεταγμένων, τὰς εὐθείας AC καὶ AB. Ὡς ἀπόρροια τῶν ἀνωτέρω ὑποθέσεων ὑφίστανται αἱ ἀκόλουθοι σχέσεις:

$$l - y = \mu t$$

$$\frac{\pi}{2} - \theta = \nu t \qquad (1)$$

ὅπου μ, ν εἶναι σταθεραί, l τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου ABCD, (x, y) αἱ συντεταγμέναι τοῦ Z καὶ θ ἡ γωνία CAZ. Παριστῶντες τώρα διὰ τοῦ T τὸν χρόνον, ὁ ὁποῖος ἀπαιτεῖται ἵνα ἑκάστη εὐθεῖα διαγράψῃ τὸν προκαθορισθέντα δρόμον, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν ἀκόμη τὰς σχέσεις:

$$l = \mu T$$

$$\frac{\pi}{2} = \nu T$$

Ἐκ τούτων τώρα, συνδυαζομένων πρὸς τὰς (1), εὑρίσκομεν :

$$\frac{l-y}{\frac{\pi}{2}-\theta}=\frac{l}{\frac{\pi}{2}}=\frac{y}{\theta}$$

ἢ

$$y=\frac{2l}{\pi}\theta. \tag{2}$$

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι

$$\theta=\text{τοξ εφ}\frac{y}{x},$$

ἡ ἐξίσωσις (2) τρέπεται εἰς τὴν

$$y=\frac{2l}{\pi}\cdot\text{τοξ εφ}\frac{y}{x}, \tag{3}$$

ἥτις παριστᾷ τὴν τετραγωνίζουσαν τοῦ Ἱππία εἰς καρτεσιανὰς συντεταγμένας. Πρόκειται, ὅπως βλέπομεν, περὶ ὑπερβατικῆς καμπύλης, τῆς ὁποίας οἱ ἀρχαῖοι δὲν ἐξήτασαν παρὰ μόνον τὸ τόξον αὐτῆς τὸ περιεχόμενον ἐντὸς τοῦ δοθέντος τετραγώνου.

Διὰ νὰ κατανοήσωμεν τὸν τρόπον ἐφαρμογῆς τῆς καμπύλης (3) εἰς τὴν μέτρησιν τοῦ κύκλου, ἂς θεωρήσωμεν τὴν τομὴν αὐτῆς H (x, 0) μετὰ τῆς πλευρᾶς AC καὶ ἂς ζητήσωμεν τὴν τετμημένην αὐτῆς, ἤτοι τὸ μῆκος (AH). Πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν ἐκ τῆς (3):

$$\frac{y}{x}=\text{εφ}\frac{\pi y}{2l} \tag{3'}$$

καὶ

$$x=\frac{y}{\text{εφ}\frac{\pi}{2l}y} \tag{4}$$

Πρέπει τώρα νὰ θέσωμεν $y=0$, διὰ νὰ λάβωμεν τὴν τετμημένην τοῦ H, ὅτε

$$\underset{y\to 0}{\text{δρ}}\, x=\frac{2l}{\pi}\underset{y\to 0}{\text{δρ}}\frac{\frac{\pi y}{2l}}{\text{εφ}\frac{\pi y}{2l}}=\frac{2l}{\pi},$$

ἤτοι :

$$(AH)=\frac{2l}{\pi}. \tag{5}$$

Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο δεικνύει, ὅτι γνωστοῦ ὄντος τοῦ σημείου H, εὑρίσκεται ἀμέσως καὶ ὁ ἀριθμὸς π, ὡς λόγος τοῦ $2l$ πρὸς τὸ (AH), μὲ ἄλλους

λόγους εὐθειοποιεῖται ἡ περιφέρεια. Ἀλλὰ τὸ σημεῖον Η δὲν δύναται νὰ προδιορισθῇ, ἂν δὲν εὑρεθῇ τρόπος χαράξεως τῆς τετραγωνιζούσης διὰ συνεχοῦς κινήσεως, πρᾶγμα, ποὺ ἐκ τῶν πραγμάτων φαίνεται ἐξερχόμενον τῶν ὁρίων τῆς δυνάμεως τοῦ Ἱππία. Εἰς τελευταίαν λοιπὸν ἀνάλυσιν καὶ ἡ μέθοδος τοῦ Ἱππία δὲν ἀποτελεῖ παρὰ ἀναγωγὴν τῆς λύσεως ἑνὸς προβλήματος εἰς τὴν λύσιν ἄλλου προβλήματος. Ἡ ἐξίσωσις (2) ἀνάγει τὸ πρόβλημα τῆς διαιρέσεως μιᾶς γωνίας εἰς ἴσα μέρη εἰς τὸ πρόβλημα ὁμοίας διαιρέσεως ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος, πρᾶγμα μὴ παρουσιάζον καμμίαν δυσκολίαν.

Παρατηρητέον ἀκόμη ὅτι ὁ σχολιαστὴς Πάππος ὁ Ἀλεξανδρεὺς (3ος αἰὼν π.Χ.), πραγματευόμενος περὶ τῆς τετραγωνιζούσης, ἀποδίδει εἰς τὸν Δεινόστρατον (4ος αἰὼν π. Χ.), ἄλλον γεωμέτρην τῆς περιόδου ταύτης, τὴν ἐφαρμογὴν τῆς ἐν λόγῳ καμπύλης εἰς τὸν τετραγωνισμὸν τοῦ κύκλου. Πρέπει ἄραγε ἐκ τούτου νὰ συμπεράνωμεν, ὅτι ἀπὸ τότε ἦτο γνωστόν, ὅτι τὰ δύο προβλήματα, ἤτοι ἡ εὐθειοποίησις τῆς περιφερείας καὶ ὁ τετραγωνισμὸς τοῦ κύκλου, ἦσαν κατ' οὐσίαν τὰ αὐτὰ καὶ ὅτι μὲ ἄλλους λόγους ἐγνώριζον πρὸ τοῦ Ἀρχιμήδους, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τοῦ μήκους τῆς περιφερείας ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα; Τὰ δοκουμέντα ποὺ ἔχομεν εἰς τὴν διάθεσίν μας δὲν ἐπιτρέπουν ν' ἀπαντήσωμεν κατὰ τρόπον ἀπόλυτον εἰς τὸ ἐρώτημα αὐτό.

Ἃς παρατηρήσωμεν, τέλος, ὅτι ἂν ἡ μέθοδος διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς ἡ χρησιμοποιηθεῖσα ὑπὸ τοῦ Πάππου πρὸς ἀπόδειξιν τῆς σχέσεως (5) ἦτο ἡ αὐτὴ μὲ ἐκείνην ποὺ ἐχρησιμοποίησεν ὁ Ἱππίας καὶ ὁ Δεινόστρατος, θὰ ἔπρεπε νὰ θεωρήσωμεν ἐπίσης γνωστήν, κατὰ τὴν ἐποχὴν ταύτην ποὺ ἤδη ἐξετάζομεν, τὴν ἀνακάλυψιν μιᾶς λογικῆς μεθόδου, τὴν ὁποίαν θὰ ἴδωμεν ἐφαρμοζομένην εἰς εὐρεῖαν κλίμακα κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς ἀκολούθου περιόδου.

Ὁ Πλάτων καὶ ἡ Ἀκαδημία

29. Οἱ ἐπιστήμονες τῆς πρὸ τοῦ Εὐκλείδου ἐποχῆς, περὶ τῶν ὁποίων ὀφείλομεν ἀκόμη νὰ κάμωμεν λόγον, ἔζησαν εἰς τοὺς χρόνους ποὺ διέρρευσαν μεταξὺ Σωκράτους (477 - 399 π.Χ.) καὶ τοῦ θανάτου τοῦ Μεγάλου Ἀλεξάνδρου (323 π.Χ.) [21]. Εἰς τὸν Πλάτωνα (420 - 348 π.Χ.), ὀφείλεται τὸ γεγονός, ὅτι ἡ ἑστία τῆς γνώσεως, ἀφοῦ περιεπλανήθη ἀπὸ χώρας εἰς χώραν, ἐσταθεροποίησε κάποτε τὴν ἕδραν της εἰς τὰς Ἀθήνας, διὰ νὰ προσλάβῃ νέαν δύναμιν. Κατὰ τὸν χρόνον τοῦτον πράγματι ἡ ἔρευνα τῆς ἐπιστημονικῆς ἀληθείας ἐτονώθη μὲ ἕνα νέον ἰσχυρὸν ὅπλον (τὴν παραγωγικὴν μέθοδον), ἡ δὲ λογικὴ ἤρχισεν νὰ ἐνδυναμοῦται μὲ

λόγους εὐθειοποιεῖται ἡ περιφέρεια. Ἀλλὰ τὸ σημεῖον Η δὲν δύναται νὰ προδιορισθῇ, ἂν δὲν εὑρεθῇ τρόπος χαράξεως τῆς τετραγωνιζούσης διὰ συνεχοῦς κινήσεως, πρᾶγμα, ποὺ ἐκ τῶν πραγμάτων φαίνεται ἐξερχόμενον τῶν ὁρίων τῆς δυνάμεως τοῦ Ἱππία. Εἰς τελευταίαν λοιπὸν ἀνάλυσιν καὶ ἡ μέθοδος τοῦ Ἱππία δὲν ἀποτελεῖ παρὰ ἀναγωγὴν τῆς λύσεως ἑνὸς προβλήματος εἰς τὴν λύσιν ἄλλου προβλήματος. Ἡ ἐξίσωσις (2) ἀνάγει τὸ πρόβλημα τῆς διαιρέσεως μιᾶς γωνίας εἰς ἴσα μέρη εἰς τὸ πρόβλημα ὁμοίας διαιρέσεως ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος, πρᾶγμα μὴ παρουσιάζον καμμίαν δυσκολίαν.

Παρατηρητέον ἀκόμη ὅτι ὁ σχολιαστὴς Πάππος ὁ Ἀλεξανδρεὺς (3ος αἰὼν π.Χ.), πραγματευόμενος περὶ τῆς τετραγωνιζούσης, ἀποδίδει εἰς τὸν Δεινόστρατον (4ος αἰὼν π. Χ.), ἄλλον γεωμέτρην τῆς περιόδου ταύτης, τὴν ἐφαρμογὴν τῆς ἐν λόγῳ καμπύλης εἰς τὸν τετραγωνισμὸν τοῦ κύκλου. Πρέπει ἄραγε ἐκ τούτου νὰ συμπεράνωμεν, ὅτι ἀπὸ τότε ἦτο γνωστόν, ὅτι τὰ δύο προβλήματα, ἤτοι ἡ εὐθειοποίησις τῆς περιφερείας καὶ ὁ τετραγωνισμὸς τοῦ κύκλου, ἦσαν κατ' οὐσίαν τὰ αὐτὰ καὶ ὅτι μὲ ἄλλους λόγους ἐγνώριζον πρὸ τοῦ Ἀρχιμήδους, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τοῦ μήκους τῆς περιφερείας ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα; Τὰ δοκουμέντα ποὺ ἔχομεν εἰς τὴν διάθεσίν μας δὲν ἐπιτρέπουν ν' ἀπαντήσωμεν κατὰ τρόπον ἀπόλυτον εἰς τὸ ἐρώτημα αὐτό.

Ἂς παρατηρήσωμεν, τέλος, ὅτι ἂν ἡ μέθοδος διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς ἡ χρησιμοποιηθεῖσα ὑπὸ τοῦ Πάππου πρὸς ἀπόδειξιν τῆς σχέσεως (5) ἦτο ἡ αὐτὴ μὲ ἐκείνην ποὺ ἐχρησιμοποίησεν ὁ Ἱππίας καὶ ὁ Δεινόστρατος, θὰ ἔπρεπε νὰ θεωρήσωμεν ἐπίσης γνωστήν, κατὰ τὴν ἐποχὴν ταύτην ποὺ ἤδη ἐξετάζομεν, τὴν ἀνακάλυψιν μιᾶς λογικῆς μεθόδου, τὴν ὁποίαν θὰ ἴδωμεν ἐφαρμοζομένην εἰς εὐρεῖαν κλίμακα κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς ἀκολούθου περιόδου.

Ὁ Πλάτων καὶ ἡ Ἀκαδημία

29. Οἱ ἐπιστήμονες τῆς πρὸ τοῦ Εὐκλείδου ἐποχῆς, περὶ τῶν ὁποίων ὀφείλομεν ἀκόμη νὰ κάμωμεν λόγον, ἔζησαν εἰς τοὺς χρόνους ποὺ διέρρευσαν μεταξὺ Σωκράτους (477 - 399 π.Χ.) καὶ τοῦ θανάτου τοῦ Μεγάλου Ἀλεξάνδρου (323 π.Χ.)[21]. Εἰς τὸν Πλάτωνα (420 - 348 π.Χ.), ὀφείλεται τὸ γεγονός, ὅτι ἡ ἑστία τῆς γνώσεως, ἀφοῦ περιεπλανήθη ἀπὸ χώρας εἰς χώραν, ἐσταθεροποίησε κάποτε τὴν ἕδραν της εἰς τὰς Ἀθήνας, διὰ νὰ προσλάβῃ νέαν δύναμιν. Κατὰ τὸν χρόνον τοῦτον πράγματι ἡ ἔρευνα τῆς ἐπιστημονικῆς ἀληθείας ἐτονώθη μὲ ἕνα νέον ἰσχυρὸν ὅπλον (τὴν παραγωγικὴν μέθοδον), ἡ δὲ λογικὴ ἤρχισεν νὰ ἐνδυναμοῦται μὲ

τὴν διασάφησιν τῶν ἐννοιῶν μέσῳ ἀκριβῶν ὁρισμῶν (ἀρχὴ τοῦ ὁρισμοῦ τῶν ἐννοιῶν). Καὶ εἶναι ἄξιον ἰδιαιτέρας ἐξάρσεως τὸ γεγονός, ὅτι ἡ γόνιμος αὕτη ἀρχή, τὴν ὁποίαν ἐδίδαξεν ὁ Σωκράτης ἐπὶ μὴ καθαρῶς μαθηματικῆς ὕλης, ἠκολουθήθη πιστῶς μόνον ἀπὸ τὴν Μαθηματικὴν Ἐπιστήμην, ὅπως δυνάμεθα μὲ τὴν μεγαλυτέραν εὐκολίαν νὰ διαπιστώσωμεν, ἂν παρατηρήσωμεν ὅτι εἰς ὅλους τοὺς ἄλλους μὴ ἀκριβεῖς κλάδους τῆς γνώσεως ἀπαντῶνται ἔννοιαι ἀτελῶς ὁριζόμεναι ἢ ἐκφερόμεναι χωρὶς κανένα ὁρισμόν.

Ἡ εὐεργετικὴ ἐπίδρασις τοῦ Πλάτωνος εἰς τὴν ἀνάπτυξιν τῶν θετικῶν ἐπιστημῶν εἶναι περισσότερον αἰσθητὴ καὶ ἄμεσος, ἡ δὲ στάσις του ἔναντι τῶν θετικῶν ἐπιστημῶν παραλληλίζεται θαυμασίως πρὸς τὴν ὑπὸ τῶν σημερινῶν ἐπιστημόνων ἐκδηλουμένην. Ἀνήκων εἰς διακεκριμένην οἰκογένειαν τῆς ἀθηναϊκῆς ἀριστοκρατίας, ἔτυχεν ἐπιμεμελημένης μορφώσεως καὶ ἀγωγῆς δι' ὅλων τῶν παιδευτικῶν μέσων ποὺ εὑρίσκοντο τὴν ἐποχὴν ἐκείνην εἰς τὴν διάθεσιν τῆς νεολαίας. Ἠκολούθησε τὴν διδασκαλίαν τοῦ Σωκράτους καὶ ἐπεσκέφθη τὰ σπουδαιότερα τότε πνευματικὰ κέντρα, δηλαδὴ τὴν Μεγάλην Ἑλλάδα καὶ τὴν Αἴγυπτον. Ἐπιστρέψας εἰς τὴν πατρίδα ἀφιέρωσε τὸν ἑαυτόν του εἰς τὴν ἀξιοποίησιν τῆς ἀποκτηθείσης γνώσεως καὶ εἰς τὴν ἀνάπτυξιν τῶν ἀποτελεσμάτων τῶν ἰδίων του ἐρευνῶν ἀπὸ τὴν περίφημον αὐτοῦ Σχολήν, τὴν ὀνομασθεῖσαν, ἐκ τῆς τοποθεσίας της, Ἀκαδήμειαν, σήμερον δὲ Ἀκαδημίαν.

Χαρακτηριστικὸν τῆς διδασκαλίας τοῦ Πλάτωνος εἶναι ἡ μεγάλη ἐκτίμησις, τὴν ὁποίαν ἔτρεφε πρὸς τὰ Μαθηματικά. «Ἀεὶ ὁ Θεὸς γεωμετρεῖ» ἔλεγε, μὴ παύων νὰ ἐκθειάζῃ τὴν παιδευτικὴν ἀξίαν τῆς ἐπιστήμης αὐτῆς καὶ νὰ συνιστᾷ μὲ τόσην θέρμην τὴν σπουδήν της, ὥστε νὰ θέσῃ εἰς τὸ ὑπέρθυρον τῆς εἰσόδου τὴν περιώνυμον ἐπιγραφήν: «Μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω». Εἶναι δὲ εἰς τοιαῦτα παραγγέλματα καὶ εἰς τοὺς ἀναριθμήτους μαθηματικοὺς στοχασμούς, ποὺ εὑρίσκονται ἐγκατεσπαρμένοι εἰς τὰ ἔργα του, ὅπου συνίσταται κατὰ μέγα μέρος ἡ τεραστία προσφορὰ τοῦ Πλάτωνος ἔναντι τῶν ἀκριβῶν ἐπιτημῶν.

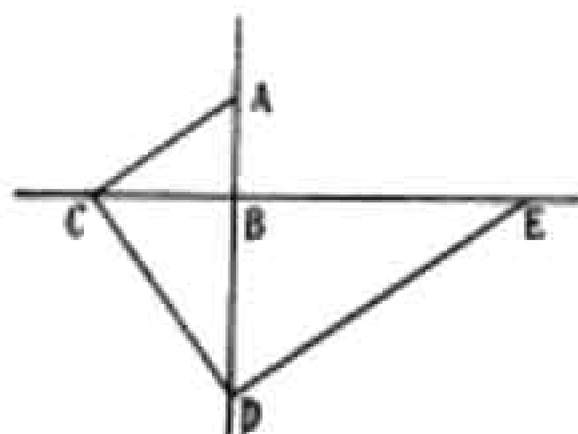
Ὁ Πλάτων ἔδωσε γενικὴν μορφὴν εἰς τὴν ἀναλυτικὴν μέθοδον, τὴν ὁποίαν ὑπὸ μορφὴν ἐπιστολῆς ἐκθέτει πρὸς τὸν μαθητήν του Λεωδάμαντα τὸν Θάσιον. Ἡ λογικὴ αὕτη μέθοδος, ἐφαρμοζομένη εἰς ἕνα θεώρημα, τὸ μετασχηματίζει διαδοχικῶς εἰς σειρὰν ἄλλων ἰσοδυνάμων, τὸ τελευταῖον ἐκ τῶν ὁποίων εἶναι γνωστόν· ἐὰν λοιπὸν κάθε ἐνδιάμεσος πρότασις εἶναι ἀντιστρεπτή, τότε δυνάμεθα ἀναπαράγοντες κατ' ἀντίστροφον πορείαν τὴν σειρὰν τῶν προτάσεων νὰ φθάσωμεν ἐξ ἑνὸς γνωστοῦ θεωρήματος εἰς τὸ ἀποδεικτέον[22].

Ἀνάλογος μέθοδος ἐφαρμόζεται καὶ εἰς τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων.

Ὑποτίθεται τοῦτο λελυμένον καὶ μὲ τὴν βοήθειαν καταλλήλων συμπληρωματικῶν κατασκευῶν μετασχηματίζεται τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα εἰς σειρὰν ἄλλων, μέχρις ὅτου φθάσωμεν εἰς πρόβλημα ἤδη λελυμένον ἢ δυνάμενον νὰ λυθῇ ἀμέσως. Εἶναι εὐνόητος ἡ ἰδιαιτέρα ἀποτελεσματικότης τῆς μεθόδου εἰς τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων, συγκρινομένη πρὸς τὴν ἐφαρμογὴν αὐτῆς εἰς τὰ θεωρήματα, καθ' ὅσον διὰ ν' ἀποδείξωμεν ἕνα θεώρημα μὲ αὐτὴν τὴν μέθοδον, εἶναι φανερὸν ὅτι πρέπει νὰ κατέχωμεν ἤδη τὴν πλήρη διατύπωσίν του. Ἡ μέθοδος εἶχε βεβαίως ἐφαρμοσθῇ εἰς τινας περιπτώσεις πρὸ τοῦ Πλάτωνος, ἀλλ' ἡ συμβολὴ τοῦ φιλοσόφου συνίσταται εἰς τὴν διατύπωσιν αὐτῆς μὲ γενικοὺς ὅρους καὶ εἰς τὴν μεθοδολογικήν της διασάφησιν.

Ἀνάλογος πρέπει νὰ θεωρῆται ἡ συμβολή του καὶ εἰς τὴν ἔρευναν τῶν γεωμετρικῶν τόπων, ἡ ὁποία ἀποδίδεται ἐπίσης εἰς τὸν Πλάτωνα, ἀφοῦ εἶναι γνωστὸν ὅτι καὶ πρὸ αὐτοῦ εἶχον ἐξετασθῇ σειραὶ σημείων ἐχόντων κοινὴν ἰδιότητα.

Προσφάτως ἦλθεν εἰς φῶς χειρόγραφον τοῦ Ἥρωνος, ἐκ τοῦ ὁποίου προκύπτει ὅτι ὁ Πλάτων εἶχεν ἤδη γνῶσιν δύο ἡμικανονικῶν δεκατετραέδρων στερεῶν, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἕνα περιωρίζετο ἀπὸ 8 τρίγωνα καὶ 6 τετράγωνα, τὸ δὲ ἄλλο ἀπὸ 8 τετράγωνα καὶ 6 τρίγωνα.



Σχ. 4

Εἰς τὸν Πλάτωνα, τέλος, ἀποδίδεται μία εἰδικὴ διάταξις ἐπιτρέπουσα μηχανικῶς τὴν παρεμβολὴν δύο μέσων ἀναλόγων μεταξὺ δύο δοθέντων μηκῶν. Ἡ διάταξις στηρίζεται εἰς τὴν ἁπλῆν παρατήρησιν ὅτι ἂν τὰ δοθέντα μήκη BA καὶ BE, εἶναι διατεταγμέναι κατ' ὀρθὴν γωνίαν (σχ. 4), αἱ ζητούμεναι δύο μέσαι ἀνάλογοι συμπίπτουν πρὸς τὰ μήκη BC καὶ BD, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι ἡ τεθλασμένη ACDE εἶναι ὀρθογώνιος.

Τοῦτο εἶναι προφανές, διότι ἐκ τῶν ἀληθῶν σχέσεων:

$$BC^2 = BA.\ BD$$
$$BD^2 = BC.\ BE$$

ἀπορρέει ἀμέσως ἡ συνεχὴς ἀναλογία:

$$\frac{BA}{BC} = \frac{BC}{BD} = \frac{BD}{BE}.$$

Τοιαύτη παρατήρησις ἀνάγει τὸ πρόβλημα τῆς παρεμβολῆς τῶν δύο μέσων ἀναλόγων εἰς τὴν χάραξιν τῆς ὀρθογωνίου τεθλασμένης ACDE μὲ δεδομένα ἄκρα, πρᾶγμα δυνάμενον νὰ ἐπιτευχθῇ διὰ δοκιμῶν[23].

30. Ἡ ἀπόδοσις τῆς διδασκαλίας, ποὺ ἐγίνετο ἐντὸς τῆς Ἀκαδημίας, μαρτυρεῖται ἀπὸ τὰς συμβολὰς τῶν μαθητῶν τοῦ Πλάτωνος εἰς τὰς ἀκριβεῖς ἐπιστήμας, ἐκ τῶν ὁποίων συμβολῶν θ' ἀπαριθμήσωμεν τὰς σπουδαιοτέρας.

Ὁ Λεωδάμας ὁ Θάσιος, τὸν ὁποῖον ἐμνημονεύσαμεν ἤδη ὡς ἐπίλεκτον μαθητὴν τοῦ θείου φιλοσόφου, εἶχεν ὡς ἰδικόν του μαθητὴν τὸν Λέοντα τὸν Βυζάντιον, ὁ ὁποῖος εἶναι γνωστὸς εἰς τὴν Ἱστορίαν τῶν Μαθηματικῶν ἀπὸ ἕνα σύγγραμμά του «Στοιχεῖα», ἀνώτερον ἐκείνου τὸ ὁποῖον εἶχε γράψει ὁ Ἱπποκράτης καὶ πληρέστερον, διότι εἰσήγαγε διὰ πρώτην φορὰν τοὺς «διορισμούς», ἤτοι τὴν διερεύνησιν τῶν συνθηκῶν δυνατότητος ἑκάστου προβλήματος καὶ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ ἀριθμοῦ τῶν λύσεων.

Γνωστότερος ἀκόμη εἶναι ὁ Ἀθηναῖος Θεαίτητος, πρωταγωνιστὴς τοῦ ὁμωνύμου διαλόγου τοῦ Πλάτωνος, εἰς τὸν ὁποῖον ἀποδίδονται ἀορίστως βαθεῖαι μελέται ἐπὶ τῶν ἀσυμμέτρων μεγεθῶν καὶ τῶν κανονικῶν στερεῶν. Ἐὰν τοῦτο ἀληθεύῃ, πρέπει νὰ συμπεράνωμεν ὅτι ὁ Εὐκλείδης ἤντλησεν ἀφθόνως ἐκ τῶν ἐργασιῶν τοῦ Θεαιτήτου κατὰ τὴν συγγραφὴν τῶν βιβλίων X καὶ XII τῶν Στοιχείων του.

Ἄλλων μαθητῶν τοῦ Πλάτωνος διετηρήθη ἡ μνήμη μόνον τῶν ὀνομάτων, διὰ τοῦτο καὶ δὲν τὰ ἀναφέρομεν ἐδῶ, συνεπεῖς πρὸς τὴν ἀρχὴν τοῦ βιβλίου μας νὰ ἐνδιαφέρεται περισσότερον διὰ τὰ γεγονότα. Ὁ μοναδικὸς ποὺ δικαιοῦται νὰ παραμείνῃ εἰς τὴν μνήμην μας εἶναι ὁ Ἀριστοτέλης ὁ Σταγειρίτης (384 - 322 π.Χ.), ὁ ἔνδοξος διδάσκαλος τοῦ Μεγάλου Ἀλεξάνδρου, ἐκεῖνος τὸν ὁποῖον ὁ Δάντης ἐσέβετο «ὡς διδάσκαλον τῶν σοφῶν». Μολονότι τὰ ἔργα του ἔχουν ῥοπὴν πρὸς τὰ φυσικὰς ἐπιστήμας—ἡ πρόοδος τῶν ὁποίων ἐπίστευεν ὅτι εἶναι ἀναποσπάστως συνδεδεμένη μὲ τὴν μεθοδικὴν χρῆσιν τῆς παρατηρήσεως καὶ τῆς ἐμπειρίας—ἐν τούτοις μὲ τὸ νὰ δώσῃ εἰς τὴν λογικὴν τοῦ παραγωγικοῦ συλλογισμοῦ τὴν μορφήν, ἡ ὁποία ἀπὸ εἴκοσι αἰώνων κρίνεται ἄψογος, συνέβαλεν, ἔστω καὶ ἐμμέσως, εἰς τὴν πρόοδον τῆς ἐπιστήμης ἐκείνης, ἡ ὁποία δικαίως θεωρεῖται ὡς ὁ τύπος τῶν ἐπιστημῶν τοῦ καθαροῦ θεωρητικοῦ στοχασμοῦ.

Ἐπὶ πλέον μὲ τὸ νὰ παραστήσῃ τὰς ἐννοίας μὲ γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου ἔδωσεν ἕνα παράδειγμα συμβολισμοῦ, τὸ ὁποῖον ἠκολουθήθη ἀπὸ τοὺς μεταγενεστέρους καὶ ὡδήγησε, κατόπιν μακρᾶς ἐπεξεργασίας εἰς τὴν σημερινὴν Ἄλγεβραν. Οὔτε πρέπει νὰ παρασιωπηθῇ τὸ γεγονός, ὅτι ἡ ὑπ' αὐτοῦ εἰσαχθεῖσα εὔστοχος διάκρισις μεταξὺ γεωμετρίας καὶ γεωδαισίας, μεταξὺ ἀριθμητικῆς (θεωρίας τῶν ἀριθμῶν) καὶ λογιστικῆς (πρακτικῆς ἀριθμητικῆς), μαρτυρεῖ πόσον οἱ δύο ἀπὸ τοὺς σημαντικωτέρους κλάδους τῆς καθαρᾶς μαθηματικῆς ἐξήρθησαν τότε ὑπεράνω τοῦ ἀμόρφου σωροῦ γνώσεων, τὰς ὁποίας κατεῖχον οἱ Βαβυλώνιοι καὶ οἱ Αἰγύπτιοι.

Προσθέτομεν ὅτι αἱ μελέται του εἰς τὴν ἐπιστήμην τῶν δυνάμεων καὶ τῆς κινήσεως, ἂν καὶ δὲν δύνανται νὰ δώσουν στερεὰς βάσεις εἰς τὴν Μηχανικήν, ἐπλούτισαν μὲ μίαν νέαν τεραστίαν ἐπαρχίαν τὴν ἐπικράτειαν τῶν μαθηματικῶν. Καὶ τελειώνομεν σημειοῦντες ὅτι τὰ πολυάριθμα χωρία τῶν ἔργων του, τὰ σχετικὰ πρὸς αὐτὰς τὰς ἐπιστήμας — καὶ τὰ ὁποῖα περισυνελέγησαν ἐπιμελῶς ἀπὸ σοφοὺς θαυμαστὰς τοῦ διασήμου Σταγειρίτου — ἐπέτρεψαν νὰ προστεθοῦν ἀκόμη μερικαὶ προτάσεις εἰς τὸν κατάλογον τῶν ἀληθειῶν, ποὺ ἦσαν ἤδη γνωσταὶ μέχρι τῆς διαλύσεως τοῦ κράτους τοῦ Μεγάλου Ἀλεξάνδρου καὶ νὰ προπαρασκευάσουν τὴν γέννησιν μερικῶν αἰτημάτων καὶ ἀξιωμάτων, ὅπως ἐκεῖνα ποὺ ἐτέθησαν ἀπὸ τὸν Εὐκλείδην εἰς τὴν βάσιν τοῦ γεωμετρικοῦ του συστήματος.

Ὁ Εὔδοξος καὶ ἡ Σχολὴ τῆς Κυζίκου

31. Οἱ χρόνοι κατὰ τοὺς ὁποίους ὁ Πλάτων ἤσκησε τὴν πνευματικὴν καὶ διδακτικήν του δρᾶσιν, συμπίπτουν περίπου μὲ τοὺς χρόνους τῆς ἀκμῆς ἑνὸς ἀπὸ τοὺς ἐξοχωτέρους ἐκπροσώπους τῆς διανοήσεως, τοῦ ὁποίου ἡ λάμψις ἔγινεν ἔτι μεγαλυτέρα ἀφ᾽ ὅτου κατενοήθη ἡ συμβολή του εἰς τὴν Ἀστρονομίαν, χάρις εἰς τὰς βαθείας ἐρεύνας τοῦ ἰταλοῦ ἀστρονόμου G. Schiaparelli (1835 - 1910)[84]. Ὁμιλοῦμεν διὰ τὸν Εὔδοξον Αἰσχίνου τὸν Κνίδιον (407 - 354 π.Χ.). Ἀφοῦ ἐταξείδευσεν εἰς τὴν Αἴγυπτον καὶ ἐμυήθη εἰς τὴν ἱερατικὴν ἐπιστήμην, ἐμαθήτευσε κατόπιν πλησίαν τοῦ Ἀρχύτα καὶ κατὰ τὸ 378 π.Χ. ἵδρυσεν εἰς Κύζικον ἰδίαν σχολήν, ἡ ὁποία συντομώτατα ἀπέκτησε μεγάλην καὶ ἐπαξίαν φήμην.

Ἡ πρωτοτυπία του ὡς μαθηματικοῦ ἐλέγχεται ἀπὸ τὸ γεγονὸς ὅτι εἰς αὐτὸν ἀποδίδεται τὸ V βιβλίον τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, δηλαδὴ τὸ βιβλίον ἐκεῖνο, ποὺ θαυμάζεται ἴσως περισσότερον ἀπὸ ὅλα τὰ ἄλλα τῆς ἐνδόξου αὐτῆς συγγραφῆς, διότι ὑπὸ μορφὴν μιᾶς γενικῆς θεωρίας τῶν ἀναλογιῶν, θεμελιώνει εἰς τὴν πραγματικότητα μίαν γενικὴν θεωρίαν τῶν μεγεθῶν, συμμέτρων καὶ ἀσυμμέτρων.

Εἰς τὸν Εὔδοξον φαίνεται ὅτι ἀνήκει ἐπίσης ἡ ἀνακάλυψις, ἴσως δὲ καὶ ἡ ἀπόδειξις, τῶν κομψῶν ἰδιοτήτων τῆς διαιρέσεως ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον, μὲ τὰς ὁποίας ἀρχίζει τὸ τελευταῖον βιβλίον τῆς ἰδίας συγγραφῆς.

Ὀλιγώτερον ἀμφίβολος — διότι βεβαιοῦται ἀπὸ τὸν Ἀρχιμήδη — εἶναι ἡ ἀπόδειξις, ἡ δοθεῖσα τὸ πρῶτον ὑπὸ τοῦ Εὐδόξου, τοῦ θεωρήματος (τὸ ὁποῖον εἶχε διατυπωθῆ ἀπὸ τὸν Δημόκριτον), ὅτι ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος (ἢ τοῦ κώνου) ἰσοῦται πρὸς τὸ τρίτον τοῦ πρίσματος (ἢ τοῦ κυλίνδρου) τοῦ ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὡς καὶ ἡ ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος ὅτι δύο σφαῖραι εἶναι μεταξύ των ὡς οἱ κύβοι τῶν διαμέτρων.

Προσθέτομεν ὅτι αἱ μελέται του εἰς τὴν ἐπιστήμην τῶν δυνάμεων καὶ τῆς κινήσεως, ἂν καὶ δὲν δύνανται νὰ δώσουν στερεὰς βάσεις εἰς τὴν Μηχανικήν, ἐπλούτισαν μὲ μίαν νέαν τεραστίαν ἐπαρχίαν τὴν ἐπικράτειαν τῶν μαθηματικῶν. Καὶ τελειώνομεν σημειοῦντες ὅτι τὰ πολυάριθμα χωρία τῶν ἔργων του, τὰ σχετικὰ πρὸς αὐτὰς τὰς ἐπιστήμας — καὶ τὰ ὁποῖα περισυνελέγησαν ἐπιμελῶς ἀπὸ σοφοὺς θαυμαστὰς τοῦ διασήμου Σταγειρίτου — ἐπέτρεψαν νὰ προστεθοῦν ἀκόμη μερικαὶ προτάσεις εἰς τὸν κατάλογον τῶν ἀληθειῶν, ποὺ ἦσαν ἤδη γνωσταὶ μέχρι τῆς διαλύσεως τοῦ κράτους τοῦ Μεγάλου Ἀλεξάνδρου καὶ νὰ προπαρασκευάσουν τὴν γέννησιν μερικῶν αἰτημάτων καὶ ἀξιωμάτων, ὅπως ἐκεῖνα ποὺ ἐτέθησαν ἀπὸ τὸν Εὐκλείδην εἰς τὴν βάσιν τοῦ γεωμετρικοῦ του συστήματος.

Ὁ Εὔδοξος καὶ ἡ Σχολὴ τῆς Κυζίκου

31. Οἱ χρόνοι κατὰ τοὺς ὁποίους ὁ Πλάτων ἤσκησε τὴν πνευματικὴν καὶ διδακτικήν του δρᾶσιν, συμπίπτουν περίπου μὲ τοὺς χρόνους τῆς ἀκμῆς ἑνὸς ἀπὸ τοὺς ἐξοχωτέρους ἐκπροσώπους τῆς διανοήσεως, τοῦ ὁποίου ἡ λάμψις ἔγινεν ἔτι μεγαλυτέρα ἀφ' ὅτου κατενοήθη ἡ συμβολή του εἰς τὴν Ἀστρονομίαν, χάρις εἰς τὰς βαθείας ἐρεύνας τοῦ ἰταλοῦ ἀστρονόμου G. Schiaparelli (1835 - 1910)[84]. Ὁμιλοῦμεν διὰ τὸν Εὔδοξον Αἰσχίνου τὸν Κνίδιον (407 - 354 π.Χ.). Ἀφοῦ ἐταξείδευσεν εἰς τὴν Αἴγυπτον καὶ ἐμυήθη εἰς τὴν ἱερατικὴν ἐπιστήμην, ἐμαθήτευσε κατόπιν πλησίαν τοῦ Ἀρχύτα καὶ κατὰ τὸ 378 π.Χ. ἵδρυσεν εἰς Κύζικον ἰδίαν σχολήν, ἡ ὁποία συντομώτατα ἀπέκτησε μεγάλην καὶ ἐπαξίαν φήμην.

Ἡ πρωτοτυπία του ὡς μαθηματικοῦ ἐλέγχεται ἀπὸ τὸ γεγονὸς ὅτι εἰς αὐτὸν ἀποδίδεται τὸ V βιβλίον τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, δηλαδὴ τὸ βιβλίον ἐκεῖνο, ποὺ θαυμάζεται ἴσως περισσότερον ἀπὸ ὅλα τὰ ἄλλα τῆς ἐνδόξου αὐτῆς συγγραφῆς, διότι ὑπὸ μορφὴν μιᾶς γενικῆς θεωρίας τῶν ἀναλογιῶν, θεμελιώνει εἰς τὴν πραγματικότητα μίαν γενικὴν θεωρίαν τῶν μεγεθῶν, συμμέτρων καὶ ἀσυμμέτρων.

Εἰς τὸν Εὔδοξον φαίνεται ὅτι ἀνήκει ἐπίσης ἡ ἀνακάλυψις, ἴσως δὲ καὶ ἡ ἀπόδειξις, τῶν κομψῶν ἰδιοτήτων τῆς διαιρέσεως ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον, μὲ τὰς ὁποίας ἀρχίζει τὸ τελευταῖον βιβλίον τῆς ἰδίας συγγραφῆς.

Ὀλιγώτερον ἀμφίβολος — διότι βεβαιοῦται ἀπὸ τὸν Ἀρχιμήδη — εἶναι ἡ ἀπόδειξις, ἡ δοθεῖσα τὸ πρῶτον ὑπὸ τοῦ Εὐδόξου, τοῦ θεωρήματος (τὸ ὁποῖον εἶχε διατυπωθῆ ἀπὸ τὸν Δημόκριτον), ὅτι ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος (ἢ τοῦ κώνου) ἰσοῦται πρὸς τὸ τρίτον τοῦ πρίσματος (ἢ τοῦ κυλίνδρου) τοῦ ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὡς καὶ ἡ ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος ὅτι δύο σφαῖραι εἶναι μεταξύ των ὡς οἱ κύβοι τῶν διαμέτρων.

Ἐάν, ὡς δεικνύουν τὰ πράγματα, ὁ Εὔδοξος εἶχεν ἀποδείξει τὰ σημαντικὰ αὐτὰ θεωρήματα, πρέπει ν' ἀποδώσωμεν εἰς αὐτὸν καὶ τὴν δόξαν ὅτι εἶχεν ἤδη διατυπώσει καὶ ἐφαρμόσει μίαν γενικωτάτην ἀρχὴν ἰσοδύναμον πρὸς τὸ περίφημον ἀξίωμα τοῦ Ἀρχιμήδους «δοθέντων δύο ὁμοειδῶν μεγεθῶν ὑπάρχει πάντοτε πολλαπλάσιον τοῦ μικροτέρου ὑπερβαῖνον τὸ μεγαλύτερον». Ἐξ ἄλλου πρέπει ὁ ἴδιος νὰ εἶχεν ἤδη χαράξει τὰς πρώτας γραμμὰς τῆς ὁμοιομόρφου ἐκείνης μεθόδου, τῆς καλουμένης ὑπὸ τῶν νεωτέρων μεθόδου τῆς ἐξαντλήσεως, ἡ ὁποία, πρὸ τῆς ἀνακαλύψεως τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ λογισμοῦ, ἀπετέλει τὴν σπονδυλικὴν στήλην τῶν ὑψηλοτέρων θεωριῶν τῆς μετρικῆς γεωμετρίας.

Ἐὰν εἰς τὰς μνημειώδεις αὐτὰς ἀνακαλύψεις προσθέσωμεν ἀκόμη μερικὰς τελειοποιήσεις, δυστυχῶς μὴ ἐντελῶς γνωστάς, τὰς ὁποίας ἐπέφερεν ὁ Εὔδοξος εἰς τὰς προηγουμένας λύσεις τοῦ δηλίου προβλήματος, ὡς καὶ τὴν εὐφυεστάτην θεωρίαν τῶν «ὁμοκέντρων σφαιρῶν» πρὸς ἐξήγησιν τῶν φαινομένων, τὰ ὁποῖα παρέχει ἡ κίνησις τῶν ἄστρων, ἔχομεν ἐπαρκῆ στοιχεῖα διὰ ν' ἀναμετρήσωμεν τὸ ἀνάστημα, τῇ ἀληθείᾳ γιγάντειον, τοῦ γεωμέτρου τῆς Κνίδου.

32. Εἰς τὰ στοιχεῖα αὐτὰ ἠμποροῦμεν νὰ προσθέσωμεν καὶ ἕνα ἄλλο, διαφορετικῆς φύσεως, ὅτι δηλαδὴ μεταξὺ τῶν μαθητῶν του συγκαταριθμεῖται ὁ Μέναιχμος (γεν. 375 π.Χ.), ἀδελφὸς τοῦ Δεινοστράτου περὶ τοῦ ὁποίου ὡμιλήσαμεν ἤδη (§ 28), καὶ μαθηματικὸς ἀναχθεὶς εἰς ἄφθιτον δόξαν μὲ τὴν ἀνακάλυψιν τῶν κωνικῶν τομῶν. Ἀτυχῶς αἱ μαρτυρίαι τῆς ἀρχαιότητος, ποὺ ἔφθασαν μέχρις ἡμῶν, δὲν ρίπτουν παρὰ ἀμυδρὸν φῶς ἐπὶ τοῦ τρόπου, κατὰ τὸν ὁποῖον ἔγινεν ἡ ἀνακάλυψις τῆς Μεναιχμίου τριάδος. Περιοριζόμεθα εἰς τὴν παρατήρησιν, ὅτι ἐκ τῆς συνεχοῦς ἀναλογίας τοῦ Ἱπποκράτους

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b},$$

εἰς τὴν ὁποίαν ὁ τελευταῖος εἶχεν ἀναγάγει τὸ πρόβλημα τοῦ διπλασιασμοῦ τοῦ κύβου, ἀναγόμεθα εὐκόλως εἰς τὰς σχέσεις:

$$x^2 = ay, \quad y^2 = bx, \quad xy = ab,$$

αἱ ὁποῖαι εἰς Καρτεσιανὰς συντεταγμένας παριστάνουν, ὡς εἶναι γνωστόν, αἱ δύο πρῶται παραβολάς, ἡ δὲ τρίτη ὑπερβολήν. Ἐπειδὴ μία τοιαύτη ἀναγωγὴ δὲν ἦτο ἄγνωστος εἰς τοὺς ἀρχαίους ἕλληνας γεωμέτρας, εἶναι πιθανὸν ὅτι ὁ Μέναιχμος ὡδηγήθη ἐντεῦθεν εἰς τὴν ἐξέτασιν τῆς παραβολῆς καὶ ὑπερβολῆς, φέρων οὕτω εἰς φῶς τὰς θεμελιώδεις ἰδιότητας, ποὺ ἐκφράζουν αἱ ὡς ἄνω ἐξισώσεις των. Ὑπελείπετο βεβαίως ν' ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ περὶ ὧν ὁ λόγος καμπύλαι δύνανται νὰ ληφθοῦν ὡς τομαὶ ὑπὸ

ἐπιπέδου ἑνὸς ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου. Ἔκαμεν ἄρα γε ὁ Μέναιχμος καὶ τὸ ἀποφασιστικὸν αὐτὸ βῆμα; Ἀπάντησις ἀπηλλαγμένη ὑποθετικῶν διατυπώσεων εἶναι δυστυχῶς ἀδύνατον σήμερον νὰ δοθῇ. Περιοριζόμεθα νὰ σημειώσωμεν ὅτι κατὰ γενικὴν διαπίστωσιν, δὲν πρέπει ν' ἀποδοθῇ εἰς τὸν Μέναιχμον ἡ πρώτη μεθοδικὴ ἔκθεσις τῆς θεωρίας τῶν ὑπ' αὐτοῦ ἀνακαλυφθεισῶν καμπύλων, τῆς τιμῆς ταύτης ἀποδιδομένης γενικῶς εἰς ἄλλον γεωμέτρην, ἀποκαλούμενον συνήθως Ἀρισταῖον τὸν Πρεσβύτερον. Ἀλλὰ καὶ τούτου τὸ πεντάτομον ἔργον περὶ κωνικῶν τομῶν ὅπως καὶ ἕτερα τοῦ ἰδίου περὶ πολυέδρων, δὲν ἀντέσχον εἰς τὴν φθορὰν τοῦ χρόνου. Καὶ πρὸς ἀποζημίωσιν, τρόπον τινά, τῆς γεωμετρίας, διὰ τὴν ζημίαν ποὺ ὑπέστη, ἕνας διάσημος μαθητὴς τοῦ Γαλιλαίου, ὁ Βικέντιος Βιβιάνι (1622 - 1703), προσεπάθησε ν' ἀναπαραγάγῃ διὰ τῆς φαντασίας τὴν ἀπολεσθεῖσαν ἐργασίαν τοῦ Ἕλληνος γεωμέτρου, συγγράψας, κατόπιν τεσσαρακονταετοῦς ἐργασίας, τὸ ἐν ἔτει 1701 ἐκδοθὲν ἔργον του ὑπὸ τὸν τίτλον «Divinatio Aristaei». Μεταξὺ ὅλων τῶν προσπαθειῶν ποὺ ἔγιναν ὑπὸ νεωτέρων κορυφαίων μαθηματικῶν πρὸς ἀναπαραγωγὴν ἀπολεσθέντων ἔργων, ἡ ἐργασία τοῦ Βιβιάνι θεωρεῖται ἡ τελειοτέρα.

33. Ὁ Ἀρισταῖος εἶναι ὁ τελευταῖος τῶν εἰς ἡμᾶς γνωστῶν προευκλειδείων μαθηματικῶν, ἤτοι μιᾶς λαμπρᾶς ἀκολουθίας προδρόμων πνευμάτων, τὰ ὁποῖα ἀρχῆς γενομένης ἀπὸ τοῦ Θαλοῦ ἐδημιούργησαν ἐκ προθέσεως ἢ ἐκ συμπτώσεως τὰ πολύτιμα ἐκεῖνα στοιχεῖα ποὺ ἐχρειάζοντο διὰ νὰ κατασκευασθῇ μία τεραστία, πλήρης δυνάμεως ἐπιστήμη τοῦ διαστήματος. Ἡ οὐσία τοῦ συντελεσθέντος ἔργου ὑπὸ τῶν πρωτοπόρων τούτων κρίνεται ἐκ τῶν ὅσων ἔχομεν ἤδη ἐκθέσει. Ἐπιδέχεται ὅμως περαιτέρω μίαν ἔμμεσον, ἀλλ' ἀδιαφιλονίκητον ἐπιβεβαίωσιν ἐκ τοῦ γεγονότος, ὅτι ὁ Εὔδημος ὁ Ῥόδιος (350 - 290 π.Χ.), μαθητὴς τοῦ Ἀριστοτέλους, ἔκρινεν ὅτι ἐπέστη ἡ στιγμὴ νὰ συγγράψῃ μίαν ἱστορίαν τῶν μαθηματικῶν ἀνακαλύψεων, αἱ ὁποῖαι εἶχον συντελεσθῇ μέχρι τῶν ἡμερῶν του. Ἡ ἱστορία προϋποθέτει μεγαλόψυχον χειρονομίαν! Δυστυχῶς ὁ χρόνος δὲν ἐφείσθη καὶ τοῦ ἔργου τούτου. Οὔτε τὸ σχέδιον, οὔτε ὁ σκελετὸς τῆς ἐργασίας διεσώθη. Ἔπρεπεν ὅμως νὰ γίνῃ ἐδῶ μνεία τοῦ γεγονότος τούτου, ὡς τίτλου τιμῆς τῶν πνευμάτων ποὺ ἤνθισαν ἀπὸ τοῦ Θαλοῦ μέχρι τοῦ Ἀρισταίου, ἀλλὰ καὶ διὰ νὰ ἐξαρθῇ ἀκόμη τοῦτο, ὅτι εἰς τὴν Ἀρχαίαν Ἑλλάδα ἀνήκει, μεταξὺ τῶν ἄλλων, καὶ ἡ δόξα τῆς ἱστορικῆς περισυλλογῆς καὶ διασώσεως τῶν ὀνομάτων τῶν ἐργατῶν καὶ τῶν ἐπιτευγμάτων τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

ΟΙ ΝΟΜΟΘΕΤΑΙ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

34. Ἡ ἱστορικὴ περίοδος τῆς ἑλληνικῆς γεωμετρίας, ἥτις ἀποτελεῖ ἀντικείμενον τοῦ κεφαλαίου τούτου, διαφέρει τῆς προηγουμένης α) ὡς πρὸς τὸν κατ' ἐξοχὴν ἐπιστημονικὸν χαρακτῆρα τῶν διανοουμένων, ποὺ ἔδωσαν εἰς τὰ μαθηματικὰ τὴν πλέον ἀποφασιστικὴν ὤθησιν, β) ὡς πρὸς τὴν φύσιν τῶν ἀρχαίων κειμένων, τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται εἰς τὴν διάθεσίν μας και γ) ὡς πρὸς τὴν ἕδραν τῆς φλογερωτέρας πνευματικῆς ἑστίας.

Ἐκλείπει πράγματι ἡ λαμπρὰ πλειὰς τῶν φιλοσόφων ἐκείνων, οἱ ὁποῖοι ἀπὸ Θαλοῦ μέχρι Πλάτωνος, ὡδήγησαν τὸν ἑλληνικὸν στοχασμὸν (φιλόσοφοι, δι' οὓς ἡ μαθηματικὴ ἔρευνα εἶναι ἁπλοῦν ἐπεισόδιον εἰς τὰς προσφιλεῖς των μελέτας) μέχρι τοῦ σημείου, ὥστε νὰ δυνηθῇ νὰ παραγάγῃ ἐξόχους ἄνδρας, ἀφιερώσαντας τὴν ζωὴν καὶ τὴν ἰδιοφυΐαν των ἀποκλειστικῶς εἰς τὴν καλλιέργειαν τῶν ἀκριβῶν ἐπιστημῶν. Ἄλλωστε οἱ ἄνδρες οὗτοι εἶχον πλέον ἀπαλλαγῇ ἀπὸ τὴν ἐπίπονον ἀναζήτησιν ἐμμέσων πληροφοριῶν εἰς ἐξω-μαθηματικὰς ἐργασίας, χάρις εἰς τὴν ὕπαρξιν τῶν καλυτέρων μαθηματικῶν συγγραμμάτων τῆς ἐποχῆς των.

Τέλος, τὸ κέντρον τῆς πνευματικῆς δραστηριότητος δὲν εὑρίσκεται πλέον ἐπὶ τοῦ ἐδάφους τῆς Ἑλλάδος, ἀλλ' ἐπιστρέφει εἰς τὴν κοιλάδα τοῦ Νείλου καὶ δὴ εἰς τὴν Ἀλεξάνδρειαν, τὴν ἀκμάζουσαν πόλιν, ἡ ὁποία μετὰ τὸν θάνατον τοῦ Μεγάλου Ἀλεξάνδρου καὶ τὴν διάλυσιν τοῦ κράτους του, ἀπέβη μητρόπολις τοῦ βασιλείου, τοῦ ἀγαθῇ τύχῃ περιελθόντος εἰς τὸν Π τ ο λ ε μ α ῖ ο ν τ ὸ ν Λ ά γ ο υ ἢ Σ ω τ ῆ ρ α (337 - 283 π.Χ.).

Ὑπὸ τὴν διακυβέρνησιν τοῦ ἀνδρὸς τούτου, τὸν ὁποῖον ἡ φύσις εἶχε προικίσει μὲ πνεῦμα ἀνώτερον, ἱκανὸν ν' ἀντιλαμβάνεται τὰς πρὸς τὴν ἀνωτέραν παιδείαν ὑποχρεώσεις τῶν μοναρχῶν ποὺ ἐνδιαφέρονται διὰ τὴν δόξαν τῶν λαῶν των, ἱδρύθη τὸ περίφημον «Μ ο υ σ ε ῖ ο ν τ ῆ ς Ἀ λ ε ξ α ν δ ρ ε ί α ς», ἕνα ἰδιότυπον πνευματικὸν κέντρον (πανεπιστήμιον, βιβλιοθήκη, κέντρον ἐπιστημονικῶν ἐρευνῶν), εἰς τὸ ὁποῖον ἐφοίτησαν πλῆθος ἐξόχων ἐρευνητῶν τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης.

Τὸ μέγα τοῦτο ἵδρυμα, ἐκτὸς τῶν σταθερῶν σχέσεων, τὰς ὁποίας διε-

τήρει καὶ ἐκαλλιέργει μεταξὺ τῶν μακρὰν τῆς 'Αλεξανδρείας διανοουμένων, ἐπὶ 9 καὶ πλέον αἰώνας, ἐφρόντιζε μὲ ἔνθεον ζῆλον διὰ τὴν συγκέντρωσιν καὶ διάδοσιν τῶν καρπῶν τῆς ἐπιστημονικῆς ἐρεύνης ἐξ ὅλων τῶν χωρῶν, ὅπου ὡμιλεῖτο ἢ κατενοεῖτο ἡ γλῶσσα τοῦ 'Ομήρου καὶ τοῦ Πλάτωνος.

Τὸ Μουσεῖον τῆς 'Αλεξανδρείας εἶναι λοιπὸν ὁ ἄμεσος διάδοχος τῶν μεγάλων σχολῶν, ποὺ ἤνθησαν εἰς τὴν 'Ελλάδα κατὰ τὴν προηγηθεῖσαν περίοδον, καὶ — τοὐλάχιστον εἰς ὅ,τι ἀφορᾷ τὰς ἀκριβεῖς ἐπιστήμας — ἐξησφάλισε τὴν ὁμαλὴν ἐξέλιξιν τῶν ἰδεῶν καὶ τῶν μεθόδων εἰς τὰ πνεύματα, ἐντὸς τῶν ὁποίων ἀνεβλάστησαν.

'Ο Εὐκλείδης

35. 'Η πρώτη ἐξέχουσα προσωπικότης, ἡ ὁποία ἀπαντᾶται εἰς τὴν ὑπ' ὄψει ἐποχήν, εἶναι συγχρόνως ὁ διασημότερος μαθηματικὸς ὅλων τῶν ἐποχῶν καὶ ὅλων τῶν ἐθνῶν: 'Ο Εὐκλείδης (δὲν πρέπει νὰ συγχέεται μὲ τὸν Εὐκλείδη τὸν Μεγαρικόν, φιλόσοφον σύγχρονον τοῦ Σωκράτους καὶ Πλάτωνος). Γεννηθεὶς εἰς τὴν 'Αλεξάνδρειαν καὶ ἀκμάσας κατὰ τὸ ἔτος 300 π.Χ., διῆγε βίον ἥσυχον ὑπὸ τὴν σκιὰν τῶν νέων Φαραώ, χρησιμοποιῶν τὸν χρόνον του ἄλλοτε εἰς ἰδίας μαθηματικὰς ἐρεύνας, ἄλλοτε εἰς περισυλλογὴν τῶν πορισμάτων προγενεστέρων ἐρευνῶν καὶ ἄλλοτε εἰς προφορικὴν διάδοσιν τούτων ἀπὸ τῆς ἕδρας, ἡ ὁποία τοῦ εἶχεν ἀνατεθῆ εἰς τὸ Μουσεῖον[25].

'Ελλείπουν ἄλλαι λεπτομερέστεραι πληροφορίαι περὶ τῆς ζωῆς του, ἂν ἐξαιρέσωμεν τὰς πολὺ ὀλίγας καὶ μικρᾶς ἀξιοπιστίας εἰδήσεις ἐξ ἀραβικῶν πηγῶν. 'Απὸ τὸν σχολιαστὴν Πάππον (3ος αἰὼν μ.Χ.) μανθάνομεν περὶ τοῦ χαρακτῆρος του, ὅτι ἦτο πρᾶος, ἰδιότης ἄλλωστε συνήθης μεταξὺ τῶν μαθηματικῶν, καὶ ὅτι ἀκόμη εἶχε μίαν ἰδιαιτέραν τάσιν νὰ μεταδίδῃ εἰς τοὺς μεταγενεστέρους τὰ ἐπιτεύγματα τῶν προγενεστέρων χωρὶς νὰ ἐπιφέρῃ εἰς αὐτὰ μεταβολάς.

'Η μεγίστη δημοτικότης τοῦ Εὐκλείδου στηρίζεται κατὰ μέγιστον μέρος εἰς τὰ Στοιχεῖα, ἕνα ἔργον, τὸ ὁποῖον ἐπὶ μακροὺς αἰῶνας ἐχρησίμευσε (καὶ δὲν ἔπαυσε νὰ εἶναι μέχρι σήμερον) τὸ βασικὸν κείμενον διδασκαλίας τοῦ μαθήματος τῆς γεωμετρίας εἰς τὰ περιφημότερα σχολεῖα. Ἕνα ἔργον, τὸ ὁποῖον εἰς ἀριθμὸν ἐκδόσεων καὶ μεταφράσεων δύναται ν' ἀνταγωνισθῇ τὴν Θείαν Κωμῳδίαν* τοῦ Δάντη καὶ ἴσως ὑπολείπεται μόνον τῆς 'Αγίας Γραφῆς.

* Προκειμένου νὰ συμπληρώσωμεν μίαν τοιαύτην σύγκρισιν, ἂς ληφθῇ ὑπ' ὄψιν, ὅτι ἡ Θεία Κωμῳδία ἐτυπώθη διὰ πρώτην φορὰν τὸ 1472, τὰ δὲ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου μόλις δέκα ἔτη βραδύτερον.

τήρει καὶ ἐκαλλιέργει μεταξὺ τῶν μακρὰν τῆς 'Αλεξανδρείας διανοουμένων, ἐπὶ 9 καὶ πλέον αἰώνας, ἐφρόντιζε μὲ ἔνθεον ζῆλον διὰ τὴν συγκέντρωσιν καὶ διάδοσιν τῶν καρπῶν τῆς ἐπιστημονικῆς ἐρεύνης ἐξ ὅλων τῶν χωρῶν, ὅπου ὡμιλεῖτο ἢ κατενοεῖτο ἡ γλῶσσα τοῦ 'Ομήρου καὶ τοῦ Πλάτωνος.

Τὸ Μουσεῖον τῆς 'Αλεξανδρείας εἶναι λοιπὸν ὁ ἄμεσος διάδοχος τῶν μεγάλων σχολῶν, ποὺ ἤνθησαν εἰς τὴν 'Ελλάδα κατὰ τὴν προηγηθεῖσαν περίοδον, καὶ — τοὐλάχιστον εἰς ὅ,τι ἀφορᾷ τὰς ἀκριβεῖς ἐπιστήμας — ἐξησφάλισε τὴν ὁμαλὴν ἐξέλιξιν τῶν ἰδεῶν καὶ τῶν μεθόδων εἰς τὰ πνεύματα, ἐντὸς τῶν ὁποίων ἀνεβλάστησαν.

'Ο Εὐκλείδης

35. 'Η πρώτη ἐξέχουσα προσωπικότης, ἡ ὁποία ἀπαντᾶται εἰς τὴν ὑπ' ὄψει ἐποχήν, εἶναι συγχρόνως ὁ διασημότερος μαθηματικὸς ὅλων τῶν ἐποχῶν καὶ ὅλων τῶν ἐθνῶν: 'Ο Εὐκλείδης (δὲν πρέπει νὰ συγχέεται μὲ τὸν Εὐκλείδη τὸν Μεγαρικόν, φιλόσοφον σύγχρονον τοῦ Σωκράτους καὶ Πλάτωνος). Γεννηθεὶς εἰς τὴν 'Αλεξάνδρειαν καὶ ἀκμάσας κατὰ τὸ ἔτος 300 π.Χ., διῆγε βίον ἥσυχον ὑπὸ τὴν σκιὰν τῶν νέων Φαραώ, χρησιμοποιῶν τὸν χρόνον του ἄλλοτε εἰς ἰδίας μαθηματικὰς ἐρεύνας, ἄλλοτε εἰς περισυλλογὴν τῶν πορισμάτων προγενεστέρων ἐρευνῶν καὶ ἄλλοτε εἰς προφορικὴν διάδοσιν τούτων ἀπὸ τῆς ἕδρας, ἡ ὁποία τοῦ εἶχεν ἀνατεθῆ εἰς τὸ Μουσεῖον[25].

'Ελλείπουν ἄλλαι λεπτομερέστεραι πληροφορίαι περὶ τῆς ζωῆς του, ἂν ἐξαιρέσωμεν τὰς πολὺ ὀλίγας καὶ μικρᾶς ἀξιοπιστίας εἰδήσεις ἐξ ἀραβικῶν πηγῶν. 'Απὸ τὸν σχολιαστὴν Πάππον (3ος αἰὼν μ.Χ.) μανθάνομεν περὶ τοῦ χαρακτῆρος του, ὅτι ἦτο πρᾷος, ἰδιότης ἄλλωστε συνήθης μεταξὺ τῶν μαθηματικῶν, καὶ ὅτι ἀκόμη εἶχε μίαν ἰδιαιτέραν τάσιν νὰ μεταδίδῃ εἰς τοὺς μεταγενεστέρους τὰ ἐπιτεύγματα τῶν προγενεστέρων χωρὶς νὰ ἐπιφέρῃ εἰς αὐτὰ μεταβολάς.

'Η μεγίστη δημοτικότης τοῦ Εὐκλείδου στηρίζεται κατὰ μέγιστον μέρος εἰς τὰ Στοιχεῖα, ἕνα ἔργον, τὸ ὁποῖον ἐπὶ μακροὺς αἰῶνας ἐχρησίμευσε (καὶ δὲν ἔπαυσε νὰ εἶναι μέχρι σήμερον) τὸ βασικὸν κείμενον διδασκαλίας τοῦ μαθήματος τῆς γεωμετρίας εἰς τὰ περιφημότερα σχολεῖα. Ἕνα ἔργον, τὸ ὁποῖον εἰς ἀριθμὸν ἐκδόσεων καὶ μεταφράσεων δύναται ν' ἀνταγωνισθῇ τὴν Θείαν Κωμῳδίαν* τοῦ Δάντη καὶ ἴσως ὑπολείπεται μόνον τῆς 'Αγίας Γραφῆς.

* Προκειμένου νὰ συμπληρώσωμεν μίαν τοιαύτην σύγκρισιν, ἂς ληφθῇ ὑπ' ὄψιν, ὅτι ἡ Θεία Κωμῳδία ἐτυπώθη διὰ πρώτην φορὰν τὸ 1472, τὰ δὲ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου μόλις δέκα ἔτη βραδύτερον.

Τὰ Στοιχεῖα διαιροῦνται εἰς δεκατρία βιβλία, περιλαμβάνοντα, ἐκτὸς πολυαρίθμων ἀρχικῶν προτάσεων, 93 προβλήματα καὶ 372 θεωρήματα. Τὸ ἔργον, περιελθὸν εἰς ἡμᾶς διὰ μέσου ἀναριθμήτων ἀντιγραφέων κατὰ κανόνα ἀναρμοδίων καὶ ἐνίοτε ἀσυνειδήτων, ὑπέστη φθορὰς καὶ ἀλλοιώσεις, αἱ ὁποῖαι ἐδόθησαν εἰς φῶς ὑπὸ τῶν εἰδικῶν τῆς κλασικῆς φιλολογίας καὶ τῶν γνωριζόντων τὴν ἀραβικὴν γλῶσσαν. Κατ' εὐτυχῆ συγκυρίαν, τὰ καθησυχαστικὰ συμπεράσματα, εἰς τὰ ὁποῖα οὗτοι ὁμοφώνως κατέληξαν, βεβαιώνουν ὅτι τὸ ὑφ' ἡμῶν κατεχόμενον κείμενον ἐλάχιστα διαφέρει τοῦ ἀρχικοῦ πρωτοτύπου, εἰς τρόπον ὥστε τοῦτο δύναται νὰ θεωρηθῇ ἐν τῷ συνόλῳ του σύμφωνον πρὸς τὸ χειρόγραφον τοῦ μεγάλου ἀλεξανδρινοῦ συγγραφέως του.

36. Ὡς εἶναι πολὺ φυσικόν, τὸ βιβλίον I τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου ἀρχίζει μὲ μίαν σειρὰν πρώτων ἐννοιῶν, ὁρισμῶν καὶ αἰτημάτων, τὰ ὁποῖα ὑπῆρξαν ἀντικείμενον ὀξυτάτης ἀναλύσεως ἐκ μέρους μαθηματικῶν καὶ φιλοσόφων καὶ ἐναντίον τῶν ὁποίων κατὰ προτίμησιν ἐστράφησαν τὰ βέλη τῆς κριτικῆς, ἥτις ἐπεσήμανε σοβαρὰ ἐλαττώματα εἰς τὴν οὐσίαν, εἰς τὴν μορφὴν καὶ εἰς τὴν διάταξιν. Μολονότι εἶναι ἀνάγκη ν' ἀναγνωρίσωμεν ὅτι τοιαῦται παρατηρήσεις δὲν στεροῦνται βάσεως, πρέπει, χάριν ἐντιμότητος καὶ δικαιοσύνης, νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι αὗται πιθανῶς δὲν θίγουν τὸν Εὐκλείδη, ἀλλὰ κάποιον πολὺ ἀφελῆ ἀντιγραφέα, ὁ ὁποῖος ἀνίκανος νὰ τροποποιήσῃ τοὺς συλλογισμοὺς τοῦ Εὐκλείδου, δὲν ἐδίστασε νὰ μεταβάλῃ τὴν σειρὰν ἐκθέσεως τῶν ἀρχικῶν ἐννοιῶν καὶ προτάσεων τῶν Στοιχείων.

Σημειωτέον ὅτι εἰς τὰς ἀρχικὰς προτάσεις ἐνυπάρχει σιωπηρῶς, ὡς ἀναγκαία συνθήκη, ἡ ὑποχρέωσις τοῦ γεωμέτρου νὰ κάμῃ χρῆσιν εἰς τὰς κατασκευὰς τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου καὶ μόνον τῶν ὀργάνων τούτων. Ἀπαντᾶται ἀκόμη τὸ περίφημον αἴτημα, τὸ πέμπτον κατὰ σειράν, «καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες». Εἶναι ἡ περίφημος crux geometrica (γεωμετρικὴ βάσανος), ἡ ὁποία, ὅπως θὰ ἴδωμεν, ὑπῆρξε τὸ κίνητρον δι' ἀναριθμήτους καὶ διαφόρους ἐρεύνας καὶ ὡδήγησε τελικῶς εἰς τὴν ἀνακάλυψιν νέων γεωμετρικῶν συστημάτων ἐντελῶς διαφόρων τοῦ Εὐκλειδείου.

Τὸ διδακτικὸν μέρος τοῦ βιβλίου I τῶν Στοιχείων περιλαμβάνει ὅλα τὰ θεωρήματα καὶ προβλήματα, ποὺ εἶναι ἐπαρκῆ καὶ ἀναγκαῖα διὰ νὰ φθάσωμεν εἰς τὸ πυθαγόρειον θεώρημα. Καὶ δὲν πρέπει νὰ ἐκπλαγῇ κανείς, ἐπειδὴ συγκαταριθμοῦμεν μερικὰ προβλήματα εἰς τὴν ἀλληλουχίαν τῶν ἀποδεικτικῶν λόγων ἑνὸς θεωρήματος, διότι ἀποτελεῖ μόνιμον τακτικὴν τοῦ Εὐκλείδου νὰ μὴ ἐξετάζῃ παρὰ σχήματα, τῶν ὁποίων ἔχει διδάξει προηγουμένως τὴν κατασκευήν, δι' ὃ καὶ εἰς τὸ ἔργον του δὲν ὑπάρχουν

«ὑποθετικὰ σχήματα». Ἂς προστεθῇ μάλιστα, ὅτι εἰς πλείστας περιπτώσεις ἡ «κατασκευή» παίζει διὰ τὸν Εὐκλείδη (καὶ ὅλους τοὺς γεωμέτρας ποὺ ἠκολούθησαν τὰ ἴχνη του) τὸν ἴδιον ρόλον, τὸν ὁποῖον ἀποδίδομεν σήμερον εἰς τὰ λεγόμενα «θεωρήματα ὑπάρξεως».

Εἰς τὸ βιβλίον II τῶν Στοιχείων ρίπτονται αἱ βάσεις τῆς μεθόδου ποὺ ὀνομάζεται κοινῶς «γεωμετρικὴ ἄλγεβρα». Ἡ μέθοδος αὕτη κατέστησεν ἱκανοὺς τοὺς ἀρχαίους νὰ λύσουν, μὲ τὴν χρῆσιν τῆς φαντασίας καὶ γεωμετρικῶν συλλογισμῶν, ὅλα τὰ προβλήματα α' καὶ β' βαθμοῦ. Διὰ νὰ δώσωμεν μίαν κατὰ προσέγγισιν ἰδέαν, ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι, ἂν a^2 παριστᾶ τὸ τετράγωνον τοῦ a καὶ ab τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς a, b, μερικαὶ ἐκ τῶν προτάσεων τοῦ Εὐκλείδου δύνανται ν' ἀναπαραχθοῦν ὑπὸ τὰς ἀκολούθους μορφάς:

$$m(a+b+c+\ldots)=ma+mb+mc+\ldots$$

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$$

$$a^2+b^2=2\left\{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right\} \text{ κλπ.}$$

Τὸ βιβλίον III διδάσκει τὰ κυριώτερα θεωρήματα τὰ ἀφορῶντα τὴν περιφέρειαν, εἰς τὰ ὁποῖα ὅμως δὲν ὑπεισέρχονται λόγοι καὶ ἀναλογίαι. Δι' ἐφαρμογῆς τῶν θεωρημάτων τούτων εἰς τὸ ἑπόμενον βιβλίον IV λύονται εὐκόλως τὰ κυριώτερα προβλήματα τὰ σχετικὰ πρὸς τὴν περιφέρειαν καὶ τὰ ἐγγεγραμμένα ἢ περιγεγραμμένα κανονικὰ πολύγωνα.

Τὸ βιβλίον V διδάσκει τὴν θεωρίαν τῶν ἀναλογιῶν διὰ μεγέθη οἱαδήποτε καὶ μὲ τοιαύτην λογικὴν αὐστηρότητα, ὥστε πολὺ δικαίως ὁ μαθηματικὸς Robert Simson (1687 - 1768), κατόπιν βαθείας μελέτης τοῦ βιβλίου τούτου, ἀπεφάνθη ὅτι «δὲν ὑπάρχει εἰς ὅλα τὰ Στοιχεῖα τίποτε τὸ εὐφυέστερον, στερεώτερον καὶ ἀκριβέστερον ἀπὸ τὴν θεωρίαν τῶν ἀναλογιῶν». Τὴν σπουδαιότητα τοῦ βιβλίου τούτου μᾶς ἐδόθη ἤδη ἡ εὐκαιρία νὰ ἐξάρωμεν (§ 31) διὰ τῆς παρατηρήσεως ὅτι τοῦτο περιέχει μίαν γενικὴν θεωρίαν τῶν μεγεθῶν. Δὲν πρέπει δὲ νὰ ἐκπληττώμεθα, διότι ὁ Εὐκλείδης ἀποβλέπων εἰς τὸν ὑψηλότατον αὐτὸν στόχον, ἐπεκαλέσθη τὰ λεπτότερα τεχνάσματα τῆς λογικῆς. Ἐξετάζοντες τὰς μὴ εὐκαταφρονήτους δυσκολίας, αἱ ὁποῖαι παρουσιάζονται κατὰ τὴν παρακολούθησιν τῶν Εὐκλειδείων συλλογισμῶν, μερικοὶ ἐκ τῶν συγχρόνων εἰσηγήθησαν τὴν ἁπλοποιητικὴν ἰδέαν ν' ἀποκαταστήσωμεν τὰ θεωρήματα τοῦ Εὐκλείδου μόνον δι' ἀκεραίους ἀριθμούς. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἔδωσαν ἀπτὴν ἀπόδειξιν τοῦ ὅτι δὲν κατενόησαν τίποτε ἀπὸ τὸν χαρακτῆρα καὶ τοὺς σκοποὺς τοῦ βιβλίου τούτου καὶ ἐπὶ πλέον δὲν ἀντελήφθησαν ὅτι, υἱοθετοῦντες μίαν τοιαύτην ἁπλοποίησιν, ἔφθανον εἰς ἰδιότητας τῶν κλασμάτων, σχεδὸν προφανεῖς.

Σημαντικὴ ἐφαρμογὴ τῶν ἀληθειῶν τοῦ V βιβλίου γίνεται ἀπὸ τὸν Εὐκλείδη εἰς τὸ VI βιβλίον τῶν Στοιχείων, ὅπου ἀναπτύσσεται ἡ θεωρία τῆς ὁμοιότητος τῶν ἐπιπέδων σχημάτων. Μὲ τὸ βιβλίον δὲ τοῦτο κλείει τὸ μέρος ἐκεῖνο τοῦ ἔργου, ποὺ ἀφορᾷ τὴν ἐπίπεδον γεωμετρίαν.

37. Τὰ ἑπόμενα τρία βιβλία εἶναι ἀφιερωμένα εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν τῶν ρητῶν ἀριθμῶν, ἡ ὁποία ἐκτίθεται μὲ αὐστηρότητα καὶ γενικότητα, μὴ ὑπολειπομένας τῶν σήμερον ἐν χρήσει. Εἶναι ἀξιοσημείωτον ὅτι ἡ παράστασις τῶν γενικῶν ἀριθμῶν δὲν γίνεται, ὅπως σήμερον, διὰ γραμμάτων, ἀλλὰ δι' εὐθυγράμμων τμημάτων, οἱ δὲ συλλογισμοὶ εἶναι ἀπόρροια ὑψηλῆς ἐμπνεύσεως. Ὑπάρχουν περιπτώσεις, εἰς τὰς ὁποίας δὲν εἶναι δύσκολον νὰ διακρίνῃ κανεὶς τὴν μέθοδον τῆς τελείας ἐπαγωγῆς εἰς τὴν πρώτην φάσιν τῆς ἐξελίξεώς της. Ὁλόκληρος ἡ ὕλη ποὺ ἐκτίθεται ἐδῶ ἔχει γίνει κλασική. Ἡ μέθοδος λόγου χάριν τοῦ προσδιορισμοῦ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου δύο ἀριθμῶν φέρει μέχρι σήμερον τὸ ὄνομα τοῦ Εὐκλείδου, ἀκόμη καὶ μετὰ τὴν ἐπέκτασιν τῆς μεθόδου εἰς τὴν ἀνάλογον ἔρευναν μεταξὺ δύο ἀκεραίων ρητῶν συναρτήσεων. Ὁμοίως ὁ σήμερον ἐν χρήσει συλλογισμός, διὰ τοῦ ὁποίου ἀποδεικνύεται ὅτι «ἡ σειρὰ τῶν πρώτων ἀριθμῶν εἶναι ἄπειρος» [26] εἶναι ἀκριβῶς ἐκεῖνος, τὸν ὁποῖον ἐδίδαξεν ὁ μέγας διδάσκαλος τοῦ Μουσείου. Ἡ μέθοδος τέλος ἡ ὑποδειχθεῖσα ὑπὸ τοῦ ἰδίου διὰ τὴν κατασκευὴν ἑνὸς τελείου ἀριθμοῦ, ἤτοι ἀριθμοῦ ἴσου πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν διαιρετῶν του, ἂν καὶ ὑπάρχει ἀμφιβολία κατὰ πόσον ὁδηγεῖ εἰς τὴν εὕρεσιν ὅλων τῶν ἀριθμῶν τοῦ εἴδους τούτου, εἶναι ἀκόμη σήμερον ἡ μοναδικὴ μέθοδος τὴν ὁποίαν γνωρίζομεν [27].

Ἀριθμητικοῦ χαρακτῆρος εἶναι ἀκόμη καὶ τὸ βιβλίον X τῶν Στοιχείων. Τοῦτο πράγματι περιέχει μίαν πλήρη θεωρίαν τῶν ἀσυμμέτρων τῶν προερχομένων ἐκ τῆς λύσεως διτετραγώνων ἐξισώσεων τῆς μορφῆς:

$$x^4 + ax^2 + b = 0$$

Πρόκειται περὶ ἑνὸς βιβλίου, τὸ ὁποῖον ὑπερέχει, εἰς ἔκτασιν καὶ εἰς δυσκολίαν, ὅλων τῶν ἄλλων καὶ εἶναι ἄξιον ἀπεριορίστου θαυμασμοῦ, ἀκόμη καὶ μετὰ τὴν ἀραίωσιν τῶν ἀναγνωστῶν του, λόγῳ τῆς διαμορφωθείσης νέας γενικῆς θεωρίας τῶν ἀσυμμέτρων. Εἶναι ἀδύνατον νὰ συνοψίσωμεν ἐδῶ μὲ ὀλίγας λέξεις τὸ περιεχόμενον τοῦ περιφήμου τούτου βιβλίου τῶν Στοιχείων. Περιοριζόμεθα μόνον νὰ μνημονεύσωμεν ὅτι ἄρχεται μὲ τὴν ἀκόλουθον σπουδαίαν πρότασιν, ἡ ὁποία ἐλαμβάνετο συνεχῶς ὑπὸ τῶν ἀρχαίων ὡς λῆμμα εἰς ὅλας τὰς μετρικὰς ἐρεύνας των: «δύο μεγεθῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, ἐὰν ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀφαιρεθῇ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ καὶ τοῦ καταλειπομένου μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίγνηται, λειφθήσεταί τι μέγεθος, ὃ ἔσται ἔλασσον τοῦ ἐκκειμένου ἐλάσσονος μεγέθους».

Τὰ τελευταῖα τρία βιβλία τῶν Στοιχείων, δηλαδὴ τὰ XI, XII καὶ XIII, εἶναι ἀφιερωμένα, κατὰ μέγιστον μέρος, εἰς τὴν γεωμετρίαν τοῦ χώρου. Ἀκριβέστερα τὸ XI διδάσκει τὰς θεμελιώδεις σχέσεις μεταξὺ εὐθειῶν καὶ ἐπιπέδων, παραλληλίαν, καθετότητα κλπ. Ἔκ τινων ἀπαντωμένων ἀτελειῶν καὶ κενῶν τεκμαίρεται ὅτι τὸ βιβλίον τοῦτο ἀποτελεῖ ἕνα πρῶτον σχέδιον καταστρώσεως τῆς ὕλης του, ἐν ἀναμονῇ τεχνικωτέρων μεταγενεστέρων ἀναθεωρήσεων.

Τὸ ἑπόμενον βιβλίον XII πραγματεύεται περὶ τῆς μετρήσεως ἐπιφανειῶν καὶ ὄγκων τῶν στερεῶν τῆς στοιχειώδους γεωμετρίας καὶ ἔχει διὰ τοῦτο ἀνεκτίμητον ἀξίαν, ὄχι μόνον διὰ τὰς πολυαρίθμους σημαντικὰς ἀληθείας ποὺ διδάσκει, ἀλλ' ἐπίσης διότι εἶναι τὸ πρῶτον βιβλίον εἰς τὸ ὁποῖον ὀφείλουν νὰ προστρέξουν ὅσοι ἐπιθυμοῦν νὰ ἐξοικειωθοῦν μὲ τὰς μεθόδους τετραγωνισμῶν καὶ κυβισμῶν τῶν ἀρχαίων, ἀγνοούντων τὴν ἀπειροστικὴν ἀνάλυσιν.

Εἰς τὰ κυρτὰ κανονικὰ πολύεδρα εἶναι ἀφιερωμένον τὸ βιβλίον XIII, τὸ καὶ τελευταῖον τῶν Στοιχείων. Τὸ βιβλίον κλείει μὲ τὴν ἀπόδειξιν τῆς ἀνυπαρξίας ἑτέρων κανονικῶν πολυέδρων πέραν ἐκείνων, τὰ ὁποῖα ἀνεκάλυψεν ὁ Πυθαγόρας καὶ κατέστησε δημοφιλῆ ὁ Πλάτων. Τὸ γεγονὸς τοῦτο ἤγαγε μερικοὺς εἰς τὸ συμπέρασμα, ὅτι τελικὸς σκοπὸς τοῦ μεγάλου ἔργου τοῦ Εὐκλείδου ἦτο ἀκριβῶς ἡ κατασκευὴ τῶν περιωνύμων κοσμικῶν ἢ πλατωνικῶν σχημάτων[38]. Τὴν γνώμην αὐτήν, φυσικά, δὲν συμμερίζονται ὅσοι σκέπτονται, ὅπως καὶ ἐγώ, ὅτι οἱαδήποτε ἐπιστημονικὴ πραγματεία ἀποτελεῖ καθ' ἑαυτὴν ἕνα αὐτοσκοπόν.

Ἐὰν κάμωμεν μίαν σύγκρισιν μεταξὺ τῆς ὕλης τῆς περιεχομένης εἰς τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου καὶ τοῦ συνόλου τῶν γεωμετρικῶν γνώσεων, ποὺ κατεῖχον οἱ προηγηθέντες γεωμέτραι, διαπιστώνομεν εὐκόλως ὅτι δὲν ὀφείλονται εἰς τὸν Εὐκλείδη τὰ βιβλία I, II καὶ IV, τὰ ὁποῖα ἐν τῷ συνόλῳ των πρέπει νὰ ἦσαν γνωστὰ εἰς τοὺς Πυθαγορείους. Οὔτε τὸ βιβλίον III, τὸ ὁποῖον, κατὰ πᾶσαν πιθανότητα, εἶναι πρώτιστον ἔργον τῶν γεωμετρῶν τῶν συγχρόνων τοῦ Ἱπποκράτους τοῦ Χίου (V αἰὼν π.Χ.), οὔτε τὸ βιβλίον V, τὸ ὁποῖον γνωρίζομεν ὅτι εἶναι καρπὸς τῶν θαυμασίων ἐργασιῶν τοῦ Εὐδόξου.

Εἰς τὸ βιβλίον VI ὁ Εὐκλείδης πιθανῶς συνέβαλεν εἰς τὴν μετὰ πάσης αὐστηρότητος ἀποκατάστασιν ἀληθειῶν ὑπαγορευομένων ἐκ τῆς ἐμπειρίας, εἰς δὲ τὰ τρία ἑπόμενα, VII, VIII καὶ IX, περιωρίσθη εἰς διάρθρωσιν καὶ συμπλήρωσιν ἀληθειῶν γνωστῶν ἤδη εἰς τὴν Σχολὴν τοῦ Πυθαγόρου.

Τὸ βιβλίον X περιέχει κατὰ μέγιστον μέρος ἐργασίας τοῦ Στοιχειωτοῦ, κατ' ἐλάχιστον δὲ τοῦ Θεαιτήτου καὶ τῶν πρώτων Πυθαγορείων, ἐνῷ ἡ ὕλη τῶν τριῶν τελευταίων βιβλίων, XI, XII καὶ XIII, ἐμπνευσμένη ἀπὸ

τὴν Πυθαγόρειον καὶ Πλατωνικὴν διδασκαλίαν, ἔχει ἀντληθῆ ἀπὸ ἐργασίας τῶν Ἀρχύτα, Θεαιτήτου, Ἀρισταίου καὶ ἄλλων ἴσως, τῶν ὁποίων τὰ ὀνόματα, διὰ νὰ χρησιμοποιήσω τὴν φράσιν ἑνὸς μεγάλου ποιητοῦ, «ἐγράφησαν εἰς τὸ νερό».

Ἀλλὰ οὔτε καὶ ἡ φιλάνθρωπος ἰδέα τῆς συγκροτήσεως εἰς ἕνα σύστημα διδασκαλίας τοῦ κτηθέντος μαθηματικοῦ θησαυροῦ ἀνήκει, ὅπως γνωρίζομεν, εἰς τὸν Εὐκλείδην, οὔτε καὶ ἡ αὐστηρὰ ὁμοιομορφία τῆς δομῆς τοῦ ἔργου εἶναι ἀποκλειστικῶς εὕρημα ἰδικόν του. Περὶ τῆς τελευταίας ταύτης δὲν θὰ παραλείψωμεν νὰ κάμωμεν ἀμέσως λόγον, μὲ πᾶσαν δυνατὴν συντομίαν.

Δι' ἕκαστον θεώρημα, μετὰ τὴν γενικήν του διατύπωσιν, ὑποδεικνύονται, ὅπου εἶναι ἀνάγκη, αἱ συνθῆκαι τὰς ὁποίας πρέπει νὰ πληροῦν τὰ δεδομένα διὰ τὸ κῦρος τοῦ θεωρήματος. Ἀκολουθεῖ ἡ ἐπανάληψις τῆς ἐκφωνήσεως ἐπὶ τοῦ σχήματος, κατόπιν ἔρχεται ἡ «κατασκευή», τουτέστιν ἡ χάραξις τῶν βοηθητικῶν γραμμῶν, καὶ μετ' αὐτὴν ἡ «ἀπόδειξις» ἡ ὁποία τελειώνει μὲ τὴν ἐπανάληψιν τῆς ἐκφωνήσεως, ἐπισφραγιζομένην μὲ τὰς καθιερωμένας λέξεις «ὅπερ ἔδει δεῖξαι». Ἀνάλογος τακτικὴ τηρεῖται καὶ διὰ τὰ προβλήματα, τὰ ὁποῖα τελειώνουν ὁμοιοτύπως μὲ τὴν φράσιν «ὅπερ ἔδει ποιῆσαι». Αἱ καταληκτικαὶ αὐταὶ φράσεις ἐχρησίμευον εἰς τὴν ἀρχαιότητα πρὸς τυπικὴν διάκρισιν τῆς λογικῆς φύσεως τοῦ ἐκτιθεμένου ζητήματος (θεώρημα ἢ πρόβλημα), ἐπέτρεψαν δὲ εἰς τοὺς νεωτέρους ἐκδότας τῶν Στοιχείων νὰ θέσουν ἐπὶ κεφαλῆς τῶν προτάσεων τὰς λέξεις Θεώρημα ἢ Πρόβλημα, αἱ ὁποῖαι δὲν ὑφίσταντο εἰς τὸ πρωτότυπον.

38. Μολονότι ὁ Εὐκλείδης εἶναι γνωστὸς εἰς τοὺς κύκλους τῶν μαθηματικῶν ἀποκλειστικῶς ὡς συγγραφεὺς τῶν Στοιχείων, ἐν τούτοις ὀφείλονται εἰς αὐτὸν καὶ ἄλλα ἔργα ὑψηλοτέρας στάθμης, τὰ ὁποῖα διὰ τοῦτο περιελαμβάνοντο, τοὐλάχιστον ἐν μέρει, μεταξὺ τῶν κειμένων ἐκείνων, τὰ ὁποῖα, κατὰ τὰ λεγόμενα τοῦ σχολιαστοῦ Πάππου, συνιστῶντο καὶ προσεφέροντο εἰς ἐκείνους, οἱ ὁποῖοι ἀφοῦ διεξήρχοντο εὐδοκίμως τὰ στοιχεῖα τῆς γεωμετρίας, κατείχοντο ἀπὸ τὴν φιλοδοξίαν νὰ συνεχίσουν τὴν πτῆσιν των πρὸς τὰς ὑψηλοτέρας περιοχὰς τῆς ἐπιστήμης τοῦ διαστήματος. Ἐκ τῶν εὐκλειδείων κειμένων, ποὺ ἀνήκουν εἰς τὴν «συλλογὴν γραπτῶν ἀναλυτικῆς φύσεως», ὑπέκυψαν εἰς τὴν καταλυτικὴν δύναμιν τοῦ χρόνου ὅλα πλὴν ἑνός, φέροντος τὸν τίτλον Δεδομένα. Τὸ ἔργον πραγματεύεται μίαν εἰδικὴν κατηγορίαν προτάσεων, ἀποκαλουμένων ἀκριβῶς μὲ τὸ ὄνομα τοῦτο, διότι ἑκάστη πρότασις ἀφορᾷ ἕνα σχῆμα, τοῦ ὁποίου δίδονται ὡρισμένα στοιχεῖα, «δεδομένα» κατὰ σχῆμα («εἶδος», ὅπως προτιμᾷ ὁ Εὐκλείδης), κατὰ θέσιν ἢ κατὰ μέγεθος. Ἡ πρότασις ἀποδεικνύεται

μὲ τὴν ἔκθεσιν τῆς κατασκευῆς τοῦ σχήματος, εἰς τὸ ὁποῖον αὕτη ἀναφέρεται. Καὶ διὰ νὰ διευκρινήσωμεν καλύτερα τὸν χαρακτῆρα τῶν «Δεδομένων», ἀναφέρομεν τὰς ἀκολούθους ἐκφωνήσεις τοῦ Εὐκλείδου:

«Ἐὰν τρίγωνον ἔχῃ μίαν γωνίαν δεδομένην καὶ ἔχῃ δοθῆ ὁ λόγος τῶν πλευρῶν, αἱ ὁποῖαι περιέχουν τὴν γωνίαν, τότε τὸ εἶδος τοῦ τριγώνου εἶναι δεδομένον».

«Ἐὰν τρίγωνον ἔχῃ μίαν γωνίαν δεδομένην, τότε καὶ ὁ λόγος τοῦ ἐμβαδοῦ του πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τῶν περιεχουσῶν τὴν γωνίαν πλευρῶν εἶναι δεδομένος».

Πρόκειται λοιπὸν περὶ προτάσεων δυναμένων νὰ χαρακτηρισθοῦν ὡς «θεωρήματα ὑπάρξεως», ὑπὸ εὐρυτέραν ἔννοιαν, λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν, ὅτι εἰς πολλὰς περιπτώσεις ἀποκαθίσταται σιωπηρῶς ἡ ὕπαρξις οὐχὶ μιᾶς γεωμετρικῆς ὀντότητος, ἀλλὰ μόνον μερικῶν χαρακτηριστικῶν ἰδιοτήτων ταύτης. Ὅταν αἱ προτάσεις τοῦ Εὐκλείδου θεωρηθοῦν ὑπ' αὐτὴν τὴν ἔννοιαν, κατανοεῖται πλήρως ὁ ἰσχυρισμὸς τοῦ Πάππου καὶ ἑνὸς ἄλλου σχολιαστοῦ, τοῦ ἐκ Νεαπόλεως Μαρίνου (5ος αἰὼν μ.Χ., εἰς τὸν ὁποῖον ὀφείλεται μία ἀξιόλογος ἔκδοσις μετὰ προλόγου τοῦ περὶ οὗ ὁ λόγος ἔργου), κατὰ τὸν ὁποῖον τὸ ἔργον τοῦτο τοῦ Εὐκλείδου ἦτο χρησιμώτατον εἰς ὅλους ἐκείνους, οἱ ὁποῖοι ἐφιλοδόξουν νὰ ἐξοικειωθοῦν μὲ τὴν δύσκολον τέχνην νὰ λύουν γεωμετρικὰ προβλήματα. Τὸ ἔργον περιλαμβάνει περὶ τὰς ἑκατὸν προτάσεις (ἐκφραζόμεθα κατὰ τὸν ὀλίγον ἀόριστον αὐτὸν τρόπον ἐπειδὴ μεταξὺ τῶν διαφόρων χειρογράφων τῶν Δεδομένων δὲν ὑπάρχει ἀπόλυτος ὁμοφωνία), μερικαὶ τῶν ὁποίων ἐπανευρίσκονται ὑπὸ ἄλλην μορφὴν εἰς νεώτερα βιβλία γεωμετρίας, ἐνῷ ἄλλαι θὰ ἦσαν ἄξιαι νὰ λάβουν ἐπίσης θέσιν εἰς αὐτά, ἔστω καὶ ὑπὸ μορφὴν ἀσκήσεων.

Ἕνα ἄλλο ἔργον τοῦ Εὐκλείδου Περὶ διαιρέσεων, ἐχρησίμευεν, ὅπως καὶ τὰ Δεδομένα, εἰς συμπλήρωσιν τῶν Στοιχείων, ἀφοῦ ὁλόκληρον ἦτο ἀφιερωμένον εἰς μίαν ἐνδιαφέρουσαν κατηγορίαν προβλημάτων, ζητούντων νὰ διαιρεθῇ — δι' εὐθειῶν πληρουσῶν ὡρισμένας συνθήκας — δοθὲν ἐπίπεδον σχῆμα εἰς μέρη ἔχοντα πρὸς ἄλληλα δεδομένας ἐκ τῶν προτέρων σχέσεις. Τὸ ἑλληνικὸν πρωτότυπον κείμενον δὲν ἀνευρέθη μέχρι σήμερον, ἀλλ' ἐκ τῶν πολλῶν καὶ ἀσφαλῶν ἰχνῶν, τὰ ὁποῖα τὸ ἔργον τοῦτο κατέλιπεν εἰς τὴν ἀραβικὴν βιβλιογραφίαν, κατωρθώθη ὄχι μόνον νὰ σχηματίσωμεν καθαρὰν ἰδέαν περὶ αὐτοῦ, ἀλλὰ κατωρθώθη ἀκόμη καὶ ἡ ἀνακατασκευή του μὲ πιθανὴν ἀκρίβειαν.

Ἀνάλογος ἦτο ἡ θέσις, τὴν ὁποίαν κατεῖχε καὶ ἕνα ἄλλο σημαντικώτατον ἔργον τοῦ Εὐκλείδου, ἐξαφανισθὲν δυστυχῶς ἀπὸ τὴν μαθηματικὴν βιβλιογραφίαν, ἐπὶ τοῦ ὁποίου ὁ Πάππος παρέχει ἐκτεταμένας πληροφορίας, αἱ ὁποῖαι ὅμως περισσότερον ἐξάπτουν παρὰ ἱκανοποιοῦν τὴν περιέργειαν νὰ γνωρίσωμεν τὸ ἔργον πλήρως. Ὁ τίτλος του εἶναι Πορί-

σματα, ἐπειδὴ οὕτω ἐκαλοῦντο εἰδικοῦ τύπου προτάσεις, περιεχόμεναι εἰς τὸ ἔργον τοῦτο. Διότι, πρέπει νὰ σημειώσωμεν, ἡ λέξις «πόρισμα» εἶχεν εἰς τὴν ἀρχαιότητα δύο διακεκριμένας σημασίας· αὐτὴν ποὺ τῆς ἀποδίδομεν καὶ σήμερον, δηλαδὴ ὡς πρότασιν, τῆς ὁποίας ἡ ἀλήθεια ἀπορρέει ἀμέσως ἔκ τινος θεωρήματος, ἀλλὰ καὶ μίαν ἄλλην, διὰ τὸν καθορισμὸν τῆς ὁποίας δεινοὶ μαθηματικοὶ εὐρυμαθέστατοι ὑπέβαλον εἰς ὀξυτάτην ἀνάλυσιν τὰ ὑπὸ τοῦ Πάππου γραφόμενα ἐν σχέσει πρὸς τὸ ἔργον αὐτὸ τοῦ Εὐκλείδου. Τοιουτοτρόπως ἔφθασαν εἰς τὸ συμπέρασμα, ὅτι τὰ πορίσματα, κατ' ἀναλογίαν πρὸς τὰ δεδομένα, εἶναι θεωρήματα ἀτελῆ, τὰ ὁποῖα ἐκφράζουν μερικὰς σχέσεις μεταξὺ μεταβαλλομένων καθ' ὡρισμένον νόμον στοιχείων, τὰς σχέσεις τῶν ὁποίων πρέπει νὰ συμπληρώσωμεν, ἵνα προσδιορίσωμεν τὸ μέγεθος καὶ τὴν θέσιν μερικῶν σχημάτων ἀπορρεόντων ἐκ τῆς ὑποθέσεως καὶ συμπληρούντων οὕτω ἕνα σύνηθες θεώρημα. Τὸ πόρισμα λοιπὸν μετέχει καὶ τοῦ θεωρήματος καὶ τοῦ προβλήματος· ἡ δὲ λύσις του ἀπαιτεῖ τόσον μίαν ἀπόδειξιν ὅσον καὶ μίαν κατασκευήν. Ἔστω ὡς παράδειγμα ἡ ἀκόλουθος πρότασις:

«Ἐὰν πλῆρες ν-πλευρον μεταβάλλει σχῆμα κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε αἱ πλευραί του νὰ στρέφωνται περὶ ν σημεῖα συγγραμμικὰ καὶ ὅτι $\nu-1$ ἐκ τῶν $\nu(\nu-1)/2$ κορυφῶν του διαγράφουν ἀνὰ μίαν εὐθεῖαν ἕκαστον, αἱ ὑπόλοιποι κορυφαί του $(\nu-1)(\nu-2)/2$ διαγράφουν ἰσαρίθμους εὐθείας».

Ἡ ἀνωτέρω πρότασις εἶναι ἕνα πόρισμα, τὸ ὁποῖον δὲν ἀπαιτεῖ μόνον τὴν ἀπόδειξιν τῆς ἀληθείας του, ἀλλὰ καὶ τὸν προσδιορισμὸν τῆς θέσεως τῶν εὐθειῶν, τὰς ὁποίας διαγράφουν αἱ ἀδέσμευτοι κορυφαὶ τοῦ πλήρους ν-πλεύρου.

Πολλοὶ διάσημοι μαθηματικοὶ ἐπεχείρησαν ν' ἀνακατασκευάσουν μὲ εἰκασίας τὸ ἀπολεσθὲν ἔργον, μεταξὺ δὲ τούτων ἀρκεῖ νὰ μνημονεύσωμεν τὸν πλέον πρόσφατον, M. Chasles, ὁ ὁποῖος ἐχρησιμοποίησεν ἐπωφελῶς ὅσα συμπεράσματα εἶχον προηγουμένως ἀποκρυσταλλωθῆ. Μολαταῦτα τὸ ἔργον του, ἀναμφισβητήτως ἄριστον ὡς προσωπικὴ ἐργασία, πόρρω ἀπέχει ἀπὸ τοῦ ν' ἀποτελῇ ἱκανοποιητικὴν ἀποζημίωσιν διὰ τὴν ἀπώλειαν τοῦ πρωτοτύπου, τὸ ὁποῖον, εἰκάζεται, ὑπερέβαινε κατὰ πολὺ τὸ φανταστικὸν ἀνάτυπον. Ἂς προσθέσωμεν, ὅτι εἰς τὸν Γάλλον γεωμέτρην ἀνήκει ἡ τιμή, ὅτι ἡ εἰδικὴ ἔννοια καὶ ἡ λέξις πόρισμα ἐπανεμφανίζονται εἰς σύγχρονα συγγράμματα *, ὅπου μερικὰ θεωρήματα παρουσιάζονται ἀκριβῶς ὑπὸ τὴν ἰδιαιτέραν αὐτὴν ἄποψιν.

Ἕνα τρίτον ἀπολεσθὲν ἔργον τοῦ Εὐκλείδου φαίνεται, ἐκ τοῦ τίτλου του Ψευδάρια, ὅτι ἀπετέλει μίαν συλλογὴν παραδόξων ἢ παραλογισμῶν, σκοπούντων τὴν ἐξάσκησιν τῆς νεολαίας εἰς τὴν ἀκρίβειαν

* Ἀρκεῖ ν' ἀναφέρωμεν τὴν «Εἰσαγωγὴν εἰς μίαν γεωμετρικὴν θεωρίαν τῶν ἐπιπέδων καμπύλων» τοῦ L. Cremona.

τοῦ συλλογίζεσθαι. Δυστυχῶς, ἀπὸ τὸ ἔργον αὐτὸ δὲν διεσώθη τίποτε, τὸ ὁποῖον νὰ δύναται ν' ἀναφερθῇ ὡς παράδειγμα.

Ὑπὸ ἔτι χειροτέρας συνθήκας εὑρισκόμεθα, ἀναφορικῶς πρὸς ἕνα ἄλλο ἔργον τοῦ Εὐκλείδου ὑπὸ τὸν τίτλον Τόποι πρὸς ἐπιφανείᾳ. Εὐρεῖα ποικιλία γνωμῶν, ὅσον ἀφορᾷ τὸ περιεχόμενον τοῦ ἔργου τούτου, κατοπτρίζεται εἰς τὰς διαφόρους ὑποθέσεις, αἱ ὁποῖαι διετυπώθησαν ὑπὸ ἁρμοδίων μελετητῶν.

Ὅσον ἀφορᾷ, τέλος, μίαν πραγματείαν ὑπὸ τὸν τίτλον Κωνικά, ἀποδιδομένην ἐπίσης εἰς τὸν Εὐκλείδη, δὲν μᾶς εἶναι τίποτε γνωστόν, πλὴν τοῦ ὅτι αἱ ἔνδοξοι καμπύλαι, αἱ ἀποτελοῦσαι τὴν Μεναίχμιον τριάδα, ἐλαμβάνοντο διὰ τομῆς ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου ὑπὸ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὴν γενέτειραν, διὸ καὶ ἐχαρακτηρίζοντο μὲ τὰ παλαιὰ ὀνόματα «ὀξυγωνίου, ὀρθογωνίου, ἀμβλυγωνίου κώνου τομαί».

39. Τὰ ἔργα ποὺ ἐμνημονεύσαμεν μέχρι τοῦδε ἀφοροῦν ἀποκλειστικῶς δύο ἀπὸ τὰ 4 μαθήματα τοῦ μεσαιωνικοῦ ἐκπαιδευτικοῦ προγράμματος, τοῦ γνωστοῦ ὑπὸ τὸν λατινικὸν τίτλον quadrivium (τετραόδιον ἢ τετράοδος), δηλαδὴ τὴν Ἀριθμητικὴν καὶ τὴν Γεωμετρίαν. Δὲν παρέλειψεν ὅμως ὁ μέγας ἀλεξανδρινὸς καὶ τὰ ὑπόλοιπα δύο, δηλαδὴ τὴν Μουσικὴν καὶ τὴν Ἀστρονομίαν. Τοῦτο ἀποδεικνύεται ἀφ' ἑνὸς μὲν ἀπὸ ἕνα ἀπόσπασμα γύρω ἀπὸ τὴν μαθηματικὴν θεωρίαν τοῦ ἤχου[39] καὶ ἀφ' ἑτέρου ἀπὸ ἕνα βιβλίον, τιτλοφορούμενον Φαινόμενα, τὸ ὁποῖον εἶναι κατ' οὐσίαν μία πραγματεία κοσμογραφίας, συντεταγμένη μὲ τὴν ἰδίαν αὐστηρῶς ἀκριβολογημένην μορφήν, τὴν ὁποίαν ὁ διάσημος καθηγητὴς τοῦ Μουσείου εἶχεν ἐφαρμόσει εἰς ὅλας τὰς ἄλλας ἐργασίας του, ποὺ ἔφθασαν μέχρις ἡμῶν.

Διὰ μέσου τῶν Ἀράβων ἔφθασεν ἀκόμη μέχρις ἡμῶν ἕνα ἀπόσπασμα ἐπὶ τοῦ μοχλοῦ, ἀποδιδόμενον εἰς τὸν Εὐκλείδη. Τέλος εἰς τὴν ἑλληνικὴν βιβλιογραφίαν ἀναφέρονται ὡς ἔργα του δύο πραγματεῖαι σχετικαὶ πρὸς τὴν μαθηματικὴν θεωρίαν τῶν φωτεινῶν φαινομένων. Τὸ ἕνα τιτλοφορεῖται Ὀπτικὰ καὶ περιέχει τὰς θεμελιώδεις προτάσεις τῆς γεωμετρικῆς ὀπτικῆς, θεμελιουμένας ἀφ' ἑνὸς μὲν ἐπὶ τῆς ὑποθέσεως τοῦ Πλάτωνος, καθ' ἣν ἡ ὅρασις συντελεῖται δι' ἀκτίνων ἐκπορευομένων ἐκ τοῦ ὀφθαλμοῦ, καὶ ἀφ' ἑτέρου ἐπὶ μερικῶν αἰτημάτων, τὰ ὁποῖα λαμβάνονται σήμερον ὡς θεμέλιον τῆς Προοπτικῆς.

Τὸ ἄλλο, τιτλοφορούμενον Κατοπτρικά, ἀφορᾷ τὰ φαινόμενα τῆς ἀνακλάσεως τοῦ φωτὸς ἐπὶ ἐπιπέδων κατόπτρων. Τοῦτο ἀσφαλῶς δὲν εἶναι ἔργον γνήσιον τοῦ Εὐκλείδου, τὸ πολὺ δύναται ν' ἀποτελῇ μεταγενεστέραν συγκέντρωσιν ὑλικοῦ, ὀφειλομένου εἰς τὸν μεγάλον γεωμέτρην τῆς Ἀλεξανδρείας.

Μολονότι αἱ πλέον πρόσφατοι μαθηματικαὶ θεωρίαι τοῦ φωτός, στηριζόμεναι ἐπὶ τοῦ πειράματος, ἐξετόπισαν τ' ἀνωτέρω ἔργα τοῦ Εὐκλείδου ἀπὸ τὰς βιβλιοθήκας τῶν ἐρευνητικῶν κέντρων, ἐν τούτοις ἦτο καθῆκον μας νὰ τὰ μνημονεύσωμεν διὰ νὰ καταδειχθῇ, πρῶτον, ὅτι ὁ μέγας διδάσκαλος περιέλαβεν εἰς τὸν εὐρὺν κύκλον τῆς διδακτικῆς του δραστηριότητος ὅλας τὰς φυσικομαθηματικὰς ἐπιστήμας τῆς ἐποχῆς του καὶ διὰ νὰ τονίσωμεν, δεύτερον, ὅτι εἰς αὐτὸν πιθανώτατα ὀφείλεται τὸ γεγονὸς ὅτι — ὅπως θὰ ἴδωμεν — εἰς τὰ καλύτερα γενικὰ διδακτικὰ βιβλία τῶν μαθηματικῶν, ποὺ ἐδημοσιεύθησαν κατὰ τοὺς XVII καὶ XVIII αἰῶνας, δὲν ἐλλείπουν ἐκτεταμένα κεφάλαια ἀφιερωμένα εἰς τὰ ὀπτικὰ φαινόμενα τὰ ἀπορρέοντα ἀπὸ τὴν εὐθύγραμμον διάδοσιν τοῦ φωτός.

Ὁ Ἀρχιμήδης

40. Ἐνῷ ὁ γεωμέτρης μὲ τὴν ἐξέχουσαν ἐπιστημονικὴν παραγωγήν, περὶ τῆς ὁποίας ὡμιλήσαμεν πρὸ ὀλίγου, ἀποτελεῖ τὸν γνησιότερον καὶ καθαρότερον τύπον διδασκάλου καὶ ἐκπαιδευτικοῦ συγγραφέως, ἐκεῖνος τὸν ὁποῖον ἡ χρονολογικὴ τάξις ἐπιβάλλει τώρα νὰ ἐξετάσωμεν παρουσιάζεται ὡς περίλαμπρον παράδειγμα πρωτοτύπου ἐρευνητοῦ, ὁ ὁποῖος, μὴ ἐνδιαφερόμενος ποσῶς νὰ ὁμαλύνῃ τὸν δρόμον εἰς τοὺς ἀρχαρίους, ἀπορροφᾶται ἀποκλειστικῶς καὶ μόνον εἰς τὴν ἀποκάλυψιν νέων ἀληθειῶν πρὸς ἱκανοποίησιν ἑαυτοῦ καὶ τῶν ὡρίμων ἤδη διανοουμένων. Αὐτὸς εἶναι καὶ ὁ λόγος, διὰ τὸν ὁποῖον, ἐνῷ ἡ κατανόησις τοῦ Εὐκλείδου δὲν ἀπαιτεῖ ἐξαιρετικὴν προπαιδείαν καὶ εὐφυΐαν, τὰ προϊόντα τῆς μαθηματικῆς σκέψεως, τὰ ὁποῖα πρόκειται τώρα νὰ ἐξετάσωμεν, εἶναι προσιτὰ ἀποκλειστικῶς καὶ μόνον εἰς ἀναγνώστας ὑψηλῆς πνευματικῆς στάθμης.

Συγγραφεὺς τούτων εἶναι ὁ Ἀ ρ χ ι μ ή δ η ς, γεννηθεὶς τὸ 287 π.Χ. εἰς Συρακούσας, γεγονὸς ποὺ ἔδωσε λαβὴν κάποτε εἰς μερικοὺς νὰ τὸν θεωρήσουν, ὅπως συνέβη καὶ μὲ τὸν Ἀρχύταν, ὡς Ἰταλὸν γεωμέτρην. Γνώμη τὴν ὁποίαν βεβαίως οἱ πλεῖστοι δὲν συμμερίζονται, γνωστοῦ ὄντος ὅτι τὰ ἔργα του, καίτοι ἀνεφάνησαν εἰς ἐποχὴν ὑψηλῶν πτήσεων τῶν ρωμαϊκῶν ἀετῶν, ἐγράφησαν εἰς καθαρὰν δωρικὴν διάλεκτον καὶ διὰ τοῦτο ἀνήκουν, χωρὶς καμμίαν ἀμφισβήτησιν εἰς τὴν ἑλληνικὴν γραμματείαν. Κατά τινας, πατήρ του ἦτο ὁ ἀστρονόμος Φειδίας, γνωστὸς ἀπὸ μίαν προσπάθειάν του νὰ προσδιορίσῃ τὴν σχέσιν τῶν μεγεθῶν μεταξὺ Ἡλίου καὶ Σελήνης. Ὅλοι περαιτέρω συμφωνοῦν μὲ τὴν γνώμην ὅτι ὁ Ἀρχιμήδης συνεδέετο διὰ δεσμῶν συγγενείας καὶ φιλίας μὲ τὸν τότε βασιλικὸν οἶκον τῆς γενεθλίου του πόλεως.

Μετέβη δι' ἐκπαιδευτικοὺς σκοποὺς εἰς Αἴγυπτον, ἐλθὼν εἰς ἐπαφήν, ὄχι βέβαια μὲ τὸν Εὐκλείδη, ποὺ εἶχεν ἐν τῷ μεταξὺ ἀποθάνει, ἀλλὰ μὲ

Μολονότι αἱ πλέον πρόσφατοι μαθηματικαὶ θεωρίαι τοῦ φωτός, στηριζόμεναι ἐπὶ τοῦ πειράματος, ἐξετόπισαν τ' ἀνωτέρω ἔργα τοῦ Εὐκλείδου ἀπὸ τὰς βιβλιοθήκας τῶν ἐρευνητικῶν κέντρων, ἐν τούτοις ἦτο καθῆκον μας νὰ τὰ μνημονεύσωμεν διὰ νὰ καταδειχθῇ, πρῶτον, ὅτι ὁ μέγας διδάσκαλος περιέλαβεν εἰς τὸν εὐρὺν κύκλον τῆς διδακτικῆς του δραστηριότητος ὅλας τὰς φυσικομαθηματικὰς ἐπιστήμας τῆς ἐποχῆς του καὶ διὰ νὰ τονίσωμεν, δεύτερον, ὅτι εἰς αὐτὸν πιθανώτατα ὀφείλεται τὸ γεγονὸς ὅτι — ὅπως θὰ ἴδωμεν — εἰς τὰ καλύτερα γενικὰ διδακτικὰ βιβλία τῶν μαθηματικῶν, ποὺ ἐδημοσιεύθησαν κατὰ τοὺς XVII καὶ XVIII αἰῶνας, δὲν ἐλλείπουν ἐκτεταμένα κεφάλαια ἀφιερωμένα εἰς τὰ ὀπτικὰ φαινόμενα τὰ ἀπορρέοντα ἀπὸ τὴν εὐθύγραμμον διάδοσιν τοῦ φωτός.

Ὁ Ἀρχιμήδης

40. Ἐνῷ ὁ γεωμέτρης μὲ τὴν ἐξέχουσαν ἐπιστημονικὴν παραγωγήν, περὶ τῆς ὁποίας ὡμιλήσαμεν πρὸ ὀλίγου, ἀποτελεῖ τὸν γνησιότερον καὶ καθαρότερον τύπον διδασκάλου καὶ ἐκπαιδευτικοῦ συγγραφέως, ἐκεῖνος τὸν ὁποῖον ἡ χρονολογικὴ τάξις ἐπιβάλλει τώρα νὰ ἐξετάσωμεν παρουσιάζεται ὡς περίλαμπρον παράδειγμα πρωτοτύπου ἐρευνητοῦ, ὁ ὁποῖος, μὴ ἐνδιαφερόμενος ποσῶς νὰ ὁμαλύνῃ τὸν δρόμον εἰς τοὺς ἀρχαρίους, ἀπορροφᾶται ἀποκλειστικῶς καὶ μόνον εἰς τὴν ἀποκάλυψιν νέων ἀληθειῶν πρὸς ἱκανοποίησιν ἑαυτοῦ καὶ τῶν ὡρίμων ἤδη διανοουμένων. Αὐτὸς εἶναι καὶ ὁ λόγος, διὰ τὸν ὁποῖον, ἐνῷ ἡ κατανόησις τοῦ Εὐκλείδου δὲν ἀπαιτεῖ ἐξαιρετικὴν προπαιδείαν καὶ εὐφυΐαν, τὰ προϊόντα τῆς μαθηματικῆς σκέψεως, τὰ ὁποῖα πρόκειται τώρα νὰ ἐξετάσωμεν, εἶναι προσιτὰ ἀποκλειστικῶς καὶ μόνον εἰς ἀναγνώστας ὑψηλῆς πνευματικῆς στάθμης.

Συγγραφεὺς τούτων εἶναι ὁ Ἀ ρ χ ι μ ή δ η ς, γεννηθεὶς τὸ 287 π.Χ. εἰς Συρακούσας, γεγονὸς ποὺ ἔδωσε λαβὴν κάποτε εἰς μερικοὺς νὰ τὸν θεωρήσουν, ὅπως συνέβη καὶ μὲ τὸν Ἀρχύταν, ὡς Ἰταλὸν γεωμέτρην. Γνώμη τὴν ὁποίαν βεβαίως οἱ πλεῖστοι δὲν συμμερίζονται, γνωστοῦ ὄντος ὅτι τὰ ἔργα του, καίτοι ἀνεφάνησαν εἰς ἐποχὴν ὑψηλῶν πτήσεων τῶν ρωμαϊκῶν ἀετῶν, ἐγράφησαν εἰς καθαρὰν δωρικὴν διάλεκτον καὶ διὰ τοῦτο ἀνήκουν, χωρὶς καμμίαν ἀμφισβήτησιν εἰς τὴν ἑλληνικὴν γραμματείαν. Κατά τινας, πατήρ του ἦτο ὁ ἀστρονόμος Φειδίας, γνωστὸς ἀπὸ μίαν προσπάθειάν του νὰ προσδιορίσῃ τὴν σχέσιν τῶν μεγεθῶν μεταξὺ Ἡλίου καὶ Σελήνης. Ὅλοι περαιτέρω συμφωνοῦν μὲ τὴν γνώμην ὅτι ὁ Ἀρχιμήδης συνεδέετο διὰ δεσμῶν συγγενείας καὶ φιλίας μὲ τὸν τότε βασιλικὸν οἶκον τῆς γενεθλίου του πόλεως.

Μετέβη δι' ἐκπαιδευτικοὺς σκοποὺς εἰς Αἴγυπτον, ἐλθὼν εἰς ἐπαφήν, ὄχι βέβαια μὲ τὸν Εὐκλείδη, ποὺ εἶχεν ἐν τῷ μεταξὺ ἀποθάνει, ἀλλὰ μὲ

τοὺς διαδόχους του, συνάψας δεσμοὺς στενῆς φιλίας μὲ ἐξέχοντας γεωμέτρας (ὅπως ὁ Κόνων ὁ Σάμιος, ὁ Ἐρατοσθένης ὁ Κυρηναῖος, ὁ Δοσίθεος κλπ). εἰς τοὺς ὁποίους κατόπιν ἀφιέρωσεν ὅσα ἔργα συνέταξε, μετὰ τὴν ἐπιστροφήν του εἰς τὴν πατρίδα.

Ἐκεῖ ἀφιέρωσεν ἑαυτὸν ἐξ ὁλοκλήρου εἰς γεωμετρικὰς καὶ μηχανικὰς μελέτας. Ὅταν ὅμως, διαρκοῦντος τοῦ β' καρχηδονιακοῦ πολέμου, ἡ πόλις τῶν Συρακουσῶν, ὡς σύμμαχος τῆς Καρχηδόνος, περιεκυκλώθη ἀπὸ τὸν ρωμαϊκὸν στρατόν, ὁ Ἀρχιμήδης ἔθεσε τὴν ἰδιοφυΐαν του εἰς τὴν ὑπηρεσίαν τῆς πατρῴας γῆς καὶ ἀπεδείχθη τόσον καταπληκτικὰ γόνιμος εἰς τὴν ἐπινόησιν πρωτοτύπων ὅπλων, ἀμυντικῶν καὶ ἐπιθετικῶν (ἀρκεῖ νὰ μνημονεύσωμεν τοὺς φοβεροὺς καταπέλτας καὶ τὰ θρυλικὰ καυστικὰ κάτοπτρα), ὥστε παρουσίασε τὸ μοναδικὸν εἰς τὴν ἱστορίαν φαινόμενον ἑνὸς ἀνδρὸς μαχομένου μόνου ἐπὶ μίαν τριετίαν ἐναντίον ὁλοκλήρου στρατεύματος. Μόνον ὅταν ἡ πολιορκία μετετράπη εἰς στενὸν ἀποκλεισμὸν καὶ τὰ ὅπλα τῆς προδοσίας ἐβοήθησαν τὸν πολιορκητήν, ὁ ὕπατος Κλαύδιος Μάρκελλος ἠδυνήθη νὰ καταβάλῃ τὸν μαθηματικὸν ἐκεῖνον Βριάρεω, μὲ τὸν ὁποῖον εὑρίσκετο εἰς πόλεμον.

Κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς λεηλασίας, ἡ ὁποία ἠκολούθησε τὴν κατάληψιν τῶν Συρακουσῶν (212 π.Χ.), ὁ Ἀρχιμήδης ἐφονεύθη ὑπὸ ρωμαίου στρατιώτου, παρὰ τὰς ρητὰς διαταγὰς τὰς δοθείσας ὑπὸ τοῦ Μαρκέλλου, ὅπως φεισθοῦν τῆς ζωῆς του.

Εἰς μνήμην του ἠγέρθη ἀντάξιος τάφος, ἐπὶ τοῦ ὁποίου, κατ' ἐκφρασθεῖσαν ἄλλοτε ἐπιθυμίαν του, ἐχαράχθη σφαῖρα ἐγγεγραμμένη εἰς κύλινδρον, διὰ νὰ ὑπενθυμίζῃ εἰς τοὺς ἐπερχομένους ἕνα ἀπὸ τὰ ὡραιότερα εὑρήματα τῆς ὀξυνοίας του. Ἀπὸ τὸ σχῆμα τοῦτο ἀνεκαλύφθη βραδύτερον τὸ μνημεῖον, ἀναγνωρισθὲν ἀπὸ τὸν Κικέρωνα, ὅταν κατὰ τὸ 75 π.Χ. ὑπηρέτησεν ὡς ταμίας, εἰς Σικελίαν. Σήμερον δὲν ὑπάρχει πλέον κανένα ἴχνος τοῦ μνημείου.

41. Προκειμένου νὰ ἐξετάσωμεν τὰ σωζόμενα ἔργα τοῦ Ἀρχιμήδους, δὲν εἶναι δυνατὸν ν' ἀνατρέξωμεν εἰς τὴν χρονολογικὴν σειράν, μόνην ἱκανὴν νὰ παράσχῃ αὐθεντικὴν εἰκόνα τῆς ἐξελικτικῆς πορείας τῶν ἰδεῶν οἱουδήποτε στοχαστοῦ, καθ' ὅσον ἐλλείπουν τ' ἀπαιτούμενα δεδομένα. Θὰ τηρήσωμεν λοιπόν, κατ' ἀνάγκην, ἄλλην σειράν, ἐναρμονιζομένην πρὸς τὰ ἀντικείμενα τῶν ἐργασιῶν.

Καὶ εἶναι λογικὸν ν' ἀρχίσωμεν τὴν ἀνάλυσίν μας ἀπὸ τὴν σπουδαιοτάτην συμβολὴν τοῦ Συρακουσίου μαθηματικοῦ εἰς τὰ προβλήματα τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου καὶ τῆς εὐθειοποιήσεως τῆς περιφερείας, τῶν ὁποίων τὴν οὐσιαστικὴν ταυτότητα πρῶτος ἔφερεν εἰς φῶς, διὰ τοῦ γνωστοῦ θεωρήματός του : «πᾶς κύκλος ἴσος ἐστὶ τριγώνῳ ὀρθογωνίῳ, οὗ

ἡ μὲν ἐκ τοῦ κέντρου ἴση μιᾷ τῶν περὶ τὴν ὀρθήν, ἡ δὲ περίμετρος τῇ βάσει».

Κατ' ἀντίθεσιν πρὸς τοὺς προγενεστέρους γεωμέτρας ὁ Ἀρχιμήδης δὲν ἐπέμεινεν ἐπὶ τῆς προσπαθείας νὰ λύσῃ διὰ τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου ἕνα πρόβλημα, τὸ ὁποῖον ἀπαιτεῖ ἐντελῶς ἄλλα μέσα, ἀλλ' ἀντικαθιστῶν τὴν ἰδέαν τῆς κατασκευῆς μὲ τὴν ἀπαίτησιν τῆς μετρήσεως, ἐτέθη ἐπὶ τῆς μόνης ὁδοῦ, ἡ ὁποία, κατὰ τὴν ἐποχήν του, ἠδύνατο νὰ δώσῃ ἱκανοποιητικὸν ἀποτέλεσμα, τουτέστι νὰ προσδιορίσῃ μὲ ἐπαρκῆ προσέγγισιν τὸν λόγον π τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον.

Πρὸς τὸν σκοπὸν τοῦτον κατέφυγεν εἰς τὴν θεώρησιν κανονικῶν πολυγώνων, ἐγγεγραμμένων καὶ περιγεγραμμένων, ὅπως εἶχον ἤδη κάμει, μὲ ἀναλόγους προθέσεις, ἐρευνηταὶ τῆς προγενεστέρας περιόδου, οἱ Ἀντιφῶν καὶ Βρύσων (§ 27). Ἐκκινῶν ἀπὸ τὸ κανονικὸν ἑξάγωνον καὶ ἀναδιπλασιάζων διαδοχικῶς τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν, ἔφθασε, διὰ τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου $6 \times 2^4 = 96$ πλευρῶν, εἰς τὴν περιώνυμον προσέγγισιν :

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7},$$

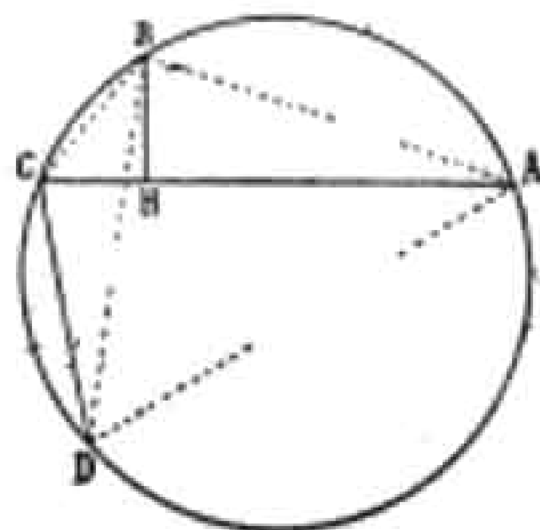
εἰς τὴν ὁποίαν ἐσταμάτησε, θεωρῶν τὸ ἀποτέλεσμα τοῦτο ὡς ἐπαρκῶς ἀκριβὲς τόσον μᾶλλον, καθ' ὅσον οἱ ἐπιθυμοῦντες μεγαλυτέραν ἀκρίβειαν δὲν εἶχον παρὰ νὰ προχωρήσουν ἀκόμη περισσότερον εἰς τὴν ὁδόν, ποὺ ἤνοιξεν ὁ Ἀρχιμήδης.

Θὰ ἴδωμεν κατόπιν, ὅτι τοιαύτη σιωπηρὰ πρόκλησις ἐγένετο δεκτὴ ἀπὸ πολλούς, πρὸς τὸ παρὸν ὅμως παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ Ἀρχιμήδης ἐφαρμόζων τὴν πρότασιν, ποὺ ἐμνημονεύσαμεν ἀνωτέρω, κατέληξεν εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι «ὁ κύκλος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τετράγωνον, λόγον ἔχει, ὃν 11 πρὸς 14», συμπέρασμα παρέχον τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου, μὲ μεγάλην προσέγγισιν, ἴσον πρὸς $\frac{11}{14}$ τοῦ τετραγώνου τῆς διαμέτρου $\left(\frac{\pi}{4} \simeq \frac{11}{14} \simeq 0{,}785\right)$. Τὰ συμπεράσματα αὐτὰ ἀποτελοῦν τὰ πρῶτα συγκεκριμένα καὶ χρήσιμα δεδομένα, τὰ ὁποῖα ἀπέδωσαν αἱ καταβληθεῖσαι προσπάθειαι πρὸς λύσιν τοῦ διασημοτέρου προβλήματος, ἐξ ὅσων συναντῶνται εἰς ὁλόκληρον τὴν γεωμετρίαν.

Τὸ τεῦχος τὸ τιτλοφορούμενον κύκλου μέτρησις ἀποτελεῖ ἐράνισμα, πρὸς σχολικὴν χρῆσιν, ἀπὸ μίαν ἐκτενεστέραν ἐργασίαν ἐπὶ τοῦ ἀντικειμένου τούτου, τὸ πρωτότυπον τῆς ὁποίας δὲν ἀνευρέθη μέχρι σήμερον. Κατά τινας, εἰς τὴν ἐργασίαν ταύτην ὁ Ἀρχιμήδης εἶχε προωθήσει τὴν προσέγγισιν μέχρι τῆς τιμῆς $\pi = 3{,}1416$, ἀνταποκρινομένης εἰς κανονικὸν πολύγωνον $6 \cdot 2^6 = 384$ πλευρῶν. Τὴν προσέγγισιν δὲ ταύτην

ἐκαυχήθησαν ὅτι ἐπέτυχον καὶ οἱ Ἰνδοί, χωρὶς ὅμως νὰ παρουσιάσουν τεκμήρια εἰς ὑποστήριξιν τοῦ ἰσχυρισμοῦ των. Ὑπάρχει ὅμως ἕνα δοκουμέντον πολύτιμον, ἐν σχέσει πρὸς τὸ περιεχόμενον τοῦ ἔργου τοῦ Ἀρχιμήδους, μαρτυρούμενον ἀπὸ ἕνα πολυμαθέστατον Ἄραβα, τὸν ὁποῖον θὰ γνωρίσωμεν εἰς τὸ Κεφ. XI, τὸν Al-Biruni. Οὗτος ἀποσπᾷ ἀπὸ τὴν ἐν λόγῳ ἐργασίαν τοῦ Ἀρχιμήδους τὴν ἀκόλουθον πρότασιν: «εἰς ἕνα κύκλον ἐγγράφεται ἡ τεθλασμένη ACD. Ἔστω B τὸ μέσον τοῦ τόξου ACD, καὶ ἀχθήτω ἡ BH κάθετος ἐπὶ τὴν AC. Θὰ ἰσχύῃ τότε ἡ σχέσις:

$$AH = HC + CD».$$



Σχ. 5

Ὑπὸ τὴν ἀνωτέρω ἐκφώνησιν ἡ πρότασις ἔχει ἐξαφανισθῆ ἀπὸ τὴν μαθηματικὴν βιβλιογραφίαν. Ἐὰν ὅμως εἰσαγάγωμεν τὰς γωνίας $\alpha = \widehat{ACB}$ καὶ $\beta = \widehat{BAC}$, ἡ ἀνωτέρω πρότασις ἀποδεικνύεται εὐκόλως ὅτι εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν ἀκόλουθον σχέσιν:

$$\text{ημ}\,(\alpha - \beta) = \text{ημ}\alpha\ \text{συν}\beta - \text{συν}\alpha\ \text{ημ}\beta.$$

Ἐξ ἄλλου ἐκ τῆς προφανοῦς ἰσότητος:

$$AC = AH + HC,$$

προκύπτει ἡ συζυγὴς σχέσις:

$$\text{ημ}\,(\alpha + \beta) = \text{ημ}\alpha\ \text{συν}\beta + \text{συν}\alpha\ \text{ημ}\beta,$$

καὶ ἐπειδὴ ἐξ αὐτῶν τῶν σχέσεων ἕπονται αἱ ἀνάλογοι ἐκφράσεις διὰ τὸ συν $(\alpha \pm \beta)$, φθάνομεν εἰς τὸ ἀπροσδόκητον συμπέρασμα, ὅτι εἰς τὸν μέγαν Συρακούσιον δὲν ἦσαν ἄγνωστοι αἱ προτάσεις αἱ ἰσοδυναμοῦσαι πρὸς τοὺς συνήθεις τριγωνομετρικοὺς τύπους διὰ τὴν πρόσθεσιν καὶ ἀφαίρεσιν τῶν τόξων.

Εἶναι εὐνόητον, ὅτι αἱ ἐργασίαι αὐταὶ τοῦ Ἀρχιμήδους ἐπὶ τῆς ἁπλουστέρας τῶν καμπύλων γραμμῶν, ποὺ ἔγιναν ἀντικείμενον ἐρεύνης ἐκ μέρους τῶν ἀρχαίων, ἠμποροῦν νὰ θεωρηθοῦν ὡς συμπληρώματα εἰς τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου.

Ἀνάλογον χαρακτῆρα ἔχουν δύο ἄλλα βιβλία περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου, ἀφοῦ ἡ ὕλη ποὺ ἐκτίθεται εἰς αὐτὰ ἔγινεν ἤδη ἀναπόσπαστον μέρος ὅλων τῶν ἐγχειριδίων τῆς στοιχειώδους γεωμετρίας. Εἰς τὸ Βιβλίον I πράγματι διδάσκονται κομψαὶ ἐκφράσεις διὰ τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειαν καὶ τὸν ὄγκον ἑνὸς κυλίνδρου ἢ ἑνὸς κολούρου κώνου

προκύπτοντος διὰ τομῆς τοῦ ὀρθοῦ κώνου μὲ ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν, διὰ τὴν ἐπιφάνειαν καὶ τὸν ὄγκον σφαίρας ἢ σφαιρικοῦ τομέως. Ὁ Ἀρχιμήδης συνδυάζων εὐφυέστατα τοιαύτας ἐκφράσεις, ἔφθασεν εἰς σπουδαίας σχέσεις μεταξὺ τῶν ἀνωτέρω μεγεθῶν.

Τῶν σχέσεων τούτων ὑποδεικνύει ἐφαρμογὰς εἰς τὸ βιβλίον II καὶ συγκεκριμένως εἰς τὴν λύσιν πολλῶν προβλημάτων σκοπούντων εἰς τὴν κατασκευὴν σφαίρας ἰσοδυνάμου πρὸς κῶνον ἢ κύλιδρον, τὴν διαίρεσιν σφαίρας δι' ἐπιπέδου εἰς τμήματα, τῶν ὁποίων αἱ ἐπιφάνειαι καὶ οἱ ὄγκοι ἔχουν μεταξύ των δοθέντα λόγον. Μερικὰ ἰσοδυναμοῦν πρὸς τὴν λύσιν ἐξισώσεων πρώτου καὶ δευτέρου βαθμοῦ, ἄλλα ἀνάγονται εἰς τὸν διπλασιασμὸν τοῦ κύβου καὶ ἄλλα εἰς τὴν λύσιν τῆς πλήρους τριτοβαθμίου ἐξισώσεως. Ὁ Ἀρχιμήδης θεωρεῖ ἄσκοπον νὰ εἰσέλθῃ εἰς τὰς λεπτομερείας τῆς λύσεως, ποὺ θὰ ἦσαν τόσον ἐπιθυμηταί, παραπέμπων τὸν ἀναγνώστην εἰς τὸ τέλος τῆς πραγματείας του, τὸ ὁποῖον ὅμως δυστυχῶς δὲν περιεσώθη. Οἱ σχολιασταί του δὲν μᾶς παρέχουν ἐπ' αὐτοῦ παρὰ ἐξηγήσεις ἐλλιπεῖς καὶ ἀποσπασματικάς, διὸ καὶ αἱ ἀρχαῖαι μέθοδοι λύσεως τῶν ἐξισώσεων 3ου βαθμοῦ ἀποτελοῦν ἕνα ἀπὸ τὰ πλέον βασανιστικὰ αἰνίγματα, ποὺ ἀπαντῶνται εἰς τὴν ἱστορίαν τῆς ἑλληνικῆς γεωμετρίας. Εἰς τὴν διαλεύκανσιν τοῦ αἰνίγματος τούτου κατέβαλον τεραστίας προσπαθείας οἱ βαθύτεροι γνῶσται τῆς ἀρχαίας γεωμετρίας, χωρὶς νὰ ἐπιτύχουν ὁριστικὴν λύσιν αὐτοῦ.

Τὰ θεωρήματα, περὶ τῶν ὁποίων ἐγένετο λόγος, ἠμποροῦν, τοὐλάχιστον ἐν μέρει, νὰ θεωρηθοῦν ὡς μερικαὶ περιπτώσεις ἄλλων, ἀναφερομένων εἰς τὰς ἐπιφανείας ποὺ γεννῶνται ἐκ περιστροφῆς μιᾶς ἐλλείψεως περὶ ἕνα τῶν ἀξόνων της, μιᾶς παραβολῆς περὶ τὸν ἄξονά της, ἢ ἑνὸς κλάδου ὑπερβολῆς περὶ τὸν ἄξονα τῆς συμμετρίας του. Τὰ ἀξιολογώτατα αὐτὰ σχήματα ἐξετάζει ὁ Ἀρχιμήδης εἰς ἕνα ἄλλο θαυμάσιον βιβλίον του τιτλοφορούμενον περὶ κωνοειδέων καὶ σφαιροειδέων. Ἐξ αὐτοῦ μανθάνομεν τὰς σχέσεις τῶν ὄγκων τῶν σχημάτων, ποὺ γεννῶνται διὰ τομῆς μιᾶς τῶν ἀνωτέρω ἐπιφανειῶν ὑπὸ ἐπιπέδων καθέτων ἐπὶ τὸν ἄξονα. Λαμβάνονται δὲ αἱ σχέσεις αὗται δι' εὐφυεστάτων συλλογισμῶν, οἱ ὁποῖοι ἀποτελοῦν ἀληθεῖς καὶ καθαρὰς ὁλοκληρώσεις ὑπὸ ἄλλο ἔνδυμα καὶ αἱ ὁποῖαι ἐχρησίμευσαν ὡς κίνητρα, καὶ ὡς ὁδηγοὶ διὰ τὰς ἄλλας ὁμοίου τύπου ἐρεύνας, ποὺ ἔγιναν εἰς τὴν γεωμετρίαν πρὸ τῆς δημιουργίας τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ λογισμοῦ.

Προτοῦ ἐπιχειρήσῃ τοὺς λεπτοὺς αὐτοὺς ὑπολογισμούς, ὁ Ἀρχιμήδης ἐχρειάσθη νὰ ἐπιμείνῃ εἰς τὴν ἔκθεσιν μερικῶν οὐσιωδῶν ἰδιοτήτων τῶν ἐπιφανειῶν, τῶν ὁποίων προηγουμένως ἐδόθη—ὁ ὁρισμὸς (πρόκειται περὶ ὅλων τῶν διὰ περιστροφῆς κωνικῶν τομῶν παραγομένων ἐπιφανειῶν, ἐκτὸς τοῦ μονοχώνου ὑπερβολοειδοῦς), ἐπέτυχε δὲ τοῦτο μέσῳ σειρᾶς σκέ-

ψεων μεγάλης ἀξίας, ποὺ κατέστη μεγαλυτέρα ἀφ' ὅτου κατεδείχθη ἡ δυνατότης τῆς ἐφαρμογῆς των εἰς οἱανδήποτε ἐπιφάνειαν δευτέρου βαθμοῦ. Εἴτε εἶναι, εἴτε δὲν εἶναι ὁ Ἀρχιμήδης ὁ πρῶτος ἀσχοληθεὶς μὲ τὰς ἐπιφανείας αὐτάς, εἶναι ἐκτὸς πάσης ἀμφιβολίας, ὅτι εἰς αὐτὸν ὀφείλεται τὸ ὅτι αὗται ἐγένοντο ἀντικείμενον ἰδιαιτέρας προσοχῆς καὶ φροντίδος ἐκ μέρους τῶν μαθηματικῶν.

42. Ἀνάλογον δόξαν ἀπέκτησεν ὁ μέγας γεωμέτρης τῶν Συρακουσῶν μὲ μίαν ἄλλην ἐργασίαν του π ε ρ ὶ ἑ λ ί κ ω ν. Εἰς τὴν ἐργασίαν αὐτὴν γίνεται μεθοδικὴ σπουδὴ τῶν καμπύλων (αἱ ὁποῖαι φαίνεται ἀπησχόλησαν διὰ πρώτην φορὰν τὸν Κόνωνα τὸν Σάμιον), τῶν παριστωμένων εἰς πολικὰς συντεταγμένας δι' ἐξισώσεων τῆς μορφῆς $\rho = a\omega$, ἔνθα a μία σταθερά *. Αἱ καμπύλαι αὗται ὀνομάζονται κοινῶς σήμερον ἕ λ ι κ ε ς τ ο ῦ Ἀ ρ χ ι μ ή δ ο υ ς πρὸς διατήρησιν τῆς μνήμης ἐκείνου, ὅστις πρῶτος ἀνεκάλυψε καὶ ἀπέδειξε τὰς θεμελιώδεις των ἰδιότητας. Ὁ Ἀρχιμήδης πράγματι ἀπεκάλυψε τὴν δυνατότητα χρήσεως τοιούτων καμπύλων εἰς τὴν εὐθειοποίησιν ὄχι μόνον ὁλοκλήρου περιφερείας, ἀλλὰ καὶ ἑνὸς τυχόντος τόξου της, ὑπέδειξε τὴν χάραξιν τῆς ἐφαπτομένης χρησιμοποιῶν, ὅπως λέγομεν σήμερον, τὴν πολικὴν ὑφαπτομένην καὶ ἔδωσε πλῆθος θεωρημάτων τετραγωνισμοῦ, χαρακτηριζομένων ὑπὸ ἀφθάστου κομψότητος. Ἐὰν δὲν ἔκαμε λόγον περὶ εὐθειοποιήσεως τόξου ἕλικος, τοῦτο ἐξηγεῖται ἐκ τοῦ γεγονότος ὅτι αὕτη εἶναι ἀνέφικτος, χωρὶς τὴν χρῆσιν τῆς λογαριθμικῆς συναρτήσεως. Ὁ δρόμος τὸν ὁποῖον ἠκολούθησεν ὁ Συρακούσιος μαθηματικὸς διὰ τὴν ἀπόδειξιν τῶν ἀποτελεσμάτων τούτων φαίνεται σήμερον μακρὸς καὶ δύσβατος, διὸ καὶ τὸ ἔργον του π ε ρ ὶ ἑ λ ί κ ω ν εὑρίσκει σήμερον ὀλίγους ἀναγνώστας. Ἀλλὰ τὰ εὑρεθέντα συμπεράσματα κατέλαβον μόνιμον θέσιν εἰς τὴν μαθηματικὴν ἐπιστήμην καὶ τοῦτο ἀποτελεῖ χωρὶς ἀμφιβολίαν τὴν ὡραιοτέραν ἐπιβράβευσιν δι' οἱονδήποτε ἐρευνητήν.

Μεταξὺ τῶν ἄλλων ἐργασιῶν τοῦ Ἀρχιμήδους, αἱ ὁποῖαι ὑπολείπονται πρὸς ἐξέτασιν, μεγάλην σπουδαιότητα ἔχουν, ὅπως θὰ ἴδωμεν, τὰ δύο βιβλία του π ε ρ ὶ ἐ π ι π έ δ ω ν ἰ σ ο ρ ρ ο π ι ῶ ν, εἰς τὰ ὁποῖα παρεμβάλλεται καὶ μία ἄλλη ἐργασία του τιτλοφορουμένη συνήθως τ ε τ ρ α γ ω ν ι σ μ ὸ ς τ ῆ ς π α ρ α β ο λ ῆ ς, μολονότι ὁ Ἀρχιμήδης ὁμιλεῖ

* Ἂν καὶ δὲν ὑπάρχῃ καμμία σχετικὴ μαρτυρία, ἐν τούτοις μᾶς φαίνεται εὐλογωτάτη ἡ σκέψις, ὅτι ἐνδέχεται ἡ γενικὴ ἔννοια τῶν πολικῶν συντεταγμένων νὰ ἕλκῃ τὴν καταγωγήν της ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω ἐργασίαν τοῦ Ἀρχιμήδους καὶ ὅτι ἐκ τῆς μελέτης ταύτης ὡδηγήθησαν πιθανῶς εἰς τὴν εἰσαγωγήν, ὡς βοηθητικοῦ μεγέθους πρὸς χάραξιν τῶν ἐφαπτομένων, τῆς πολικῆς ὑφαπτομένης καὶ συνεκδοχικῶς καὶ τῆς πολικῆς ὑποκαθέτου.

πάντοτε περὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς. Τὰ βιβλία αὐτὰ ἀποτελοῦν τὴν πρώτην ἐπιστημονικὴν πραγματείαν τῆς Στατικῆς καὶ ἔχουν γραφῆ μὲ μίαν μέθοδον τόσον πολὺ αὐστηρῶς σύμφωνον πρὸς ἐκείνην τοῦ Εὐκλείδου, ὥστε μένει κανεὶς μὲ τὴν ἐντύπωσιν ὅτι ἔχει πρὸ ὀφθαλμῶν ἕνα κεφάλαιον μιᾶς γεωμετρίας τεσσάρων διαστάσεων, ὅπου κάθε σημεῖον χαρακτηρίζεται ἀπὸ τὰς ἰδίας του συντεταγμένας καὶ τὸ ἴδιόν του βάρος.

Τὸ πρῶτον ἐκ τῶν ἀναφερθέντων βιβλίων ἀρχίζει μὲ τὸν προσδιορισμὸν τῶν συνθηκῶν ἰσορροπίας μιᾶς βαρείας εὐθείας (ὡς ἐκπροσωπούσης μίαν ράβδον στερεάν) στηριζομένης εἰς κατακόρυφον ὑπομόχλιον. Ἐδῶ τίθεται ἡ ἀρχὴ τοῦ μοχλοῦ, ἡ ὁποία ὤθησε τὸν Ἀρχιμήδη εἰς τὴν ὑπέροχον καὶ οὐχὶ ἀβάσιμον δήλωσίν του «δός μοι πᾷ στῶ καὶ τὰν γᾶν κινήσω». Προχωρεῖ κατόπιν εἰς τὴν ἔρευναν τῶν κέντρων βάρους τῶν ἁπλουστέρων γεωμετρικῶν σχημάτων (παραλληλογράμμου, τριγώνου, τραπεζίου). Καὶ ἐπειδὴ εἶναι φυσικὴ ἡ περιέργεια νὰ ζητήσῃ κανεὶς νὰ μάθῃ κατὰ ποῖον τρόπον οἱ ἀρχαῖοι συνέλαβον αὐτὰς τὰς ἐννοίας, εἶναι σκόπιμον νὰ σημειώσωμεν σχετικῶς ὅτι τίποτε τὸ συγκεκριμένον δὲν εἶναι γνωστόν, καθ' ὅσον οἱ ὁρισμοὶ τῶν ἐν λόγῳ ἐννοιῶν περιείχοντο εἰς προγενέστερον ἔργον τοῦ Ἀρχιμήδους (περὶ ζυγῶν), τὸ ὁποῖον θεωρεῖται σήμερον ὡς ἀπολεσθέν, ἐκτὸς τοῦ τίτλου του. Τὰ προκύπτοντα ἀποτελέσματα ἐφαρμόζει εἰς τὴν παραβολήν, καταλήγων εἰς τὸ περιώνυμον θεώρημα: «πᾶν τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας τε καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος βάσιν τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ὕψος ἴσον» (πᾶν παραβολικὸν τμῆμα εἶναι τὰ 4/3 τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος βάσιν τὴν τοῦ παραβολικοῦ τμήματος καὶ ὕψος τὸ αὐτό). Τὸ θεμελιῶδες αὐτὸ θεώρημα ἀνήκει εἰς τὸν Ἀρχιμήδη, ὁ ὁποῖος οὕτω κατώρθωσε νὰ τετραγωνίσῃ διὰ πρώτην φορὰν καμπυλόγραμμον χωρίον, μὴ περιοριζόμενον μόνον ὑπὸ εὐθειῶν ἢ περιφερειῶν. Ἐπειδὴ ὅμως ἡ μέθοδος διὰ τῆς ὁποίας ἔφθασεν εἰς τὸ συμπέρασμα τοῦτο περιέχει στοιχεῖα ἀνήκοντα εἰς τὴν Μηχανικήν, ὁ μέγας γεωμέτρης ἐθεώρησεν ὑποχρέωσιν ν' ἀναπαραγάγῃ τὸ θεώρημα διὰ μεθόδου καθαρῶς γεωμετρικῆς. Ἡ μέθοδος αὕτη ἐκτίθεται εἰς τὴν ἐργασίαν, ποὺ φέρει τὸν τίτλον τετραγωνισμὸς παραβολῆς. Κατ' αὐτὴν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραβολικοῦ τμήματος προσδιορίζεται ὡς ὅριον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ὅρων φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου μὲ λόγον 1/4. Τὸ αὐτὸ σχῆμα, δηλαδὴ τὸ παραβολικὸν τμῆμα μελετᾷ κατόπιν ἐκ νέου ὁ Ἀρχιμήδης εἰς τὸ Βιβλίον II μὲ κύριον σκοπὸν ν' ἀποδείξῃ ἕνα ἄλλο σπουδαῖον θεώρημα, ὅτι δηλαδὴ «τὸ κέντρον βάρους τοῦ παραβολικοῦ τμήματος εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς εὐθείας ποὺ συνδέει τὴν κορυφὴν καὶ τὸ μέσον τῆς βάσεως αὐτοῦ καὶ χωρίζει αὐτὴν εἰς τὸν λόγον 3/2».

Ἀποκαθιστᾷ κατόπιν μίαν βοηθητικὴν πρότασιν (λῆμμα), ἡ ὁποία ἐπιτρέπει τὸν προσδιορισμὸν τοῦ κέντρου βάρους ἑνὸς σχήματος προκύπτοντος ἀπὸ ἄλλο δι' ἀποκοπῆς ὡρισμένου τμήματός του. Οὕτω κατορθώνει νὰ γενικεύσῃ τὴν προηγουμένην πρότασιν, περὶ κέντρου βάρους παραβολικοῦ τμήματος, εἰς τὸ τραπεζοειδὲς παραβολικὸν χωρίον τὸ προκῦπτον διὰ τομῆς τοῦ παραβολικοῦ τμήματος ὑπ' εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν (ἀκριβῶς ὅπως λαμβάνεται ἓν τραπέζιον διὰ τομῆς τριγώνου ὑπ' εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν του).

Ἐνῷ μὲ τὰ βιβλία του περὶ ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν ὁ μέγας Συρακούσιος ἐγένετο θεμελιωτὴς τῆς Στερεοστατικῆς, εἰς ἕνα ἄλλο ἔργον του περὶ τῶν ἐν ὕδατι ἐφισταμένων ἢ περὶ ὀχουμένων (βιβλία δύο) ἔθεσε τὰς βάσεις διὰ τὴν μεθοδικὴν ἀνάπτυξιν τῆς Ὑδροστατικῆς καὶ μᾶλλον θὰ ἦτο ἀκριβέστερον νὰ λεχθῇ ὅ,τι εἶπεν ἄλλοτε περὶ αὐτοῦ ὁ Lagrange, ὅτι δηλαδὴ ὁ Ἀρχιμήδης διὰ τοῦ ἐν λόγῳ ἔργου του* ἐδίδαξε μίαν θεωρίαν ἐπὶ τῆς ἰσορροπίας τῶν ἐπιπλεόντων σωμάτων, εἰς τὴν ὁποίαν οἱ νεώτεροι τίποτε δὲν μετέβαλον, καὶ πολὺ ὀλίγα προσέθεσαν.

Καὶ πράγματι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ μὴ συμμερισθῶμεν τὴν γνώμην αὐτὴν τοῦ Lagrange, ὅταν ἡ πασίγνωστος «ἀρχὴ τοῦ Ἀρχιμήδους» δὲν λείπῃ σήμερον ἀπὸ κανένα ἐγχειρίδιον Φυσικῆς. Εἶναι ἄγνωστον, ἐὰν ἡ περίφημος αὐτὴ «ἀρχὴ» ὑπῆρξε τὸ σημεῖον ἀφίξεως ἢ τὸ σημεῖον ἐκκινήσεως τῶν σκέψεων, βάσει τῶν ὁποίων ὁ Ἀρχιμήδης ἀνεκάλυψε τὸν δόλον ποὺ εἶχε διαπράξει εἰς βάρος τοῦ τυράννου τῶν Συρακουσῶν ὁ χρυσοχόος ἐκεῖνος, εἰς τὸν ὁποῖον εἶχεν ἀνατεθῇ ἡ κατασκευὴ στεφάνου ἐκ καθαροῦ χρυσοῦ**.

Τῆς ἐν λόγῳ ἀρχῆς ὁ Ἀρχιμήδης ὑποδεικνύει, εἰς τὰ βιβλία ποὺ

* Τοῦ ἔργου τούτου ἐσῴζετο μόνον ἡ λατινικὴ μετάφρασις, ἐσχάτως ὅμως ἀνεκαλύφθη καὶ τὸ ἑλληνικὸν κείμενον εἰς ἕνα παλίμψηστον ὑφιστάμενον εἰς τὴν Ἱερουσαλήμ.

Ἡ μετάφρασις, ἡ ὁποία ὑπῆρχε προηγουμένως, ἦτο ἔργον τοῦ G. de Moerbeke, καὶ ἔκδοσις τοῦ N. Tartaglia (§ 114).

** Ὁ Ρωμαῖος μηχανικὸς καὶ ἀρχιτέκτων Βιτρούβιος (περὶ τὸ 25 π.Χ.) εἰς τὸ περίφημον, ἐκ δέκα βιβλίων, ἔργον του De Architectura ἀναφέρει, σχετικῶς μὲ τὸ περιστατικὸν τοῦτο, τὰ ἑξῆς (I. IX, Κεφ. III):

«Ἱέρων, ὁ ἄρχων τῆς πόλεως τῶν Συρακουσῶν, ἀποφασίσας νὰ καταθέσῃ εἰς τὸν ναὸν πολύτιμον στέφανον ἐκ καθαροῦ χρυσοῦ, ὡς ἀνάθημα εὐχαριστίας διὰ τὴν εὐημερίαν τῆς πόλεως, ἀνέθεσε τὴν κατασκευὴν αὐτοῦ ξεις χρυσοχόον, εἰς τὸν ὁποῖον καὶ παρέδωσεν ὡρισμένον βάρος καθαροῦ χρυσοῦ. Οὗτος παρέδωσε μετά τινα χρόνον εἰς τὸν βασιλέα τὸν στέφανον, ἐπεξειργασμένον διὰ χειρῶν μὲ μεγάλην τέχνην, εἰς βάρος δὲ ἴσον πρὸς τὸ βάρος τοῦ χρυσοῦ, τὸν ὁποῖον παρέλαβε. Ἠγέρθη ὅμως ὑπόνοια ὅτι ἀφῃρέθη ἕνα μέρος ἐκ τοῦ χρυσοῦ, ἀντικατασταθὲν ὑπὸ ἴσου βάρους ἀργύρου. Ὠργισμένος ὁ Ἱέρων μὲ τὴν ἰδέαν ὅτι ἠπατήθη καὶ μὴ γνωρίζων πῶς ν' ἀπο-

ἀνεφέραμεν, μίαν σπουδαίαν καὶ δυσκολωτάτην ἐφαρμογήν, προσδιορίζων τὰς συνθήκας ἰσορροπίας τοῦ στερεοῦ τοῦ προκύπτοντος ἐκ τῆς τομῆς ἑνὸς ἐλλειπτικοῦ παραβολοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς ὑπὸ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα, ὅταν τὸ στερεὸν τοῦτο βυθισθῇ ἐντὸς ὑγροῦ. Καὶ ἡ ἔρευνα αὐτὴ ἐχρησίμευσεν ἐπίσης ὡς κίνητρον καὶ ὡς ὑπόδειγμα εἰς ἐκείνους, οἱ ὁποῖοι βραδύτερον ἐπεχείρησαν τὴν λύσιν προβλημάτων τοῦ αὐτοῦ τύπου.

43. Δὲν δυνάμεθα πρὸς τὸ παρὸν ν' ἀσχοληθῶμεν μὲ ἕνα ἄλλο σπουδαιότατον ἔργον τοῦ Ἀρχιμήδους, διότι διὰ νὰ καταστήσωμεν δυνατὴν τὴν πλήρη κατανόησιν τῆς σημασίας καὶ τῆς ἀξίας του εἶναι ἀνάγκη νὰ τὸ τοποθετήσωμεν εἰς τὰ πλαίσια τῆς Ἀριθμητικῆς τῶν Ἀρχαίων Ἑλλήνων, περὶ τῆς ὁποίας θὰ ὁμιλήσωμεν εἰδικώτερα βραδύτερον (Κεφ. VI). Ἐκεῖ θὰ κάμωμεν λόγον ἀκόμη δι' ἕνα δύσκολον πρόβλημα ἀριθμητικῆς ποὺ φέρει τὸ ὄνομα του (§ 94).

Ἐδῶ εἶναι μᾶλλον κατάλληλος ἡ στιγμὴ νὰ ὁμιλήσωμεν εἰς κάποιαν ἔκτασιν διὰ τὰς μεθόδους, τὰς ὁποίας μετήρχετο ὁ Ἀρχιμήδης, πρῶτον διὰ τὴν ἀνακάλυψιν καὶ ἔπειτα διὰ τὴν ἀπόδειξιν τῶν θεωρημάτων του.

Ὡς πρὸς τὴν μέθοδον τῆς ἀποδείξεως, ἔχομεν νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι αὐτὴ χαρακτηρίζεται ἀπὸ εὐρυτάτην χρῆσιν τῆς γεωμετρικῆς ἀλγέβρας, εἰς τὴν ὁποίαν ὁ Ἀρχιμήδης ἔδωσε μορφὴν κομψοτέραν καὶ ἰσχυροτέραν τῆς ἀπαντωμένης εἰς τὸν Εὐκλείδη.

Χαρακτηρίζεται ἀκόμη ἀπὸ εὑρεῖαν χρῆσιν τῆς ὑπὸ τῶν ἀρχαίων καλουμένης «ν ε ύ σ ε ω ς», δηλαδὴ γεωμετρικῆς πράξεως ἀποσκοπούσης εἰς τὴν τοποθέτησιν εὐθυγράμμου τμήματος κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε τὰ ἄκρα του νὰ κεῖνται ἐπὶ δύο δοθεισῶν γραμμῶν, ἡ δὲ εὐθεῖα εἰς ἣν ἀνήκει τὸ τμῆμα νὰ διέρχεται ἀπὸ δεδομένον σημεῖον. Ἀξιοσημείωτον εἶναι ὅτι ὁ Ἀρχιμήδης ἐπικαλεῖται τὴν «νεῦσιν» ἀκόμη καὶ ὅταν εἶναι ἀδύνατος ἡ πραγματοποίησις αὐτῆς διὰ τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου, πρᾶγμα ἐπιδεχόμενον προφανῶς τὴν ἑρμηνείαν ὅτι ὁ ἴδιος δὲν διετήρει ἐπιφυλάξεις ὡς πρὸς τὴν μηχανικὴν ἐκτέλεσιν τῆς νεύσεως μέσῳ κανόνος φέροντος ἐπ' αὐτοῦ τὰ σημεῖα τὰ παριστῶντα τὰ ἄκρα τοῦ δοθέντος εὐθυγράμμου τμήματος.

Τέλος ὁ Ἀρχιμήδης ἐφήρμοσεν εἰς εὑρεῖαν κλίμακα τὰς ὑπὸ τοῦ Εὐδόξου ἀναπτυχθείσας πρωτοτύπους ἰδέας (§ 31), τὰς ὁποίας ἐφήρμοσε μετ' ἐπιτυχίας καὶ ὁ Εὐκλείδης, διὰ τὸν ὑπολογισμὸν ἐμβαδῶν καὶ ὄγκων,

δείξῃ τὴν κλοπήν, παρεκάλεσε τὸν Ἀρχιμήδη νὰ καταβάλῃ πᾶσαν δυνατὴν προσπάθειαν πρὸς ἀνακάλυψιν τοῦ δόλου. Ὁ τελευταῖος εἰσελθὼν κατὰ τύχην ὀλίγον ἔπειτα εἰς λουτῆρα, παρετήρησεν ὅτι ὅσον ἐβυθίζετο τὸ σῶμά του, τόσον μεγαλυτέρα ποσότης ὕδατος ἐξεχείλιζεν ἐκ τοῦ λουτῆρος. Ἐμπνευσθεὶς τότε τὸν τρόπον ἀνακαλύψεως τῆς νοθείας τοῦ στεφάνου ἐκυριεύθη ἀπὸ τόσην χαράν, ὥστε ἐξελθὼν γυμνὸς εἰς τὸν δρόμον κατηυθύνετο εἰς τὴν οἰκίαν του φωνάζων «εὕρηκα, εὕρηκα !»

χωρὶς τὴν χρῆσιν ἐκπεφρασμένων μεθόδων ὁλοκληρωτικοῦ λογισμοῦ. Προσέθεσε δὲ εἰς τὴν μέθοδον τοῦ Εὐδόξου καὶ τὴν ἰδικήν του πρωτότυπον συμβολήν, δηλαδὴ τὴν χρῆσιν τοῦ ζυγοῦ, ὅπως εἴδομεν ἤδη εἰς τὰ περὶ τετραγωνισμοῦ τῆς παραβολῆς (§ 42).

Ἐπειδὴ πλεῖστοι ἀπὸ τοὺς ἀποδεικτικοὺς συλλογισμοὺς τοῦ Ἀρχιμήδους, ἂν καὶ προκαλοῦν τὸν θαυμασμὸν διὰ τὴν πρωτοτυπίαν των, εἶναι τεχνασματικοὶ καὶ δὲν στεροῦνται περιπλοκῶν, ἠγέρθη εἰς πολλοὺς ἡ βάσιμος ὑπόνοια ὅτι οἱ ἀποδεικτικοί του συλλογισμοὶ δὲν ἦσαν ἐκεῖνοι, ποὺ ὡδήγησαν ἀρχικῶς τὸν Ἀρχιμήδη εἰς τὴν ἀνακάλυψιν τῶν ἀληθειῶν, ποὺ τὸν κατέστησαν διάσημον εἰς ὁλόκληρον τὸν κόσμον.

Ἡ εἰκασία αὐτὴ εὗρε πράγματι τὴν φαεινοτέραν δικαίωσιν, ὅταν, κατὰ τὰς ἀρχὰς τοῦ αἰῶνος, ἀνεκαλύφθη εἰς μίαν βιβλιοθήκην τῆς Κωνσταντινουπόλεως ἕνα παλίμψηστον, εἰς τὸ ὁποῖον φέρεται ἐγγεγραμμένον σημαντικὸν ἀπόσπασμα ἔργου τοῦ Ἀρχιμήδους, ὑπὸ τὸν τίτλον «Ἡ ἔφοδος»[30]. Τὸ ἔργον τοῦτο ἔχει μεθοδολογικὸν χαρακτῆρα καὶ μεταξὺ ἄλλων καθιερώνει τὴν διάκρισιν μεταξὺ «μεθόδου ἀνακαλύψεως» καὶ «μεθόδου ἀποδείξεως» τῶν γεωμετρικῶν ἀληθειῶν.

Χωρὶς ἐπιφυλάξεις ὁ Ἀρχιμήδης διατυπώνει τὴν ἄποψιν, ὅτι ἐνῷ ἡ σειρὰ τῶν συλλογισμῶν, διὰ τῶν ὁποίων ἀποδεικνύεται ἕνα θεώρημα, πρέπει νὰ εἶναι ἀπηλλαγμένη παντὸς στοιχείου μὴ ἀνήκοντος εἰς τὴν ἐπιστήμην τοῦ διαστήματος, ὁ διεξάγων μίαν ἐπιστημονικὴν ἔρευναν εἶναι ἐλεύθερος νὰ χρησιμοποιήσῃ οἱονδήποτε μέσον ἱκανὸν νὰ τὸν ὁδηγήσῃ ἀσφαλέστερα εἰς τὸν σκοπόν. Σοφὴ συμβουλή, ἡ ὁποία ἀκόμη καὶ σήμερον θὰ ἠδύνατο νὰ βοηθήσῃ ὅλους τοὺς ἐπιμένοντας νὰ πηλοβατοῦν εἰς μίαν ἄγονον τυπικότητα καὶ σχολαστικότητα.

Τοιουτοτρόπως ὁ Ἀρχιμήδης μᾶς ἐπιτρέπει νὰ ἐγγίσωμεν διὰ τῆς χειρὸς τὴν εὐστροφίαν ποὺ μεταχειρίζεται εἰς πολλὰς περιπτώσεις, εἰδικώτερον μάλιστα εἰς τὸν προσδιορισμὸν τοῦ ὄγκου κυλινδρικοῦ ὄνυχος ἢ τοῦ κοινοῦ ὄγκου δύο ὀρθῶν κυκλικῶν κυλίνδρων τῆς αὐτῆς διαμέτρου, ἀλληλοτομούντων κατ' ἄξονα ὑπὸ ὀρθὴν γωνίαν. Ὁ ὄγκος οὗτος εἶναι, ὅπως ἀποδεικνύει ὁ Ἀρχιμήδης, ἴσος πρὸς τὰ 2/3 τοῦ κύβου τοῦ ἔχοντος πλευρὰν τὴν κοινὴν διάμετρον τῶν κυλίνδρων *.

* Ὁμιλοῦντες σύγχρονον μαθηματικὴν γλῶσσαν, θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ εἴπωμεν ὅτι πρόκειται περὶ τοῦ κοινοῦ μέρους τῶν δύο κυλίνδρων $x^2 + y^2 = r^2$, $y^2 + z^2 = r^2$, τοῦ ὁποίου ὁ ὄγκος δίδεται ἀπὸ τὸ διπλοῦν ὁλοκλήρωμα:

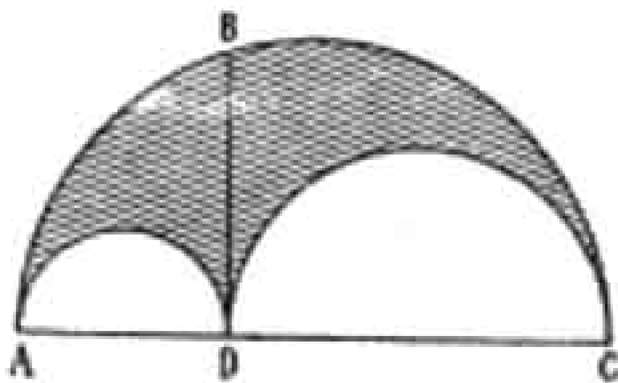
$$V = 8 \int_{y=0}^{y=r} \cdot \int_{x=0}^{x=\sqrt{r^2-y^2}} z \, dx \, dy = \frac{2}{3} (2r)^3$$

44. Τὰ ἔργα τοῦ Ἀρχιμήδους, τὰ ὁποῖα ἐξητάσαμεν μέχρι τοῦδε ἐν συντομίᾳ, ἔφθασαν μέχρις ἡμῶν σχεδὸν ὁλόκληρα, ἔστω καὶ ἂν ὄχι ὅλα εἰς τὴν ἀρχικήν των γλῶσσαν, ἀποδίδονται ὅμως ἀκόμη εἰς αὐτὸν πολλὰ ἄλλα, περὶ τῶν ὁποίων θὰ κάμωμεν συντομωτάτην μνείαν.

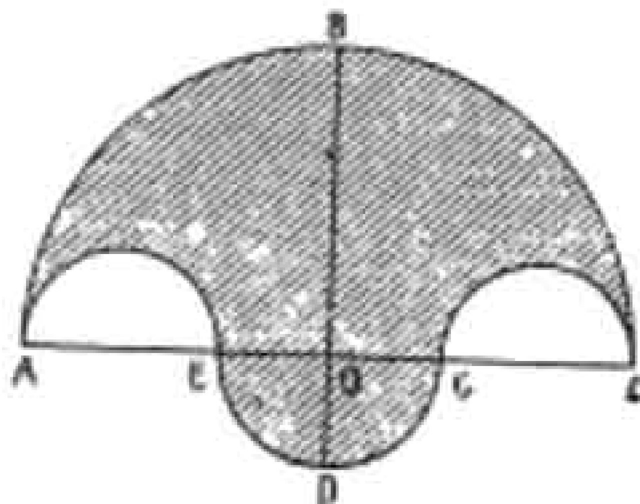
Λέγεται ὅτι ἔγραψε μίαν πραγματείαν περὶ κωνικῶν τομῶν, διὰ τὴν συγγραφὴν τῆς ὁποίας ἄλλωστε ἦτο ἁρμοδιώτατος, λαμβανομένης ὑπ' ὄψει τῆς βαθείας γνώσεως τῶν ἰδιοτήτων τῶν γραμμῶν τούτων, τῆς ἀποκαλυπτομένης εἰς ἄλλα ἔργα του. Ἔγραψεν ἀκόμη ἕνα ἔργον περὶ ἡμικανονικῶν πολυέδρων, ἤτοι σχημάτων τοῦ χώρου περιοριζομένων ὑπὸ κανονικῶν πολυγώνων διαφόρων εἰδῶν. Διὰ μέσων ἀγνώστων εἰς ἡμᾶς, προσδιώρισε τὸν ἀριθμὸν αὐτῶν εἰς δεκατρία, ὠθηθεὶς πιθανῶς ἀπὸ τὴν ἐξέτασιν τῶν δύο γνωστῶν εἰς τὸν Πλάτωνα (§ 29).

Ὑπὸ τὸ ὄνομα τοῦ Ἀρχιμήδους φέρεται ἐπίσης μία συλλογὴ προτάσεων στοιχειώδους γεωμετρίας, περιελθοῦσα εἰς ἡμᾶς μέσῳ τῶν Ἀράβων, οἱ ὁποῖοι πιθανῶς ἤντλησαν τὸ περιεχόμενον ἐκ διαφόρων πηγῶν. Διὰ νὰ δώσωμεν μίαν ἰδέαν τοῦ περιεχομένου τοῦ βιβλίου τούτου, γνωστοῦ ὑπὸ τὸν τίτλον Λήμματα[81], θὰ ἀναφέρωμεν τὰ δύο ἀκόλουθα θεωρήματα, ἀφορῶντα νέα ἐπίπεδα σχήματα, περικλειόμενα ὑπὸ κυκλικῶν τόξων, καὶ τὰ ὁποῖα, ὅπως οἱ μηνίσκοι τοῦ Ἱπποκράτους, ἔχουν ἐμβαδὰ ἐκφραζόμενα κατὰ τρόπον ἀξιοσημείωτον.

α) «Ἐὰν ἐπὶ τῆς διαμέτρου AC ἡμικυκλίου (σχ. 6) ληφθῇ σημεῖον D καὶ γραφοῦν ἀπὸ τῶν τμημάτων τῆς διαμέτρου δύο ἡμικύκλια ἐντός, ἀπὸ



Σχ. 6



Σχ. 7

τοῦ ληφθέντος δὲ σημείου ὑψωθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν διάμετρον μέχρι τῆς ἡμιπεριφερείας, τὸ σχῆμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τριῶν τόξων—καλούμενον ἄρβηλον—ἰσοῦται μὲ κύκλον τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ὑψωθεῖσα κάθετος DB».

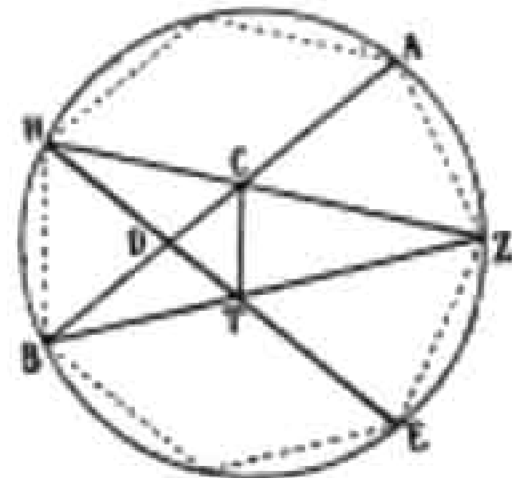
β) «Ἐὰν εἰς ἡμικύκλιον (σχ. 7) ληφθοῦν δύο ἴσα τμήματα AE καὶ GC ἀπὸ τῶν ἄκρων τῆς διαμέτρου AC καὶ ἀπὸ τούτων γραφοῦν ἡμικύκλια ἐντός, γραφῇ δὲ καὶ ἀπὸ τοῦ ὑπολοίπου τμήματος EG ἡμικύκλιον

ἐκτός, ὁ κύκλος τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων τοῦ ληφθέντος ἡμικυκλίου καὶ τοῦ ἐκτός, ἰσοῦται πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχήματος τοῦ περικλειομένου ὑπὸ τῶν τόξων ὅλων τῶν ἡμικυκλίων — γνωστοῦ μὲ τὸ ὄνομα σάλινον[31]».

Μία μονογραφία τοῦ Συρακουσίου μαθηματικοῦ ἐπὶ τοῦ ἑπταγώνου ἐθεωρεῖτο μέχρι τοῦ τέλους τοῦ Χ αἰῶνος ὡς ἀπολεσθεῖσα. Εὑρέθησαν ὅμως διάφορα ἀντίγραφα εἰς τὴν ἀραβικήν, ἕνα τῶν ὁποίων, ὀφειλόμενον εἰς τὸν Tabit ibn Quorra (836-901), εἶδε τὸ φῶς τῆς δημοσιότητος εἰς γερμανικὴν γλῶσσαν (§ 144). Ἐξ αὐτοῦ διδασκόμεθα μίαν κομψὴν πρότασιν, σχετικὴν πρὸς τὸ κανονικὸν ἑπτάγωνον, τὴν ὁποίαν θεωροῦμεν σκόπιμον ν' ἀναφέρωμεν ἐδῶ. «Δίδεται (σχ. 8) ἡ εὐθεῖα AB, ἐφ' ἧς λαμβάνομεν δύο σημεῖα C καὶ D τοιαῦτα, ὥστε νὰ ἔχωμεν:

$$AD \cdot CD = DB^2$$

$$CD \cdot DB = AC^2$$



Σχ. 8

Τὰ τμήματα AC, DB, προκύπτουν μεγαλύτερα τοῦ CD, ὥστε ἐπιτρέπουν τὴν κατασκευὴν ἑνὸς τριγώνου CHD τοιούτου, ὥστε CH = AC, DH = BD. Περιγράφομεν τώρα εἰς τὸ τρίγωνον AHB περιφέρειαν Γ καὶ προεκτείνομεν τὰς πλευρὰς HC, HD μέχρι τῆς περιφερείας, τεμνομένης ἀντιστοίχως εἰς Z καὶ E. Ἔστω T τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν εὐθειῶν BZ, HE. Τὰ 4 σημεῖα C, T, B, H εἶναι ὁμοκυκλικά, τὰ δὲ τρία τόξα τῆς Γ περιφερείας BH, AZ, ZE προκύπτουν ἴσα μεταξύ των, ἐνῷ τὰ ὑπόλοιπα AH καὶ BE διπλάσια τῶν πρώτων, οὕτως ὥστε τούτων διχοτομουμένων, ἡ περιφέρεια Γ ἔχει διαιρεθῆ εἰς ἑπτὰ ἴσα μέρη».

Οἱ ἀκόλουθοι τοῦ Μωάμεθ μᾶς μετέδωσαν ἐπίσης ἀρκετὰς πληροφορίας ἀναφορικῶς πρὸς ἕνα παίγνιον, παιζόμενον, κατ' ἐφεύρεσιν τοῦ Ἀρχιμήδους, μὲ πλακίδια ἐξ ἐλεφαντοστοῦ, σχήματος τριγωνικοῦ καὶ πολυγωνικοῦ, καλούμενον δὲ συνήθως loculus Archimedius ἢ στομάχιον. Κάμνομεν ἁπλῶς μνείαν τοῦ παιγνιδίου τούτου, ἐν μέσῳ τόσων ἄλλων μηχανῶν ποὺ ἐπενόησεν ὁ ἴδιος — χωρὶς νὰ δίδῃ δι' αὐτὰς μεγάλην σημασίαν, ἐνῷ ἀντιθέτως αὗται διήγειρον ἄμετρον θαυμασμὸν εἰς τοὺς συγχρόνους του — διότι ἐκεῖνος ποὺ ἐπιθυμεῖ νὰ σχηματίσῃ ἀκριβῆ ἀντίληψιν μιᾶς τόσον ἐξεχούσης προσωπικότητος, ὡς ὁ Ἀρχιμήδης, δὲν εἶναι θεμιτὸν νὰ παραλείψῃ καμμίαν ἀπὸ τὰς πολλὰς ἀπόψεις, ὑπὸ τὰς ὁποίας αὐτὴ ἐμφανίζεται, μολονότι, αἱ πληροφορίαι τὰς ὁποίας ἐδώσαμεν ἀναφορικῶς πρὸς τὸ καθαρῶς μαθηματικὸν ἔργον του, εἶναι ἐπαρκεῖς διὰ νὰ καταδείξουν πόσον δίκαιον εἶχεν ὁ G. Wallis λέγων ὅτι «ὁ Ἀρχιμήδης ὑπῆρξεν

ἀνὴρ ἐκπληκτικῆς ἀγχινοίας, ὁ ὁποῖος ἔθεσε πρῶτος τὰ θεμέλια σχεδὸν ὅλων ἐκείνων τῶν ἐπινοήσεων, διὰ τὰς ὁποίας καυχᾶται ἡ ἐποχή μας».

Ὁ Ἀπολλώνιος

45. Ὁ θαυμασμὸς ὁ ἐμπνεύσας εἰς τὸν Wallis τοὺς λόγους, τοὺς ὁποίους πρὸ ὀλίγου ἐμνημονεύσαμεν, διαφαίνεται ἐξ ἴσου καθαρὰ καὶ εἰς τὴν ἀκόλουθον δήλωσιν τοῦ Leibniz: «ἐκεῖνος, ὁ ὁποῖος κατανοεῖ τὸν Ἀρχιμήδη καὶ τὸν Ἀπολλώνιον, θαυμάζει ὀλιγώτερον τὰς ἐπινοήσεις τῶν νεωτέρων μεγάλων ἀνδρῶν».

Εἰς τοὺς λόγους αὐτοὺς τοῦ Leibniz ἀναφέρεται πλησίον τοῦ Ἀρχιμήδους ἕνα ἄλλο ὄνομα καὶ ἐξαίρεται ἕνας ἄλλος γεωμέτρης, εἰς τὸν ὁποῖον ἀπονέμεται οὕτω ἡ ὑψίστη τιμὴ (τὴν ὁποίαν μεταξὺ τῶν συγχρόνων μόνον ὁ Gauss μέχρι τῆς ὥρας ἐπέτυχε) νὰ τοποθετῆται εἰς τὴν αὐτὴν στάθμην μὲ τὸν Συρακούσιον μαθηματικόν.

Εἶναι ὁ Ἀπολλώνιος ὁ Περγαῖος, γεννηθεὶς εἰς τὴν Πέργην τῆς Παμφυλίας, κατά τινας 40 καὶ κατ' ἄλλους 25 ἔτη πρὸ τοῦ Ἀρχιμήδους, ἐνῷ ὑπάρχουν καὶ οἱ θεωροῦντες τὸ 170 π.Χ. ὡς ἔτος τῆς ὡριμότητός του. Εἰς τὴν Ἀλεξάνδρειαν εἶχε διδασκάλους τοὺς διαδόχους τοῦ Εὐκλείδου. Διέμεινεν ἀκόμη εἰς Ἔφεσον καὶ ἔπειτα εἰς Πέργαμον, πόλιν διαθέτουσαν Πανεπιστήμιον καὶ Βιβλιοθήκην, ἱδρύματα παραπλήσια πρὸς ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα κατέστησαν διάσημον τὴν Ἀλεξάνδρειαν. Ὅτι ὁ Ἀπολλώνιος ἐδίδαξε δημοσίᾳ ἐδῶ καὶ ἀλλαχοῦ εἶναι δυνατόν, μάλιστα πιθανόν, ἀλλ' ἱστορικῶς μὴ ἐξηκριβωμένον.

Περὶ τῆς ζωῆς του γνωρίζομεν τόσον ὀλίγα, ὥστε δὲν κατέστη ἀκόμη δυνατὸν νὰ ἐξακριβωθῇ τελικῶς, ἂν οὗτος, πρέπει νὰ ταυτισθῇ μὲ ἕνα ἀστρονόμον τῆς ἐποχῆς, καλούμενον Ἀπολλώνιον ε (ἔψιλον), πρὸς διάκρισιν ἀπὸ πολλὰ ἄλλα ὁμώνυμα πρόσωπα (μία πρόσφατος ἐγκυκλοπαιδεία ἀναγράφει ὄχι ὀλιγώτερα τῶν 128). Ὁ σχολιαστὴς Πάππος τὸν περιγράφει ὡς ἄνθρωπον μὲ χαρακτῆρα ματαιόδοξον καὶ ὑπεροπτικόν, μεθυσθέντα ἐκ τῆς μεγάλης πρὸς αὐτὸν ἐκτιμήσεως τῶν συγχρόνων του, οἱ ὁποῖοι, ζῶντος ἔτι τοῦ Ἀρχιμήδους, ἐσυνήθιζον νὰ τὸν ἀποκαλοῦν «μέγαν γεωμέτρην» καὶ «κατ' ἐξοχὴν γεωμέτρην».

Ἀπὸ τὸν θαυμασμὸν αὐτὸν ἤντλησεν ὁ Περγαῖος τὴν δύναμιν ν' ἀσκήσῃ μὲ ἐλευθεριότητα κριτικὴν τῶν ἔργων τοῦ Εὐκλείδου καὶ ἐπρότεινε ριζικὰς τροποποιήσεις εἰς τὴν γενικὴν διάταξιν τῆς ὕλης καὶ εἴς τινα σημαντικὰ χωρία τῶν Στοιχείων. Ἂν καὶ αἱ σχετικαὶ εἰδήσεις εἶναι, ἀτυχῶς, ἐλλιπεῖς καὶ ἀποσπασματικαί, ἀρκοῦν παρὰ ταῦτα, ν' ἀποδείξουν ὅτι εἰς τὸν Ἀπολλώνιον ἀνήκει ἡ τιμή, ὅτι πρῶτος μετὰ θάρρους διήνοιξε μίαν ὁδόν, ἡ ὁποία ἐγκαταλειφθεῖσα μετ' αὐτόν, ἐπὶ

ἀνὴρ ἐκπληκτικῆς ἀγχινοίας, ὁ ὁποῖος ἔθεσε πρῶτος τὰ θεμέλια σχεδὸν ὅλων ἐκείνων τῶν ἐπινοήσεων, διὰ τὰς ὁποίας καυχᾶται ἡ ἐποχή μας».

Ὁ Ἀπολλώνιος

45. Ὁ θαυμασμὸς ὁ ἐμπνεύσας εἰς τὸν Wallis τοὺς λόγους, τοὺς ὁποίους πρὸ ὀλίγου ἐμνημονεύσαμεν, διαφαίνεται ἐξ ἴσου καθαρὰ καὶ εἰς τὴν ἀκόλουθον δήλωσιν τοῦ Leibniz: «ἐκεῖνος, ὁ ὁποῖος κατανοεῖ τὸν Ἀρχιμήδη καὶ τὸν Ἀπολλώνιον, θαυμάζει ὀλιγώτερον τὰς ἐπινοήσεις τῶν νεωτέρων μεγάλων ἀνδρῶν».

Εἰς τοὺς λόγους αὐτοὺς τοῦ Leibniz ἀναφέρεται πλησίον τοῦ Ἀρχιμήδους ἕνα ἄλλο ὄνομα καὶ ἐξαίρεται ἕνας ἄλλος γεωμέτρης, εἰς τὸν ὁποῖον ἀπονέμεται οὕτω ἡ ὑψίστη τιμὴ (τὴν ὁποίαν μεταξὺ τῶν συγχρόνων μόνον ὁ Gauss μέχρι τῆς ὥρας ἐπέτυχε) νὰ τοποθετῆται εἰς τὴν αὐτὴν στάθμην μὲ τὸν Συρακούσιον μαθηματικόν.

Εἶναι ὁ Ἀ π ο λ λ ώ ν ι ο ς ὁ Π ε ρ γ α ῖ ο ς, γεννηθεὶς εἰς τὴν Πέργην τῆς Παμφυλίας, κατά τινας 40 καὶ κατ' ἄλλους 25 ἔτη πρὸ τοῦ Ἀρχιμήδους, ἐνῷ ὑπάρχουν καὶ οἱ θεωροῦντες τὸ 170 π.Χ. ὡς ἔτος τῆς ὡριμότητός του. Εἰς τὴν Ἀλεξάνδρειαν εἶχε διδασκάλους τοὺς διαδόχους τοῦ Εὐκλείδου. Διέμεινεν ἀκόμη εἰς Ἔφεσον καὶ ἔπειτα εἰς Πέργαμον, πόλιν διαθέτουσαν Πανεπιστήμιον καὶ Βιβλιοθήκην, ἱδρύματα παραπλήσια πρὸς ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα κατέστησαν διάσημον τὴν Ἀλεξάνδρειαν. Ὅτι ὁ Ἀπολλώνιος ἐδίδαξε δημοσίᾳ ἐδῶ καὶ ἀλλαχοῦ εἶναι δυνατόν, μάλιστα πιθανόν, ἀλλ' ἱστορικῶς μὴ ἐξηκριβωμένον.

Περὶ τῆς ζωῆς του γνωρίζομεν τόσον ὀλίγα, ὥστε δὲν κατέστη ἀκόμη δυνατὸν νὰ ἐξακριβωθῇ τελικῶς, ἂν οὗτος, πρέπει νὰ ταυτισθῇ μὲ ἕνα ἀστρονόμον τῆς ἐποχῆς, καλούμενον Ἀπολλώνιον ε (ἔψιλον), πρὸς διάκρισιν ἀπὸ πολλὰ ἄλλα ὁμώνυμα πρόσωπα (μία πρόσφατος ἐγκυκλοπαιδεία ἀναγράφει ὄχι ὀλιγώτερα τῶν 128). Ὁ σχολιαστὴς Πάππος τὸν περιγράφει ὡς ἄνθρωπον μὲ χαρακτῆρα ματαιόδοξον καὶ ὑπεροπτικόν, μεθυσθέντα ἐκ τῆς μεγάλης πρὸς αὐτὸν ἐκτιμήσεως τῶν συγχρόνων του, οἱ ὁποῖοι, ζῶντος ἔτι τοῦ Ἀρχιμήδους, ἐσυνήθιζον νὰ τὸν ἀποκαλοῦν «μέγαν γεωμέτρην» καὶ «κατ' ἐξοχὴν γεωμέτρην».

Ἀπὸ τὸν θαυμασμὸν αὐτὸν ἤντλησεν ὁ Περγαῖος τὴν δύναμιν ν' ἀσκήσῃ μὲ ἐλευθεριότητα κριτικὴν τῶν ἔργων τοῦ Εὐκλείδου καὶ ἐπρότεινε ριζικὰς τροποποιήσεις εἰς τὴν γενικὴν διάταξιν τῆς ὕλης καὶ εἰς τινα σημαντικὰ χωρία τῶν Σ τ ο ι χ ε ί ω ν. Ἂν καὶ αἱ σχετικαὶ εἰδήσεις εἶναι, ἀτυχῶς, ἐλλιπεῖς καὶ ἀποσπασματικαί, ἀρκοῦν παρὰ ταῦτα, ν' ἀποδείξουν ὅτι εἰς τὸν Ἀπολλώνιον ἀνῆκει ἡ τιμή, ὅτι πρῶτος μετὰ θάρρους διήνοιξε μίαν ὁδόν, ἡ ὁποία ἐγκαταλειφθεῖσα μετ' αὐτόν, ἐπὶ

μακρούς αἰῶνας, ἀνευρέθη καὶ ἐσυνεχίσθη ὑπὸ τῶν νεωτέρων μὲ τὴν ψευδαίσθησιν, μάλιστα, ὅτι πρῶτοι αὐτοὶ ὕψωσαν τὴν σημαίαν τῆς ἐπαναστάσεως ἐναντίον μιᾶς βαρυτάτης δεσποτείας.

Δὲν εἶναι αὐτὴ ἡ μόνη ἐργασία, τὴν ὁποίαν ἐνέπνευσαν εἰς τὸν Ἀπολλώνιον τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου. Μέσῳ τῶν Ἀράβων ἔφθασε μέχρις ἡμῶν ἡ πληροφορία περὶ ἐρευνῶν, τὰς ὁποίας ἐνεπνεύσθη ὁ Ἀπολλώνιος ἐκ τοῦ X βιβλίου, καὶ τελικὸς καρπὸς τῶν ὁποίων ὑπῆρξε μία γενίκευσις (ποία;) τῆς θεωρίας τῶν ἀσυμμέτρων, τῆς ἀναπτυσσομένης εἰς τὸ βιβλίον τοῦτο τῶν Στοιχείων*.

Ἐπὶ πλέον, Ὑψικλῆς ὁ Ἀλεξανδρεὺς (Β' αἰὼν μ.Χ.) — γεωμέτρης περὶ τοῦ ὁποίου θ' ἀσχοληθῶμεν μετ' ὀλίγον — ἀναφέρει ὅτι ὁ Ἀπολλώνιος ἐτελειοποίησεν ἕνα ἔργον τοῦ Ἀρισταίου τοῦ Πρεσβυτέρου (§ 32) περὶ πολυέδρων, καταλήξας εἰς αὐστηροτάτην ἀπόδειξιν τῆς ἀκολούθου προτάσεως: «Ἐὰν ἕνα δωδεκάεδρον καὶ ἕνα εἰκοσάεδρον εἶναι ἐγγεγραμμένα εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν, ὁ λόγος τῶν ὄγκων των ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν ἐπιφανειῶν των».

Τέλος ἔχει διασωθῆ ἡ μνήμη τριῶν ἄλλων ἔργων τοῦ Ἀπολλωνίου ἀναφερομένων εἰς τὴν στοιχειώδη γεωμετρίαν. Μολονότι τὰ ἔργα αὐτὰ ἐχάθησαν, αἱ πληροφορίαι, τὰς ὁποίας παρέχει ὁ Πάππος μᾶς ἐπιτρέπουν νὰ δώσωμεν ἰδέαν τοῦ χαρακτῆρος καὶ τοῦ περιεχομένου των.

α) Περὶ ἐπαφῶν. Ἡ ἐργασία αὕτη περιλαμβάνεται εἰς δύο βιβλία, εἰς τὰ ὁποῖα παρείχετο ἡ λύσις, εἰς ὅλας τὰς δυνατὰς περιπτώσεις, τοῦ ἀκολούθου προβλήματος: «Δοθέντων τριῶν στοιχείων, ἕκαστον τῶν ὁποίων δύναται νὰ εἶναι σημεῖον, εὐθεῖα, περιφέρεια, νὰ γραφῇ περιφέρεια διερχομένη διὰ τῶν σημείων καὶ ἐφαπτομένη τῶν εὐθειῶν καὶ περιφερειῶν». Σήμερον πολλοὶ προτιμοῦν νὰ θεωροῦν ὅλας τὰς δυνατὰς ὑποθέσεις, ὡς μερικὰς περιπτώσεις τῆς κατασκευῆς περιφερείας ἐφαπτομένης τριῶν ἄλλων, δηλαδὴ τοῦ προβλήματος ποὺ ὀνομάζεται εἰς τὰ σύγχρονα ἐγχειρίδια γεωμετρίας «πρόβλημα τοῦ Ἀπολλωνίου». Αἱ πολλαὶ καὶ ἀξιόλογοι ἐργασίαι, αἱ ὁποῖαι ἀφιερώθησαν εἰς τὸ θέμα τοῦτο ἀπὸ τῆς Ἀναγεννήσεως μέχρι τῶν ἡμερῶν μας, καταδεικνύουν τὴν διαρκῆ ἀξίαν τὴν ἀποδιδομένην εἰς αὐτό.

β) Ἐπίπεδοι τόποι. Ἄλλη ἐργασία εἰς δύο βιβλία, ἀποβλέπουσα εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ γεωμετρικοῦ τόπου ἑνὸς σημείου ἐπὶ ἐπιπέδου, εἰς πολλὰς περιπτώσεις ἔνθα ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ ἢ περιφέρεια (οἱ ἀρχαῖοι διέκρινον ἐπίπεδον τόπον, ἂν ὁ τόπος εὐθεῖα ἢ περιφέρεια, στερεὸν τόπον, ἂν κωνικὴ τομή, γραμμικὸν

* Βλ. Ὑπόμνημα τοῦ F. Woepcke, δημοσιευθὲν εἰς τὸν τόμον XIV (Paris, 1856) τῶν Mém. prés. par divers savants.

τόπον, ἂν τυχοῦσα ἄλλη καμπύλη). Παράδειγμα, ἡ γνωστὴ «περιφέρεια τοῦ 'Απολλωνίου», ἡ ὁποία εἶναι γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου, τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ δύο σταθερῶν σημείων αὐτοῦ ἔχουν λόγον σταθερόν.

γ) Περὶ νεύσεων. Τὸ ἔργον τοῦτο, ἀποτελούμενον ἐκ δύο βιβλίων, περιεῖχε προβλήματα νεύσεων, τῶν ὁποίων ἡ γενικὴ διατύπωσις εἶχεν ὡς ἑξῆς: «δύο δοθεισῶν γραμμῶν θέσει, θεῖναι μεταξὺ τούτων εὐθεῖαν τῷ μεγέθει δεδομένην νεύουσαν ἐπὶ δοθὲν σημεῖον»[23].

Εἰς τὸν αὐτὸν γεωμέτρην ἀποδίδεται μία γραφικὴ μέθοδος εὐθειοποιήσεως τῆς περιφερείας, στηριζομένη εἰς τὴν χρῆσιν εἰδικῆς καμπύλης, ἡ ὁποία δὲν κατέστη δυνατὸν μέχρι τῆς στιγμῆς νὰ ἐξακριβωθῇ. Μερικοὶ ἱστορικοὶ παραδέχονται ὅτι ἡ ἐν λόγῳ καμπύλη πρέπει νὰ ἦτο ἡ κυκλικὴ στερεὰ ἕλιξ, λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι κατά τινα φήμην ὁ 'Απολλώνιος εἶχεν ἀφιερώσει εἰς τὴν καμπύλην αὐτὴν εἰδικὴν πραγματείαν (περὶ Κοχλίου)[24].

Σχ. 9

Εἰς τὸν 'Απολλώνιον ἀνήκει ἀκόμη ἡ τιμὴ ὅτι ἔλυσε τὸ Δήλιον πρόβλημα μὲ τὴν ἀκόλουθον μέθοδον: Ἔστωσαν αἱ δύο δοθεῖσαι εὐθεῖαι (σχ. 9) AB = a, AC = b διατεταγμέναι ὀρθογωνίως. Ἂς συμπληρωθῇ τὸ ὀρθογώνιον ABDC καὶ ἂς προσδιορισθῇ τὸ κέντρον αὐτοῦ O. Ἂς ἀχθῇ κατόπιν διὰ τοῦ D εὐθεῖα τοιαύτη, ὥστε τὰ σημεῖα τομῆς αὐτῆς μετὰ τῶν AB καὶ AC προεκτεινομένων, ἤτοι τὰ σημεῖα X, Y νὰ ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ τὸ σημεῖον O, πρᾶγμα ἐπιτεύξιμον διὰ δοκιμῶν. Τότε BX = x καὶ CY = y εἶναι αἱ δύο ζητούμεναι μέσαι.

Τοῦτο ἐπαληθεύεται εὐκόλως, ἐὰν γράψωμεν τὰς ἐξισώσεις διὰ τῶν ὁποίων ἐκφράζονται αἱ συνθῆκαι νὰ κεῖνται τὰ τρία σημεῖα X, D, Y ἐπ' εὐθείας, τὰ δὲ X καὶ Y εἰς ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ O:

$$\frac{b}{x} = \frac{y}{a}$$

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2.$$

Ἐκ τούτων προκύπτουν αἱ ἀντιστοίχως ἰσοδύναμοι σχέσεις:

$$xy = ab, \quad x(x + a) = y(y + b).$$

Ἀπαλείφοντες ἤδη διαδοχικῶς ἐκ τῆς δευτέρας τὰ μεγέθη y καὶ x, μέσῳ τῆς πρώτης, εὑρίσκομεν, ὡς ἔδει,

$$x^3 = ab^2, \quad y^3 = a^2b.$$

ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό,

$$\frac{b}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{a}$$

(§ 25, § 26, § 32).

46. Πρέπει νὰ σημειώσωμεν ὅτι, παρ' ὅλην τὴν ἀναμφισβήτητον ἀξίαν των, δὲν εἶναι ἐπὶ τῶν ἔργων τούτων, ὅπου στηρίζεται ἡ μεγίστη φήμη, μὲ τὴν ὁποίαν ἀπὸ αἰώνων περιέβαλλον τὸν Ἀπολλώνιον ὅλοι οἱ δυνάμενοι νὰ ἐκτιμήσουν μίαν μαθηματικὴν ἔρευναν. Θεμέλιον, σχεδὸν ἀποκλειστικόν, τῆς φήμης του εἶναι ἡ πραγματεία του περὶ κωνικῶν τομῶν, γνωστὴ ὑπὸ τὸν σύντομον τίτλον Κωνικά, μία ἀπὸ τὰς ἐξοχωτέρας ἐργασίας, ποὺ ἔχει νὰ παρουσιάσῃ ἡ ἐπιστημονικὴ βιβλιογραφία ὅλων τῶν ἐποχῶν καὶ ὅλων τῶν ἐθνῶν.

Ἐκ τῶν ὀκτὼ βιβλίων, ποὺ τὴν ἀπετέλουν, τὰ τέσσαρα πρῶτα διεσώθησαν εἰς τὸ πρωτότυπον, πιθανῶς διότι, χρησιμοποιούμενα ὡς διδακτικὸν κείμενον εἰς τὰ σχολεῖα, ἐτύγχανον ἀλλεπαλλήλων ἀντιγραφῶν καὶ οὕτω ἐκυκλοφόρουν περισσότερον τῶν ἄλλων τριῶν, τῶν ὁποίων διεσώθη ἀραβικὴ μετάφρασις. Τὸ ὄγδοον καὶ τελευταῖον θεωρεῖται ὁριστικῶς ἀπολεσθέν.

Γνωρίζομεν ὅτι δὲν ἦτο ὁ Ἀπολλώνιος ἐκεῖνος, ὁ ὁποῖος ἀνεκάλυψε τὰς περιφήμους καμπύλας, οὔτε καὶ ὁ πρῶτος ἐπιχειρήσας νὰ ἐκθέσῃ μεθοδικῶς τὴν θεωρίαν των. Τὸ γεγονὸς ὅμως ὅτι τὸ ἔργον του ἐπέτυχε νὰ ἐπιφέρῃ τὴν ἔκλειψιν τῶν ἀναλόγων ἔργων τῶν ἀποδιδομένων εἰς τὸν Ἀρισταῖον, τὸν Εὐκλείδη, ἴσως δὲ καὶ τὸν Ἀρχιμήδη, μαρτυρεῖ τὴν ἀδιαφιλονίκητον ὑπεροχὴν τοῦ ἰδικοῦ του. Πάντως ἡ ἐξαφάνισις τῶν ἄλλων καθιστᾷ δυσχερῆ τὸν προσδιορισμὸν τῶν τελειοποιήσεων, τὰς ὁποίας ἠδυνήθη νὰ ἐπιφέρῃ ὁ Ἀπολλώνιος εἰς τὴν θεωρίαν τῶν κωνικῶν τομῶν, μολονότι ὑπάρχουν ἀσφαλεῖς ἐνδείξεις ἐπιτρέπουσαι νὰ συμπεράνωμεν ὅτι ἡ νέα πραγματεία διαφέρει τῶν προηγουμένων κατὰ τοῦτο· ὅτι ὁ Περγαῖος ὁρμᾶται ἀπὸ γενικὸν ὁρισμὸν τῶν περιφήμων καμπύλων ὡς τομῶν κώνου κυκλικῆς βάσεως παραγομένων ὑπὸ τυχόντων ἐπιπέδων, ἐνῷ οἱ προγενέστεροι ἐθεώρουν ἀποκλειστικῶς τὰς τομὰς τὰς παραγομένας ὑπὸ ἐπιπέδων καθέτων ἐπὶ τὴν γενέτειραν. Ἐντεῦθεν καὶ ὁ λόγος, διὰ τὸν ὁποῖον ἐθεώρησεν ἀπαραίτητον νὰ ἐγκαταλείψῃ τὰ παλαιὰ ὀνόματα τῶν καμπύλων αὐτῶν καὶ νὰ τὰ ἀντικαταστήσῃ δι' ἄλλων προσφυεστέρων, τὰ ὁποῖα εἶναι αὐτὰ ποὺ χρησιμοποιοῦμεν καὶ

σήμερον. Ἂς προσθέσωμεν ὅτι ἐπειδὴ διὰ τὸν Ἀπολλώνιον, ὡς καὶ διὰ τὸν Ἀρχιμήδη, μία ὑπερβολὴ ἐθεωρεῖτο ἀποτελουμένη ἀπὸ ἕνα μόνον κλάδον, ὅταν παρουσιάζετο περίπτωσις, καθ' ἣν ἔπρεπε νὰ ἐξετασθῇ ἡ καμπύλη πλήρης, ἐχρησιμοποίει τὴν ἔκφρασιν «τομαὶ ἀντικείμεναι».

Ὁ τρόπος τῆς ἐκθέσεως τοῦ Ἀπολλωνίου ἀκολουθεῖ πιστῶς τὸ εὐκλείδιον ὑπόδειγμα, εἰδικώτερα εἰς τὰ τρία πρῶτα βιβλία. Ὡς χαρακτηριστικὸν τῆς διατάξεως, τὴν ὁποίαν προτιμᾷ, ἀναφέρομεν ὅτι περὶ τὸ τέλος ἑκάστου βιβλίου τοποθετοῦνται τὰ προβλήματα ἐκεῖνα, τῶν ὁποίων ἡ λύσις στηρίζεται ἐπὶ τῶν προηγηθέντων θεωρημάτων.

47. Προβαίνοντες ἤδη εἰς λεπτομερεστέραν ἐπισκόπησιν τῶν Κωνικῶν τοῦ Ἀπολλωνίου, παρατηροῦμεν ὅτι τὸ Βιβλίον I ἀρχίζει μὲ μίαν σειρὰν ὁρισμῶν καὶ θεωρημάτων ἀφορώντων τοὺς κυκλικοὺς κώνους ἐν γένει. Ἀποδεικνύεται εἰδικώτερα ἡ ὕπαρξις δευτέρας σειρᾶς κυκλικῶν τομῶν εἰς τοὺς πλαγίους κώνους. Κατόπιν ἀποδεικνύεται ἡ θεμελιώδης ἰδιότης τῶν κωνικῶν τομῶν, ἡ ὁποία ἐκφράζεται σήμερον διὰ τῆς καρτεσιανῆς ἐξισώσεως :

$$y^2 = 2px + qx^2, \qquad (\alpha)$$

ἔνθα q μικρότερον, ἴσον ἢ μεγαλύτερον τοῦ μηδενός, καθ' ὅσον ἡ καμπύλη ἔχει 0,1 ἢ 2 πραγματικὰ σημεῖα εἰς τὸ ἄπειρον.

Ὁρμώμενος ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν καὶ χρησιμοποιῶν μίαν ὁρολογίαν ἐν χρήσει ἀπὸ τῆς ἐποχῆς τοῦ Πυθαγόρου διὰ μίαν σημαντικὴν κατηγορίαν προβλημάτων (§ 23) (ἐννοοῦμεν τὴν «παραβολὴν τῶν χωρίων», ποὺ ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως εἰς ὅλας της τὰς περιπτώσεις), προτείνει τὰ ὀνόματα «ἔλλειψις», «παραβολὴ» καὶ «ὑπερβολὴ» ὡς καὶ τὰς ἐννοίας «ὀρθία πλευρὰ» καὶ «πλαγία πλευρά».

Ἕπεται ἕνα πλῆθος σπουδαίων θεωρημάτων ἐπὶ τῶν σειρῶν παραλλήλων τεταγμένων, τῶν χορδῶν καὶ ἐφαπτομένων, τὰ ὁποῖα παρέχουν τὰ μέσα διὰ τὸν προσδιορισμὸν κυκλικοῦ κώνου φέροντος παραβολὴν ἢ ἔλλειψιν ἢ ὑπερβολήν, τῶν ὁποίων δίδονται μία διάμετρος καὶ ἡ διεύθυνσις τῶν ἀντιστοίχων τεταγμένων καὶ ἐπὶ πλέον ἡ ὀρθία πλευρὰ (διὰ παραβολὴν) ἢ ἡ ὀρθία καὶ ἡ πλαγία (δι' ἔλλειψιν καὶ ὑπερβολήν). Οὕτω ἀποδεικνύεται πλήρως, ὅτι πᾶσα καμπύλη παριστωμένη ὑπὸ ἐξισώσεως τοῦ τύπου (α) δύναται νὰ ληφθῇ ὡς τομὴ κώνου μὲ κυκλικὴν βάσιν.

Εἰς τὸ Βιβλίον II γίνεται λόγος περὶ τῶν ἀσυμπτώτων τῆς ὑπερβολῆς ἢ τῶν δύο ἀντικειμένων τομῶν καὶ ἐξετάζονται περαιτέρω αἱ σχέσεις σημείων καὶ ἐφαπτομένων εἰς τὰς καμπύλας τοῦ εἴδους τούτου. Εἰδικώτερον, παρέχεται ἐδῶ, ὑπὸ μορφὴν γενικωτέραν τῆς συνήθους, ἡ κανονικὴ ἐξίσωσις τῆς ὑπερβολῆς ἀναφερομένης εἰς τὰς ἀσυμπτώτους της :

$$xy = k^2 \qquad (\beta)$$

Τὸ τελευταῖον μέρος τοῦ βιβλίου περιλαμβάνει πολλὰ ἐνδιαφέροντα προβλήματα χαράξεως ἐφαπτομένων εἰς κωνικάς, κατὰ διαφόρους τρόπους.

Τὰ ὅρια, τὰ ὁποῖα προκαθωρίσαμεν εἰς τὸ βιβλίον μας, δὲν μᾶς ἐπιτρέπουν νὰ μνημονεύσωμεν πολλὰς ἐκ τῶν προτάσεων τοῦ αὐτοῦ τύπου, τὰς ὁποίας ἀποδεικνύει ὁ Ἀπολλώνιος. Ὑποχρέωσίς μας εἶναι ὅμως νὰ σημειώσωμεν ὅτι, ὅπως βεβαιοῖ ὁ ἴδιος μετὰ θριάμβου εἰς τὸν πρόλογον τοῦ μεγάλου ἔργου του, αἱ ἐν λόγῳ προτάσεις τοῦ ἐπέτρεψαν νὰ προσδιορίσῃ πλήρως «τὸν γεωμετρικὸν τόπον σημείου τοιούτου, ὥστε τὸ γινόμενον δύο εὐθειῶν ἀγομένων ἐξ αὐτοῦ ὑπὸ δοθείσας γωνίας πρὸς δύο εὐθείας σταθεράς, νὰ ἔχῃ δοθέντα λόγον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον δύο ἄλλων εὐθειῶν ἀγομένων ἐπίσης ἐξ αὐτοῦ ὑπὸ δοθείσας γωνίας πρὸς δύο ἄλλας σταθερὰς εὐθείας, ἢ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας τῆς ἀγομένης ὁμοίως ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν πρὸς τρίτην τινα σταθερὰν εὐθεῖαν». Τὸ ἱστορικὸν αὐτὸ πρόβλημα εἶναι ὁ «ἐπὶ τρεῖς καὶ τέσσαρας γραμμὰς τόπος» τῶν ἀρχαίων γεωμετρῶν.

Ὁ ἐν λόγῳ γεωμετρικὸς τόπος εἶναι πάντοτε καμπύλη δευτέρου βαθμοῦ. Εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν τεσσάρων γραμμῶν ἡ καμπύλη εἶναι περιγεγραμμένη εἰς τὸ ἁπλοῦν τετράπλευρον, τοῦ ὁποίου πλευραὶ εἶναι αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι. Καὶ ἐπειδὴ ἀντὶ τοῦ σταθεροῦ λόγου εἶναι θεμιτὸν νὰ δώσῃ κανεὶς ἕνα σημεῖον τοῦ ζητουμένου τόπου, δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν ὅτι ὁ μέγας γεωμέτρης, ἐν ἐσχάτῃ ἀναλύσει, εἶχε λύσει τὸ θεμελιῶδες πρόβλημα «νὰ κατασκευασθῇ κωνικὴ τομὴ διερχομένη διὰ πέντε σημείων».

Πρὸς ἀτυχίαν μας ὁ Ἀπολλώνιος δὲν παρέχει καμμίαν σχετικὴν λεπτομέρειαν. Εἶναι λοιπὸν φυσικὸν νὰ διερωτηθῶμεν μήπως ἡ ἔπαρσις, ποὺ ἀπετέλει γνώρισμα τοῦ χαρακτῆρος του, τὸν παρέσυρεν εἰς τὸ νὰ ὑποσχεθῇ πράγματα περισσότερα τῶν ὅσων ἦτο εἰς θέσιν νὰ πραγματοποιήσῃ[35]. Τοιαύτη ὅμως ἀνευλαβὴς εἰκασία δὲν δύναται νὰ εὐσταθήσῃ, ἀφ' ὅτου ὁ βαθύτατος γνώστης τῆς ἑλληνικῆς γεωμετρίας Zeuthen H. G., ἀπέδειξεν ὅτι μὲ τὴν βοήθειαν τῶν στοιχείων τῶν παρεχομένων ὑπὸ τοῦ Ἀπολλωνίου τὸ πρόβλημα τῶν τριῶν καὶ τεσσάρων εὐθειῶν δύναται μὲ εὐχέρειαν νὰ λυθῇ εἰς τὴν ὑπόθεσιν ὅτι δύο ἐξ αὐτῶν εἶναι μεταξύ των παράλληλοι καὶ ἐπὶ πλέον ἀπέδειξεν, ὅτι τὸ γενικὸν πρόβλημα δύναται πάντοτε ν' ἀναχθῇ εἰς τὴν εἰδικὴν ταύτην περίπτωσιν.

Μεταξὺ τῶν πολλῶν μετρικῶν προτάσεων ποὺ ἀπαντῶμεν εἰς τὸ Βιβλίον III, παρατηροῦμεν ὅτι πολλαὶ ἐξ αὐτῶν εἶναι μερικαὶ περιπτώσεις τοῦ ἀκολούθου θεωρήματος: «ἐὰν ἐκ τινος σημείου M τοῦ ἐπιπέδου μιᾶς κωνικῆς τομῆς ἀχθοῦν δύο χορδαὶ AB, CD σταθερῶν διευθύνσεων, ὁ λόγος

$$MA \cdot MB : MC \cdot MD$$

ἔχει τιμὴν σταθεράν, ἀνεξάρτητον τῆς θέσεως τοῦ σημείου M».

Ἂν καὶ ἡ πρότασις ἦτο ἤδη γνωστὴ εἰς τὸν Ἀρχιμήδη, φέρει σήμερον τὸ ὄνομα «Θεώρημα τοῦ Newton», ἴσως διὰ νὰ ὑπενθυμίζῃ τὴν γενίκευσιν, ποὺ ἐπέτυχεν ὁ ἀθάνατος Ἄγγλος γεωμέτρης, εἰς ὅλας τὰς ἀλγεβρικὰς καμπύλας, ὅπως θὰ ἴδωμεν ἐν οἰκείῳ τόπῳ.

Μία ἄλλη ἀξιόλογος κατηγορία θεωρημάτων τοῦ Ἀπολλωνίου ἀφορᾷ (διὰ νὰ χρησιμοποιήσωμεν ἕνα σύγχρονον ὅρον) τὰς κωνικὰς τομὰς ὡς περιβαλλούσας εὐθειῶν καὶ καταλήγει εἰς τὴν κατασκευὴν ἐφαπτομένης διερχομένης διὰ δοθέντος σημείου τοῦ ἐπιπέδου δοθείσης κωνικῆς τομῆς.

Εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς παραβολῆς τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸ ἑπόμενον: «δεδομένων εἰς τὸ ἐπίπεδον δύο εὐθειῶν καὶ ἑνὸς σημείου ἐφ' ἑκάστης, νὰ ἀχθῇ ἔκ τινος σημείου τοῦ ἐπιπέδου εὐθεῖα ἀποτέμνουσα ἐπὶ τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν τμήματα, μετρούμενα ἀπὸ τῶν δοθέντων σημείων, τοιαῦτα ὥστε νὰ ἔχουν μεταξύ των δοθέντα λόγον». Αὐτὸ εἶναι τὸ πρόβλημα ποὺ ἔφερε τὸν τίτλον λόγου ἀποτομή. Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο ὁ Ἀπολλώνιος ἀφιέρωσεν εἰδικὴν ἐργασίαν ὑπὸ τὸν αὐτὸν τίτλον, τῆς ὁποίας δὲν ἔχομεν σήμερον παρὰ μίαν ἀραβικὴν μετάφρασιν[26].

Εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ὑπερβολῆς τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸ ἀνωτέρω μὲ τὴν μόνην διαφορὰν ὅτι τῶν δύο ἀποτεμνομένων εὐθυγράμμων τμημάτων δίδεται, ἀντὶ τοῦ λόγου, τὸ ὀρθογώνιον. Εἶναι δὲ τὸ πρόβλημα γνωστὸν ὑπὸ τὸν τίτλον χωρίου ἀποτομή, εἰς τὸ ὁποῖον ἐπίσης ὁ Ἀπολλώνιος ἀφιέρωσεν εἰδικὴν ἐργασίαν, τῆς ὁποίας γνωρίζομεν μόνον ὅσα ὁ Πάππος μνημονεύει περὶ αὐτῆς. Ἐκ τῶν ἀρκετὰ λεπτολογημένων πληροφοριῶν τοῦ Πάππου κατέστη δυνατὴ μία ἰδεατὴ ἀνακατασκευὴ τοῦ ἀπολεσθέντος ἔργου.

Ἂς προσθέσωμεν ὅτι ὑπὸ παρομοίας συνθήκας εὑρισκόμεθα ἀναφορικῶς πρὸς ἕνα τρίτον ἔργον τοῦ αὐτοῦ γεωμέτρου ἀφιερωμένον εἰς τὴν οὕτω καλουμένην διωρισμένην τομήν, ἤτοι εἰς τὸ ἀκόλουθον πρόβλημα: «δοθέντων ἐπ' εὐθείας τεσσάρων σημείων A, B, C, D, νὰ εὑρεθῇ ἐπ' αὐτῆς ἄλλο σημεῖον P τοιοῦτον, ὥστε ὁ λόγος

$$AP \cdot CP : BP \cdot DP$$

νὰ εἶναι σταθερός»[27].

Ἂς ἐπιστρέψωμεν ἤδη εἰς τὸ Βιβλίον III τῶν Κωνικῶν διὰ νὰ σημειώσωμεν τὴν ἐκεῖ παρουσίαν τῶν ἑστιῶν εἰς τὰς μετὰ κέντρου καμπύλας. Ἀναπτύσσονται αἱ σημαντικώτεραι ἰδιότητες αὐτῶν, χωρὶς ἐν τούτοις νὰ χαρακτηρίζωνται μὲ εἰδικὸν ὄνομα. Περὶ διευθετουσῶν οὐδεμία γίνεται μνεία — εἰς τὸ σημεῖον ἀκριβῶς τοῦτο ἐντοπίζεται συνήθως ἡ ἀξιολογωτέρα ἔλλειψις τοῦ ἔργου τοῦ Ἀπολλωνίου — οὔτε καὶ περὶ ἑστίας τῆς παραβολῆς. Κατὰ πόσον τοιαύτη σιωπὴ δύναται νὰ ἑρμηνευθῇ ὡς σημαίνουσα — πρᾶγμα ἐλάχιστα πιθανὸν — ὅτι ὁ Ἀπολλώνιος ἠγνόει τὴν

ὕπαρξιν τοῦ σπουδαιοτάτου αὐτοῦ σημείου, δὲν εἴμεθα εἰς θέσιν νὰ ἐξακριβώσωμεν. Μιὰ ἀπάντησις εἰς τὴν ἀπορίαν αὐτὴν θὰ ὑπῆρχεν ἴσως εἰς ἕνα ἀκόμη ἔργον του περὶ καυστικῶν κατόπτρων, τοῦ ὁποίου ὅμως οὐδὲν ἴχνος εὑρέθη μέχρι τῆς στιγμῆς.

Δὲν δυνάμεθα νὰ κλείσωμεν τὰς πληροφορίας αὐτὰς περὶ τοῦ III βιβλίου τῶν Κωνικῶν, χωρὶς νὰ ἀναφερθῶμεν εἰς μίαν σπουδαιοτάτην ὁμάδα προτάσεων, περὶ τὸ τέλος τοῦ βιβλίου, ἐκ τῶν ὁποίων διδασκόμεθα εἰς εἰδικὰς περιπτώσεις, τὴν γένεσιν τῶν κωνικῶν τομῶν μέσῳ προβολικῶν δεσμῶν ἀκτίνων.

Μεγαλυτέραν ἑνότητα παρουσιάζει τὸ ἑπόμενον Βιβλίον IV, τοῦ ὁποίου πρόγραμμα εἶναι ἡ ἔρευνα τοῦ ἀριθμοῦ τῶν σημείων τομῆς δύο κωνικῶν εἰς τὰς διαφόρους ἀμοιβαίας θέσεις, εἰς τὰς ὁποίας αὗται δύνανται νὰ εὑρεθοῦν. Αἱ σχετικαὶ προτάσεις προβάλλουν εὐθὺς ἐκ τῆς ἐνοράσεως, ἀλλ' ἡ αὐστηρὰ ἀπόδειξις τῆς ἀληθείας των δύναται νὰ γίνῃ μόνον διὰ τῆς χρήσεως διαφόρων τεχνασμάτων, πολλὰ τῶν ὁποίων στηρίζονται εἰς τὴν εἰς ἄτοπον ἀπαγωγήν. Ἡ σπουδαιότης τῶν συμπερασμάτων συνίσταται εἰς τὰς ἐφαρμογάς, τὰς ὁποίας ταῦτα εὑρίσκουν κατὰ τὰς διερευνήσεις προβλημάτων βαθμοῦ ἀνωτέρου τοῦ δευτέρου.

48. Μὲ τὸ Βιβλίον V εἰσερχόμεθα εἰς τὴν ὑψηλοτέραν περιοχὴν τῆς θεωρίας τῶν κωνικῶν, ἔνθα τίθενται αἱ βάσεις τῆς θεωρίας τῶν καθέτων ἐπὶ τὰς κωνικὰς τομάς. Ὁ Ἀπολλώνιος ἀποδεικνύει ὄχι μόνον ὅτι ἐξ ἑνὸς σημείου τοῦ ἐπιπέδου μιᾶς κωνικῆς διέρχονται ἐν γένει τέσσαρες κάθετοι τῆς καμπύλης, ἀλλ' ἀκόμη τὴν ὕπαρξιν ἀπείρων σημείων ἕκαστον τῶν ὁποίων διαπερᾶται ὑπὸ δύο μόνον καθέτων. Ὁ γεωμετρικὸς τόπος των εἶναι, ὅπως θὰ ἐλέγομεν σήμερον, ἡ «ἐνειλιγμένη», καμπύλη τῆς ὁποίας ὁ Ἀπολλώνιος εὑρίσκει τὰς πλέον χαρακτηριστικὰς ἰδιότητας, χωρὶς παρὰ ταῦτα νὰ τὴν ἐξετάζῃ ρητῶς.

Οἱ πόδες τῶν καθέτων, ποὺ δύνανται ν' ἀχθοῦν ἔκ τινος σημείου πρὸς μίαν κωνικὴν μετὰ κέντρου, λαμβάνονται διὰ τομῆς τῆς κωνικῆς μὲ μίαν ὑπερβολήν, ἡ ὁποία σήμερον καλεῖται «ὑπερβολὴ τοῦ Ἀπολλωνίου». Προκειμένου ὅμως περὶ παραβολῆς, ὡς βοηθητικὴ γραμμὴ δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ μία περιφέρεια, λεπτομέρεια σημαντικὴ ὑπὸ ἔποψιν γραφικῆς κατασκευῆς, ἡ ὁποία λεπτομέρεια διέφυγε τῆς προσοχῆς τοῦ Ἀπολλωνίου. Διὸ καὶ ἐσχολιάσθη ἀπὸ τὸν Πάππον *.

* Διὰ τὴν ἔλλειψιν:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

ἡ ἀπολλώνιος ὑπερβολὴ ὡς πρὸς τὸ σημεῖον (ξ, η) ἔχει ἐξίσωσιν:

$$a^2 (x - \xi)\, y = b^2 (y - \eta)\, x,$$

Εἰς τὸ Βιβλίον VI τοῦ μεγάλου ἔργου καθορίζονται αἱ συνθῆκαι ἰσότητος καὶ ὁμοιότητος δύο κωνικῶν ἢ δύο τμημάτων αὐτῶν. Εἶναι γενικὴ ἡ πεποίθησις ὅτι ἐδῶ ὁ Περγαῖος περιωρίσθη εἰς τὴν ἀναδιάρθρωσιν καὶ συμπλήρωσιν μιᾶς θεωρίας, τῆς ὁποίας τὰ κύρια σημεῖα εἶχον ἤδη διατυπωθῆ πρὸ αὐτοῦ.

Ἀρκετὰ μεγαλυτέραν πρωτοτυπίαν παρουσιάζει τὸ ἀκόλουθον Βιβλίον VII, τὸ τελευταῖον ἐκ τῶν σωζομένων. Εἰς τοῦτο ἐκτίθενται ἀξιόλογοι ἐκφράσεις διὰ μερικὰς συναρτήσεις διαμέτρων καὶ παραμέτρων τῶν κωνικῶν τομῶν καὶ προσδιορίζονται κατόπιν τὰ ἀκρότατα τῶν συναρτήσεων τούτων.

Πρὸ τῆς ἀδυναμίας ν' ἀναφέρωμεν τὸ πλῆθος τῶν ἀληθειῶν, τὰς ὁποίας παρατάσσει εἰς τὸ βιβλίον τοῦτο ὁ ἀθάνατος γεωμέτρης, περιοριζόμεθα νὰ σημειώσωμεν ἐκ τούτων τὰς προτάσεις ἐκείνας, ποὺ ὀνομάζονται σήμερον «Θεωρήματα τοῦ Ἀπολλωνίου» καὶ αἱ ὁποῖαι ἐκφράζουν ὅτι εἰς ἔλλειψιν καὶ ὑπερβολὴν μὲ a, b δύο τυχούσας συζυγεῖς διαμέτρους ὑπὸ γωνίαν ω, αἱ ποσότητες

$$a^2 \pm b^2, \quad ab\,\eta\mu\,\omega,$$

εἶναι ἀναλλοίωτοι.

Ὅσον ἀφορᾷ τὸ Βιβλίον VIII — ἄθῳον θῦμα τῶν αἰώνων τῆς βαρβαρότητος, ποὺ διεδέχθησαν τὸν ἑλληνικὸν πολιτισμὸν — γνωρίζομεν, κατὰ δήλωσιν τοῦ ἰδίου τοῦ συγγραφέως, ὅτι περιεῖχε τὰς λύσεις μερικῶν προβλημάτων σχετιζομένων πρὸς τὰς συναρτήσεις, ποὺ ἐξητάσθησαν εἰς τὸ προηγούμενον βιβλίον. Πολύτιμοι καὶ διεξοδικαὶ πληροφορίαι περιέχονται ἐπίσης εἰς τὰ Λήμματα, τὰ ὁποῖα συνέγραψεν ὁ Πάππος, ἵνα διευκολύνῃ τὴν κατανόησιν τοῦ πρωτοτύπου ἔργου. Ἐκ τῶν πληροφοριῶν τούτων ἠδυνήθη ὁ διάσημος ἀστρονόμος Halley (1656 - 1724) ν' ἀνασυνθέσῃ τὸ ἀπολεσθὲν βιβλίον εἰς μίαν ἐργασίαν, ποὺ θεωρεῖται ἀπὸ τὰς πλέον ἐπιτυχεῖς τοῦ εἴδους τούτου, ἀλλ' ἡ ὁποία φυσικὰ δὲν ἀρκεῖ νὰ μᾶς ἀποζημιώσῃ διὰ τὴν ἀξιοθρήνητον ἀπώλειαν τοῦ ὑψηλοτέρου μέρους τῆς μεγάλης ἀπολλωνείου συγγραφῆς.

49. Ἀλλ' ὅσον καὶ ἂν αὕτη μᾶς παρουσιάζεται σήμερον ἐλλιπής, ὅσον καὶ ἂν ὑπέστη διὰ μέσου τῶν αἰώνων πολλὰς καὶ βαθείας διαταρακτικὰς

ἐνῷ οἱ πόδες τῶν ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἀγομένων καθέτων ἐπὶ τὴν παραβολὴν

$$y^2 = 2px$$

προσδιορίζονται ἀπὸ τὴν ὑπερβολὴν ποὺ ἔχει ἐξίσωσιν:

$$xy + (p - \xi)\,y - p\eta = 0,$$

ἢ ἀπὸ τὴν περιφέρειαν:

$$x^2 + y^2 - (p + \xi)\,x - \frac{1}{2}\,\eta y = 0.$$

ἀλλοιώσεις, ἰδίως διὰ χειρὸς τῶν Ἀράβων, παρὰ ταῦτα ἡ ἐν λόγῳ συγγραφὴ ὀρθοῦται πρὸ ἡμῶν ὡς ἔργον ἄξιον πολλοῦ θαυμασμοῦ καὶ βαθείας μελέτης ἐκ μέρους τῶν νεωτέρων, ἂν μή τι ἄλλο, διότι συγκρίνοντες τὸ περιεχόμενον αὐτοῦ πρὸς τὴν ὕλην τῶν συγχρόνων βιβλίων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ θέματος, δὲν θὰ βραδύνωμεν ν' ἀντιληφθῶμεν, μετὰ 20 καὶ πλέον αἰῶνας, πόσον ἀσθενὴς εἶναι ἡ διαφορά. Ὅσον ἀφορᾷ δὲ τὰς ἀποδεικτικὰς μεθόδους, ἡ ἀπομάκρυνσις ἀπὸ τὰ σύγχρονα συγγράμματα ἀνωτέρας συνθετικῆς γεωμετρίας ἐμφανίζεται ἀρκετὰ ἔντονος, διότι (γεγονὸς παράδοξον, ἀλλ' ἐντελῶς σύμφωνον πρὸς τὴν ἀλήθειαν) τὸ ἔργον τοῦ Ἀπολλωνίου προσεγγίζει πολὺ περισσότερον πρὸς τὰς τελευταίας ἀναπτύξεις τῆς θεωρίας τῶν καμπύλων β' βαθμοῦ μέσῳ καρτεσιανῶν συντεταγμένων.

Πράγματι ὄχι μόνον αἱ ἰδιότητες, ποὺ χαρακτηρίζουν τὰς τρεῖς περιφήμους καμπύλας, μεταφράζονται, ὡς εἴδομεν, εἰς τὰς κανονικὰς ἐξισώσεις τῆς καρτεσιανῆς παραστάσεως, ἀλλὰ καὶ πλεῖστοι ἀπὸ τοὺς συλλογισμούς, μεταφραζόμενοι εἰς σύγχρονον ἀλγεβρικὴν γλῶσσαν, προκύπτουν ἰσοδύναμοι, κατὰ βάθος, πρὸς ἀπαλοιφάς, λύσεις ἐξισώσεων καὶ ἀλλαγὰς συντεταγμένων.

Διὰ τοῦτο εἰς τὸν μεγάλον Ἕλληνα γεωμέτρην ἀνήκει ἡ τιμὴ ὅτι ἀνεκάλυψε τὴν γονιμωτέραν μέθοδον πρὸς σπουδὴν τῶν τομῶν τοῦ κώνου καὶ ὅτι δι' ἐφαρμογῆς αὐτῆς ἔφθασεν εἰς ὅλας τὰς ὡραιοτέρας ἰδιότητας τῶν καμπύλων τούτων. Ὁ θαυμασμὸς τὸν ὁποῖον προεκάλεσεν ἐπὶ 20 αἰῶνας διὰ τὸ ἐπίτευγμα τοῦτο εἶναι ὅθεν ἀπολύτως δικαιολογημένος. Ὅτι δὲ τὸ συναίσθημα τοῦτο δὲν ἐξησθένησεν, οὔτε ἔσβυσεν εἰς τὰς ψυχὰς τῶν συγχρόνων, ἀποδεικνύεται ἀπὸ τὸ γεγονὸς ὅτι, ὅταν ὁ παρελθὼν αἰὼν παρέστη ἔκπληκτος εἰς τὴν ἀναγέννησιν τῆς καθαρᾶς γεωμετρίας διὰ τῶν ἐργασιῶν τοῦ Steiner, τὸ μόνον ἱστορικὸν πρόσωπον ποὺ ἠδυνήθη νὰ συγκριθῇ, ὡς πρὸς τὰ ἐπιτεύγματα, ἀμείωτον ὑπῆρξεν ὁ γεωμέτρης ποὺ ἐχάρισεν αἰωνίαν δόξαν εἰς τὴν Πέργην καὶ ἔφθασεν εἰς τὸ ἀπόγειον τῆς ἑλληνικῆς γεωμετρίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

ΦΘΙΝΟΠΩΡΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

50. Ὅπως ἀκριβῶς ἡ ἑλληνικὴ φιλοσοφία, ὑπὸ τὴν περιεσκεμμένην καὶ σοφὴν καθοδήγησιν τῆς τριάδος τῶν μεγάλων ἀνδρῶν, Σωκράτους, Πλάτωνος καὶ Ἀριστοτέλους, ἐπροχώρησε μὲ ἀσφαλῆ βήματα πρὸς τὴν ἀκμήν, καταυγάσασα τὴν ἐποχήν της μὲ τὰς λαμπροτέρας ἀστραπὰς τοῦ ἀνθρωπίνου πνεύματος, τοιουτοτρόπως καὶ κατὰ τὴν χρυσῆν περίοδον τῆς ἑλληνικῆς γεωμετρίας, μὲ τὴν ὁποίαν πρὸ ὀλίγου ἠσχολήθημεν, ὑπερέχουν ὡς γίγαντες τρεῖς κορυφαῖοι ἄνδρες, φέροντες τὰ ὀνόματα Εὐκλείδης, Ἀρχιμήδης, Ἀπολλώνιος.

Εἴδομεν ὅτι μὲ τὴν ἐργασίαν τοῦ πρώτου ἡ ἀνθρωπότης ἔφθασεν εἰς τὴν κατοχὴν μιᾶς ἐπιστημονικώτατα συντεταγμένης συλλογῆς ἀληθειῶν, ἀναφερομένων εἰς τὰς οὐσιώδεις ἰδιότητας τοῦ διαστήματος, ἡ ὁποία διὰ μέσου τῶν αἰώνων ἐπέπρωτο νὰ καταστῇ ἡ πυξὶς ἢ ὁ φάρος δι' ὅλους τοὺς ριψοκινδυνεύοντας εἰς τὴν δυσκολοταξίδευτον θάλασσαν τῆς γεωμετρικῆς ἐρεύνης.

Ὁ δεύτερος, ὁ ὁποῖος εἰς τὴν τεραστίαν διάνοιάν του ἠδυνήθη νὰ συμπεριλάβῃ ὅλας τὰς θεωρίας ποὺ ἀνῆκον εἰς τὰ καθαρὰ καὶ ἐφηρμοσμένα μαθηματικὰ τῆς ἐποχῆς του, ἐκτὸς τῆς δημιουργίας δύο ἐπιστημονικῶν κλάδων, τῆς Στερεοστατικῆς καὶ Ὑδροστατικῆς, ἐπέδειξεν ἐπίσης τοιαύτην ἀξιοθαύμαστον γονιμότητα εἰς τὴν ἐπινόησιν εὐφυεστάτων μέσων διὰ τὴν λύσιν, χωρὶς ἐκπεφρασμένην ἀνάμιξιν τοῦ ἀπείρου, μιᾶς πλειάδος σπουδαιοτάτων προβλημάτων, διὰ τὰ ὁποῖα ἡ ἔννοια αὕτη φαίνεται σήμερον ὡς ἐργαλεῖον ἀναπόφευκτον, ὥστε ἡ μελέτη τῶν ἔργων του προκαλεῖ ἀκόμη σήμερον εὐλόγως τὸν θαυμασμὸν καὶ τὴν εἰκασίαν ὅτι ἡ ἐφεύρεσις καὶ συνεχὴς χρῆσις τῶν γενικῶν μεθόδων, ποὺ ἀποτελοῦν τὸ καύχημα τῆς συγχρόνου ἐπιστήμης, ἐμείωσαν ἐνδεχομένως τὴν ἐφευρετικὴν δύναμιν, μὲ τὴν ὁποίαν ἡ φύσις ἐπροίκισε τὸν ἄνθρωπον, καθ' ὃν τρόπον ἡ ἐπινόησις τῆς γραφῆς εἶχεν ὡς ἀποτέλεσμα τὴν ἐξασθένησιν τῆς μνήμης του.

Ὀλιγώτερον αὐθόρμητος ἐγείρεται ἴσως ὁ θαυμασμὸς εἰς ἐκεῖνον ὁ

ὁποῖος μελετᾷ σήμερον τὰ διασωθέντα ἔργα τοῦ Ἀπολλωνίου. Διότι ἔχομεν τόσον πολὺ συνειθίσει εἰς τὸ νὰ χρησιμοποιῶμεν μεθόδους ταχείας καὶ αὐστηρῶς τυποποιημένας, ὥστε μόλις εἴμεθα εἰς θέσιν ν' ἀντιληφθῶμεν μὲ ἀκρίβειαν ὁποία τεραστία προσπάθεια ἐχρειάσθη διὰ νὰ φθάσῃ ὁ Ἀπολλώνιος εἰς τὴν ἀλήθειαν, χωρὶς τὴν βοήθειαν τῶν σημερινῶν μεθόδων. Ἀλλ' ἐν πάσῃ περιπτώσει, διαπιστοῦντες μὲ ἔκπληξιν πόσον ὀλίγα προσετέθησαν ὑπὸ τῶν νεωτέρων εἰς τὴν θεωρίαν τῶν κωνικῶν τομῶν, δὲν δυνάμεθα παρὰ ν' ἀποδώσωμεν πλῆρες δίκαιον εἰς τὸν σεβασμόν, τὸν ὁποῖον ἐπὶ εἴκοσι καὶ πλέον αἰῶνας ἐμπνέει εἰς τὸν ἐπιστημονικὸν κόσμον ὁ μέγας γεωμέτρης τῆς Πέργης.

Ἡ θέα τώρα τοῦ ἐκτεταμένου πεδίου, τὸ ὁποῖον ἡ δύναμις αὐτῶν τῶν ὑπερόχων πνευμάτων κατέστησε τόσον γόνιμον, ἦτο φυσικὸν νὰ γεννήσῃ εἰς πολλοὺς τὴν φιλοδοξίαν νὰ διευρύνουν ἢ τοὐλάχιστον νὰ διατρέξουν ἐκ νέου τὴν ἔκτασίν του, μὲ τὴν ἐλπίδα νὰ εὕρουν καὶ περισυλλέξουν ὁτιδήποτε ἐνδεχομένως διέφυγε τοῦ ἐνδιαφέροντος ἢ τῆς προσοχῆς τῶν πρωτοπόρων.

Δυστυχῶς πολλῶν ἐξ ἐκείνων, οἱ ὁποῖοι ἠκολούθησαν τὴν ἀξιέπαινον αὐτὴν προσπάθειαν (καὶ ὑπῆρξαν βεβαίως πολυάριθμοι), τὰ ἴχνη ἐχάθησαν μέσα εἰς τὴν διαδρομὴν τοῦ χρόνου *. Ἀλλὰ περὶ ἐκείνων, οἱ ὁποῖοι ἄφησαν ἴχνη ὁρατά, ὀφείλομεν νὰ εἴπωμεν μερικὰς λέξεις, ἐξετάζοντες τόσον τοὺς συγχρόνους, ποὺ ὑπῆρξαν ἢ ἐμφανίζονται ὡς μ α θ η τ α ί, ὅσον καὶ τοὺς μεταγενεστέρους οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὸ ὕφος ὠχρῶν καὶ ἐξησθενημένων ἐ π ι γ ό ν ω ν.

Ἐρατοσθένης

51. Μεταξὺ τῶν γεωμετρῶν τούτων, δευτέρας τάξεως, ἀξίζει ἡ πρώτη θέσις εἰς τὸν Ἐρατοσθένην τὸν Κυρηναῖον, μετὰ τοῦ ὁποίου ὁ Ἀρχιμήδης εἶχε συνάψει τόσον στενὰς φιλικὰς σχέσεις κατὰ τὴν νεανικὴν διαμονήν του εἰς Ἀλεξάνδρειαν, ὥστε ἐπιστρέφων ἔπειτα εἰς τὴν πατρίδα, τοῦ ἀπέστειλεν ἕνα ἀπὸ τὰ ἐξοχώτερα ἔργα του (§ 43) καὶ ἕνα ἀπὸ τὰ περιεργότερα ἀριθμητικὰ προβλήματα, περὶ τοῦ ὁποίου θὰ ὁμιλήσωμεν εἰς τὸ προσεχὲς κεφάλαιον.

Ὁ Ἐ ρ α τ ο σ θ έ ν η ς ἐγεννήθη τὸ 276 ἢ 275 π.Χ. Εἰς τὴν πατρίδα ἐξε-

---

* Εἶναι ἀξιοσημείωτον (καὶ ἀξιοθρήνητον) τὸ γεγονὸς ὅτι ἐνῷ ἡ προπαρασκευαστικὴ περίοδος τῆς γεωμετρικῆς ἐρεύνης ἔσχεν ἕνα ἱστορικὸν ἐν τῷ προσώπῳ τοῦ Εὐδήμου τοῦ Ροδίου (§ 33), οἱ μαθηματικοὶ τῆς μετέπειτα περιόδου δὲν ηὐτύχησαν νὰ ἔχουν κάποιον, τοὐλάχιστον ἐξ ὅσων γνωρίζομεν σήμερον, ὁ ὁποῖος νὰ διαιωνίσῃ τὰ γενναῖα των ἐπιτεύγματα.

ὁποῖος μελετᾷ σήμερον τὰ διασωθέντα ἔργα τοῦ Ἀπολλωνίου. Διότι ἔχομεν τόσον πολὺ συνειθίσει εἰς τὸ νὰ χρησιμοποιῶμεν μεθόδους ταχείας καὶ αὐστηρῶς τυποποιημένας, ὥστε μόλις εἴμεθα εἰς θέσιν ν' ἀντιληφθῶμεν μὲ ἀκρίβειαν ὁποία τεραστία προσπάθεια ἐχρειάσθη διὰ νὰ φθάσῃ ὁ Ἀπολλώνιος εἰς τὴν ἀλήθειαν, χωρὶς τὴν βοήθειαν τῶν σημερινῶν μεθόδων. Ἀλλ' ἐν πάσῃ περιπτώσει, διαπιστοῦντες μὲ ἔκπληξιν πόσον ὀλίγα προσετέθησαν ὑπὸ τῶν νεωτέρων εἰς τὴν θεωρίαν τῶν κωνικῶν τομῶν, δὲν δυνάμεθα παρὰ ν' ἀποδώσωμεν πλῆρες δίκαιον εἰς τὸν σεβασμόν, τὸν ὁποῖον ἐπὶ εἴκοσι καὶ πλέον αἰῶνας ἐμπνέει εἰς τὸν ἐπιστημονικὸν κόσμον ὁ μέγας γεωμέτρης τῆς Πέργης.

Ἡ θέα τώρα τοῦ ἐκτεταμένου πεδίου, τὸ ὁποῖον ἡ δύναμις αὐτῶν τῶν ὑπερόχων πνευμάτων κατέστησε τόσον γόνιμον, ἦτο φυσικὸν νὰ γεννήσῃ εἰς πολλοὺς τὴν φιλοδοξίαν νὰ διευρύνουν ἢ τοὐλάχιστον νὰ διατρέξουν ἐκ νέου τὴν ἔκτασίν του, μὲ τὴν ἐλπίδα νὰ εὕρουν καὶ περισυλλέξουν ὁτιδήποτε ἐνδεχομένως διέφυγε τοῦ ἐνδιαφέροντος ἢ τῆς προσοχῆς τῶν πρωτοπόρων.

Δυστυχῶς πολλῶν ἐξ ἐκείνων, οἱ ὁποῖοι ἠκολούθησαν τὴν ἀξιέπαινον αὐτὴν προσπάθειαν (καὶ ὑπῆρξαν βεβαίως πολυάριθμοι), τὰ ἴχνη ἐχάθησαν μέσα εἰς τὴν διαδρομὴν τοῦ χρόνου*. Ἀλλὰ περὶ ἐκείνων, οἱ ὁποῖοι ἄφησαν ἴχνη ὁρατά, ὀφείλομεν νὰ εἴπωμεν μερικὰς λέξεις, ἐξετάζοντες τόσον τοὺς συγχρόνους, ποὺ ὑπῆρξαν ἢ ἐμφανίζονται ὡς μ α θ η τ α ί, ὅσον καὶ τοὺς μεταγενεστέρους οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὸ ὕφος ὠχρῶν καὶ ἐξησθενημένων ἐ π ι γ ό ν ω ν.

Ἐρατοσθένης

51. Μεταξὺ τῶν γεωμετρῶν τούτων, δευτέρας τάξεως, ἀξίζει ἡ πρώτη θέσις εἰς τὸν Ἐρατοσθένην τὸν Κυρηναῖον, μετὰ τοῦ ὁποίου ὁ Ἀρχιμήδης εἶχε συνάψει τόσον στενὰς φιλικὰς σχέσεις κατὰ τὴν νεανικὴν διαμονήν του εἰς Ἀλεξάνδρειαν, ὥστε ἐπιστρέφων ἔπειτα εἰς τὴν πατρίδα, τοῦ ἀπέστειλεν ἕνα ἀπὸ τὰ ἐξοχώτερα ἔργα του (§ 43) καὶ ἕνα ἀπὸ τὰ περιεργότερα ἀριθμητικὰ προβλήματα, περὶ τοῦ ὁποίου θὰ ὁμιλήσωμεν εἰς τὸ προσεχὲς κεφάλαιον.

Ὁ Ἐ ρ α τ ο σ θ έ ν η ς ἐγεννήθη τὸ 276 ἢ 275 π.Χ. Εἰς τὴν πατρίδα ἐξε-

---

* Εἶναι ἀξιοσημείωτον (καὶ ἀξιοθρήνητον) τὸ γεγονὸς ὅτι ἐνῷ ἡ προπαρασκευαστικὴ περίοδος τῆς γεωμετρικῆς ἐρεύνης ἔσχεν ἕνα ἱστορικὸν ἐν τῷ προσώπῳ τοῦ Εὐδήμου τοῦ Ροδίου (§ 33), οἱ μαθηματικοὶ τῆς μετέπειτα περιόδου δὲν ηὐτύχησαν νὰ ἔχουν κάποιον, τοὐλάχιστον ἐξ ὅσων γνωρίζομεν σήμερον, ὁ ὁποῖος νὰ διαιωνίσῃ τὰ γενναῖα των ἐπιτεύγματα.

παιδεύθη ὑπὸ τοῦ γραμματικοῦ Λυσανίου, εἰς τὴν Ἀλεξάνδρειαν ὑπὸ τοῦ φιλοσόφου - ποιητοῦ Καλλιμάχου, εἰς τὸν ὁποῖον εἶχεν ἀνατεθῆ ἡ διεύθυνσις τῆς μεγάλης καὶ ἐνδόξου Βιβλιοθήκης τῶν Πτολεμαίων, εἰς δὲ τὰς Ἀθήνας ὑπὸ ἄλλων, οἱ ὁποῖοι τὸν κατέστησαν οἰκεῖον πρὸς τὰς ἰδέας τοῦ Πλάτωνος.

Περὶ τὸ 235 ἐκλήθη ὑπὸ τοῦ βασιλέως Πτολεμαίου τοῦ Εὐεργέτου, ὅστις ἀνέθεσεν εἰς αὐτὸν τὴν ἐκπαίδευσιν τοῦ διαδόχου του καὶ τὴν διεύθυνσιν τῆς περιφήμου Βιβλιοθήκης, ἀποθανόντος τοῦ Καλλιμάχου. Ἀπέθανε δὲ περὶ τὸ 194, ἤτοι εἰς ἡλικίαν 82 περίπου ἐτῶν, δι' ἑκουσίας, ὡς λέγεται, ἀσιτίας, ἐπειδὴ εἶχε χάσει τὴν ὅρασιν.

Ἐκ φύσεως προικισμένος μὲ πνεῦμα περισσότερον εὔστροφον παρὰ διεισδυτικόν, κατέκτησε φήμην εἰς διαφόρους κλάδους τοῦ ἐπιστητοῦ. Οὕτω ὁ ὑπ' αὐτοῦ γενόμενος προσδιορισμὸς τοῦ μήκους τοῦ γηΐνου μεσημβρινοῦ * τοῦ προσεπόρισε τὴν δόξαν καὶ τὸν τίτλον τοῦ πρώτου γεωδαίτου, ποὺ ἀναφέρει ἡ ἱστορία. Ὁ διακεκριμένος Ὀλλανδὸς μαθηματικὸς καὶ ἀστρονόμος Willebrord Snell (καλούμενος καὶ Snellius) ἔδωσε τὸν τίτλον «Eratosthenes Batavus» εἰς τὸ περίφημον ἔργον του, μὲ τὸ ὁποῖον ἐνεκαινίασε τὸ 1617 τὴν γεωδαιτικὴν βιβλιογραφίαν, ἐπιθυμῶν νὰ ἐξάρῃ τὴν προηγηθεῖσαν ἀξιομνημόνευτον συμβολὴν τοῦ Ἐρατοσθένους.

Ἐξ ἄλλου τὸ ἐνεργὸν μέρος, τὸ ὁποῖον ἔλαβεν εἰς τὴν προσπάθειαν μεταρρυθμίσεως τοῦ ἡμερολογίου, μαρτυρεῖ τὸ βάθος καὶ τὸ πλάτος τῶν ἀστρονομικῶν του γνώσεων. Τὸ ἐνδιαφέρον του τέλος διὰ τὴν γεωμετρίαν μαρτυρεῖται ἀπὸ τὴν ἐπιστολήν, τὴν ὁποίαν ἀπηύθυνε πρὸς τὸν τρίτον Πτολεμαῖον, διὰ νὰ τοῦ καταστήσῃ γνωστὰς τὰς μυθικὰς παραδόσεις περὶ τῆς γεννήσεως τοῦ δηλίου προβλήματος ὡς καὶ τὰς λύσεις, αἱ ὁποῖαι εἶχον μέχρι τότε προταθῆ. Ἐκ τῆς ἐπιστολῆς αὐτῆς πληροφορούμεθα ἀκόμη ὅτι εἰς τὰς λύσεις τοῦ προβλήματος προσέθεσε καὶ ἄλλην ἰδικήν του, στηριζομένην ἐπὶ τῶν ὁμοίων τριγώνων καὶ ἐπιτυγχανομένην διὰ τῆς χρήσεως εἰδικοῦ ὀργάνου, ἀποτελουμένου ἐξ ὀρθογωνίων κινητῶν πλακιδίων, τὸ ὁποῖον ὠνομάσθη ὑπὸ τοῦ ἰδίου μ ε σ ό λ α β ο ς.

Ποῖος ἦτο ὁ σκοπός, τὸ σχέδιον καὶ ἡ ἔκτασις ἑνὸς ἔργου π ε ρ ὶ μ ε σ ο τ ή τ ω ν, τὸ ὁποῖον τοῦ ἀποδίδει ὁ Πάππος μᾶς εἶναι ἐντελῶς ἄγνωστον. Εἰκάζεται ὅτι εἰς τὸ ἔργον τοῦτο, μεταξὺ ἄλλων, ἐξετάζεται καὶ ἡ ἀκόλουθος πρότασις «ἐὰν a, b, c εἶναι τρεῖς ἀριθμοὶ κατὰ γεωμετρικὴν πρόοδον, τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τοὺς ἀριθμοὺς a, $a+b$, $a+2b+c$», ἡ ὁποία, ὡς λέγεται, εὑρέθη ὑπὸ τούτου.

Ἄγνωστος μᾶς εἶναι ἀκόμη ὁ τρόπος, μὲ τὸν ὁποῖον ἀνεκοινώθη ἡ

* Ὁ Ἐρατοσθένης τὸν ὑπελόγισε περίπου εἰς 120 km, ἐνῷ τὸ μῆκος του εἶναι προσεγγιστικῶς ἴσον πρὸς 110 km κατὰ μοῖραν.

μέθοδος, ἡ φερομένη μέχρι σήμερον μὲ τὸ ὄνομα κόσκινον τοῦ Ἐρατοσθένους καὶ ἀποβλέπουσα εἰς τὴν κατάστρωσιν πίνακος τῶν πρώτων ἀριθμῶν. Πρόκειται περὶ μεθόδου παροιμιώδους ἁπλότητος, ἡ ὁποία συνίσταται εἰς τὸ νὰ διαγράψωμεν ἀπὸ τὴν ἀκολουθίαν τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, πρῶτον τὰ πολλαπλάσια τοῦ 2, κατόπιν τοῦ 3, τοῦ 5 (τοῦ 4 διεγράφησαν ὡς πολλαπλάσια τοῦ 2), τοῦ 7 (τὸ 6 διεγράφη ὡς πολλαπλάσιον τοῦ 2) καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς. Οἱ τελικῶς ἀπομένοντες ἀριθμοὶ θὰ εἶναι προφανῶς διαιρετοὶ μόνον διὰ τοῦ ἑαυτοῦ των καὶ τῆς μονάδος καὶ διὰ τοῦτο θὰ εἶναι πρῶτοι. Ἡ μέθοδος αὕτη ἀποτελεῖ ἀπαραίτητον συμπλήρωμα εἰς τὸ Εὐκλείδειον Θεώρημα (§ 37), ὅτι ἡ σειρὰ τῶν πρώτων ἀριθμῶν εἶναι ἄπειρος. Οὐσιαστικῶς δὲ εἰς τὴν μέθοδον αὐτὴν κατέφυγον ὅσοι ἐκ τῶν μεταγενεστέρων ἐπεδίωξαν νὰ κατασκευάσουν πίνακας τῶν πρώτων ἀριθμῶν. Καὶ εἰς αὐτὴν πιθανῶς θὰ ἐξακολουθήσουν νὰ προστρέχουν, ἐφ' ὅσον δὲν ἀνακαλυφθῆ ἐν τῷ μεταξὺ μία χαρακτηριστικὴ ἰδιότης τῶν ἀριθμῶν αὐτῆς τῆς κατηγορίας.

Ὑψικλῆς

52. Εἰς τὰ δεκατρία βιβλία τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου οἱ ἀρχαῖοι ἐκδόται προσέθετον δύο ἀκόμη, τὰ ὁποῖα ἀναπτύσσουν περαιτέρω τὴν θεωρίαν τῶν κυρτῶν κανονικῶν πολυέδρων, ἀλλὰ δὲν ἐγράφησαν ἀπὸ τὸν διάσημον γεωμέτρην τῆς Ἀλεξανδρείας.

Τὸ φερόμενον ὡς Βιβλίον XIV εἶναι ἔργον ἑνὸς γεωμέτρου καλουμένου Ὑψικλέους, ὁ ὁποῖος ἤκμασεν εἰς Ἀλεξάνδρειαν μεταξὺ 150 καὶ 120 π.Χ. καὶ εἰς τὸν ὁποῖον ἀποδίδονται ἐπίσης ἄλλα ἔργα ἀνήκοντα εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν καὶ τὴν Ἀστρονομίαν. Κατὰ ἕνα αἰῶνα περίπου μεταγενέστερος τοῦ Εὐκλείδου, μιμεῖται τόσον πιστῶς τὴν μέθοδον ἐκείνου, ὥστε νὰ ὑπενθυμίζῃ τὰ φαινόμενα τοῦ μιμητισμοῦ, ποὺ εἶναι τόσον συνήθη εἰς τὰ κατώτερα στρώματα τοῦ ζωϊκοῦ βασιλείου. Μεταγενέστερος ἐπίσης τοῦ Ἀρισταίου καὶ τοῦ Ἀπολλωνίου, ἀναφέρεται εἰς αὐτούς, μελετᾷ καὶ συμπληρώνει μερικὰ ἔργα των, καταλήγων οὕτω εἰς ἕνα σύνολον κομψῶν σχέσεων, ὑφισταμένων μεταξὺ διαφόρων στοιχείων (ἐμβαδόν, ὄγκος, ἀκτὶς κύκλου περιγεγραμμένου εἰς μίαν ἕδραν) ἑνὸς κυρτοῦ κανονικοῦ πολυέδρου, αἱ ὁποῖαι δύνανται θαυμάσια νὰ εὕρουν θέσιν εἰς οἱανδήποτε πλήρη ἀνάπτυξιν τῶν ἰδιοτήτων αὐτῶν τῶν σημαντικωτάτων γεωμετρικῶν στερεῶν.

Ὅσον ἀφορᾷ τὸ οὕτω καλούμενον Βιβλίον XV τῶν Στοιχείων, τοῦτο συνίσταται ἐκ τριῶν μερῶν σαφῶς διακεκριμένων καὶ πιθανώτατα γραφέντων ὑπὸ διαφόρων προσώπων. Εἰς τὸ πρῶτον μέρος ἐκτίθενται μερικαὶ ἁπλαῖ σκέψεις ἀποβλέπουσαι εἰς τὴν παραγωγὴν ἑνὸς κανονικοῦ πολυέδρου ἐξ ἑνὸς ἄλλου. Ἀναφέρεται, π.χ., ὅτι τὰ κέντρα τῶν ἑδρῶν

μέθοδος, ἡ φερομένη μέχρι σήμερον μὲ τὸ ὄνομα κόσκινον τοῦ Ἐρατοσθένους καὶ ἀποβλέπουσα εἰς τὴν κατάστρωσιν πίνακος τῶν πρώτων ἀριθμῶν. Πρόκειται περὶ μεθόδου παροιμιώδους ἁπλότητος, ἡ ὁποία συνίσταται εἰς τὸ νὰ διαγράψωμεν ἀπὸ τὴν ἀκολουθίαν τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, πρῶτον τὰ πολλαπλάσια τοῦ 2, κατόπιν τοῦ 3, τοῦ 5 (τοῦ 4 διεγράφησαν ὡς πολλαπλάσια τοῦ 2), τοῦ 7 (τὸ 6 διεγράφη ὡς πολλαπλάσιον τοῦ 2) καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς. Οἱ τελικῶς ἀπομένοντες ἀριθμοὶ θὰ εἶναι προφανῶς διαιρετοὶ μόνον διὰ τοῦ ἑαυτοῦ των καὶ τῆς μονάδος καὶ διὰ τοῦτο θὰ εἶναι πρῶτοι. Ἡ μέθοδος αὕτη ἀποτελεῖ ἀπαραίτητον συμπλήρωμα εἰς τὸ Εὐκλείδειον Θεώρημα (§ 37), ὅτι ἡ σειρὰ τῶν πρώτων ἀριθμῶν εἶναι ἄπειρος. Οὐσιαστικῶς δὲ εἰς τὴν μέθοδον αὐτὴν κατέφυγον ὅσοι ἐκ τῶν μεταγενεστέρων ἐπεδίωξαν νὰ κατασκευάσουν πίνακας τῶν πρώτων ἀριθμῶν. Καὶ εἰς αὐτὴν πιθανῶς θὰ ἐξακολουθήσουν νὰ προστρέχουν, ἐφ' ὅσον δὲν ἀνακαλυφθῇ ἐν τῷ μεταξὺ μία χαρακτηριστικὴ ἰδιότης τῶν ἀριθμῶν αὐτῆς τῆς κατηγορίας.

Ὑψικλῆς

52. Εἰς τὰ δεκατρία βιβλία τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου οἱ ἀρχαῖοι ἐκδόται προσέθετον δύο ἀκόμη, τὰ ὁποῖα ἀναπτύσσουν περαιτέρω τὴν θεωρίαν τῶν κυρτῶν κανονικῶν πολυέδρων, ἀλλὰ δὲν ἐγράφησαν ἀπὸ τὸν διάσημον γεωμέτρην τῆς Ἀλεξανδρείας.

Τὸ φερόμενον ὡς Βιβλίον XIV εἶναι ἔργον ἑνὸς γεωμέτρου καλουμένου Ὑψικλέους, ὁ ὁποῖος ἤκμασεν εἰς Ἀλεξάνδρειαν μεταξὺ 150 καὶ 120 π.Χ. καὶ εἰς τὸν ὁποῖον ἀποδίδονται ἐπίσης ἄλλα ἔργα ἀνήκοντα εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν καὶ τὴν Ἀστρονομίαν. Κατὰ ἕνα αἰῶνα περίπου μεταγενέστερος τοῦ Εὐκλείδου, μιμεῖται τόσον πιστῶς τὴν μέθοδον ἐκείνου, ὥστε νὰ ὑπενθυμίζῃ τὰ φαινόμενα τοῦ μιμητισμοῦ, ποὺ εἶναι τόσον συνήθη εἰς τὰ κατώτερα στρώματα τοῦ ζωϊκοῦ βασιλείου. Μεταγενέστερος ἐπίσης τοῦ Ἀρισταίου καὶ τοῦ Ἀπολλωνίου, ἀναφέρεται εἰς αὐτούς, μελετᾷ καὶ συμπληρώνει μερικὰ ἔργα των, καταλήγων οὕτω εἰς ἕνα σύνολον κομψῶν σχέσεων, ὑφισταμένων μεταξὺ διαφόρων στοιχείων (ἐμβαδόν, ὄγκος, ἀκτὶς κύκλου περιγεγραμμένου εἰς μίαν ἕδραν) ἑνὸς κυρτοῦ κανονικοῦ πολυέδρου, αἱ ὁποῖαι δύνανται θαυμάσια νὰ εὕρουν θέσιν εἰς οἱανδήποτε πλήρη ἀνάπτυξιν τῶν ἰδιοτήτων αὐτῶν τῶν σημαντικωτάτων γεωμετρικῶν στερεῶν.

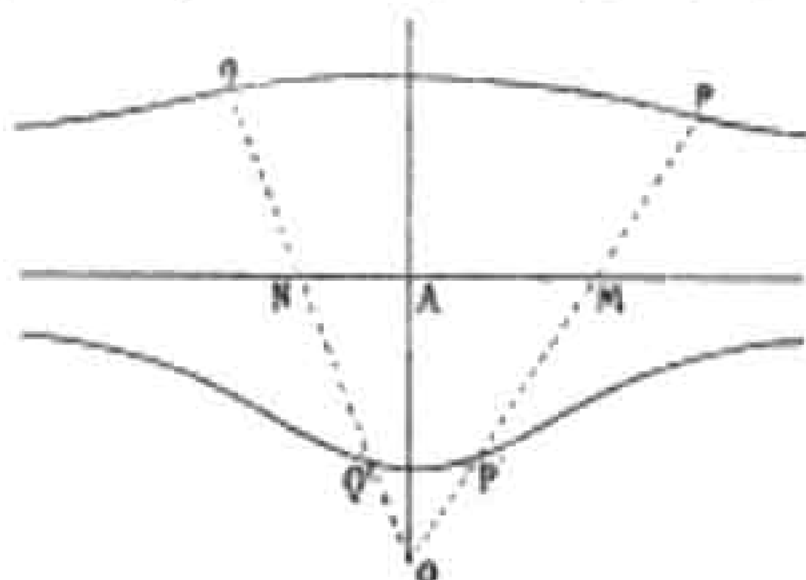
Ὅσον ἀφορᾷ τὸ οὕτω καλούμενον Βιβλίον XV τῶν Στοιχείων, τοῦτο συνίσταται ἐκ τριῶν μερῶν σαφῶς διακεκριμένων καὶ πιθανώτατα γραφέντων ὑπὸ διαφόρων προσώπων. Εἰς τὸ πρῶτον μέρος ἐκτίθενται μερικαὶ ἁπλαῖ σκέψεις ἀποβλέπουσαι εἰς τὴν παραγωγὴν ἑνὸς κανονικοῦ πολυέδρου ἐξ ἑνὸς ἄλλου. Ἀναφέρεται, π.χ., ὅτι τὰ κέντρα τῶν ἑδρῶν

κανονικοῦ πολυέδρου εἶναι κορυφαὶ ἑνὸς ἄλλου. Εἰς τὸ δεύτερον μέρος ὁ ἀριθμὸς τῶν γωνιῶν καὶ τῶν κορυφῶν κανονικοῦ πολυέδρου ἐκφράζεται, μέσῳ μιᾶς καὶ μόνης σκέψεως, συναρτήσει τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἑδρῶν, πρόβλημα ἁπλοῦν, ἀλλ' οὐχὶ βεβαίως εὐκαταφρόνητον. Εἰς τὸ τρίτον, τέλος, μέρος περιέχεται μέθοδος γραφικοῦ προσδιορισμοῦ τοῦ μεγέθους τῆς διέδρου δοθέντος κανονικοῦ πολυέδρου.

Ἂν τὸ βιβλίον τοῦτο δὲν ὑπολείπεται πολὺ τοῦ προηγουμένου ὡς πρὸς τοὺς στόχους πρὸς τοὺς ὁποίους ἀποβλέπει, ὑπολείπεται ὅμως, χωρὶς καμμίαν ἀμφιβολίαν, ὡς πρὸς τὴν μορφὴν τῆς ἐκθέσεως, ἡ ὁποία εὑρίσκεται εἰς τοὺς ἀντίποδας ἐκείνης, τὴν ὁποίαν ὁ Ὑψικλῆς ἐδιδάχθη ἀπὸ τὸν Εὐκλείδην. Τοιαύτη μορφὴ ἐκθέσεως χαρακτηρίζει ἕνα ἔργον τῆς παρακμῆς. Καὶ πράγματι οἱ ἁρμόδιοι ἐν προκειμένῳ ἀποδίδουν τὸ τελευταῖον μέρος τοῦ βιβλίου τούτου εἰς τὸν ἐκ Δαμασκοῦ φιλόσοφον Δαμάσκιον, ἀκμάσαντα περὶ τὸ 510 μ.Χ. ἢ εἰς ἄλλον ἀνώνυμον μαθητὴν τοῦ Ἰσιδώρου τοῦ Μιλησίου, τοῦ διασήμου ἀρχιτέκτονος τῆς Ἁγίας Σοφίας εἰς Κωνσταντινούπολιν, γνωστοῦ ἐπίσης καὶ ὡς ἐκδότου καὶ ὑπομνηματιστοῦ κλασικῶν ἔργων.

Νικομήδης, Διοκλῆς, Περσεὺς

53. Ἐνῷ τὰ κείμενα ποὺ ἐμνημονεύσαμεν ἀνωτέρω ἀναφέρονται εἰς θέματα τῆς στοιχειώδους γεωμετρίας, οἱ τρεῖς μαθηματικοί, περὶ τῶν ὁποίων πρόκειται τώρα νὰ ὁμιλήσωμεν, ἐπλούτισαν τὸν κατάλογον τῶν ἐπιπέδων καμπύλων, προετοιμάσαντες τοιουτοτρόπως ἕνα ἀπὸ τὰ σημαντικώτερα κεφάλαια τῆς ἀνωτέρας γεωμετρίας, τουτέστι τὴν γενικὴν θεωρίαν τῶν καμπύλων.



Σχ. 10

Πρῶτος μεταξὺ τούτων ἔρχεται ὁ Νικομήδης, ὁ ὁποῖος, παραδέχονται, ἔζησε κατὰ τὴν περίοδον 250-150 π.Χ. Ὁ μαθηματικὸς οὗτος ὀφείλει τὴν φήμην του εἰς τὸ γεγονὸς ὅτι ἐπενόησε τὴν κογχοειδῆ, ἀξιοσημείωτον ἀλγεβρικὴν καμπύλην τετάρτου βαθμοῦ, ἔχουσαν εἰς καρτεσιανὰς συντεταγμένας ἐξίσωσιν:

$$x^2y^2 = (a+x)^2(b^2-x^2)$$

καὶ εἰς πολικάς:

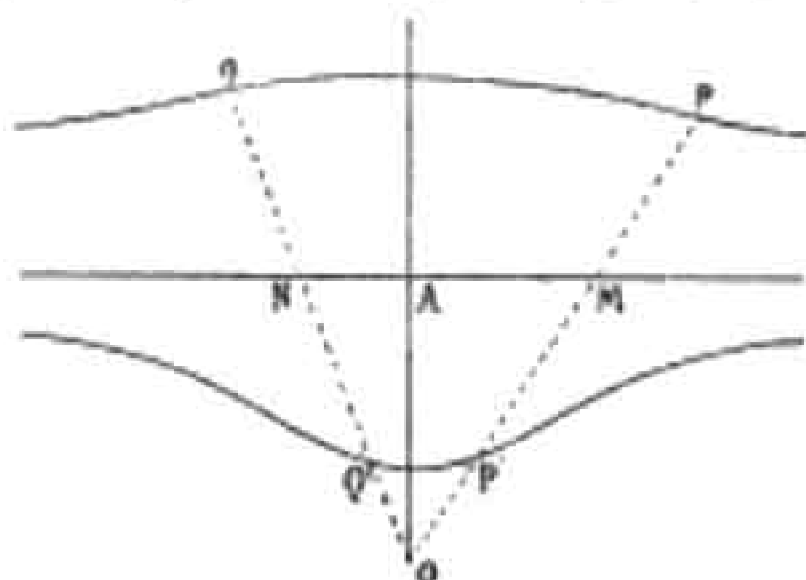
$$\rho = \frac{a}{\text{συν}\,\theta} \pm b.$$

κανονικοῦ πολυέδρου εἶναι κορυφαὶ ἑνὸς ἄλλου. Εἰς τὸ δεύτερον μέρος ὁ ἀριθμὸς τῶν γωνιῶν καὶ τῶν κορυφῶν κανονικοῦ πολυέδρου ἐκφράζεται, μέσῳ μιᾶς καὶ μόνης σκέψεως, συναρτήσει τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἑδρῶν, πρόβλημα ἁπλοῦν, ἀλλ' οὐχὶ βεβαίως εὐκαταφρόνητον. Εἰς τὸ τρίτον, τέλος, μέρος περιέχεται μέθοδος γραφικοῦ προσδιορισμοῦ τοῦ μεγέθους τῆς διέδρου δοθέντος κανονικοῦ πολυέδρου.

Ἂν τὸ βιβλίον τοῦτο δὲν ὑπολείπεται πολὺ τοῦ προηγουμένου ὡς πρὸς τοὺς στόχους πρὸς τοὺς ὁποίους ἀποβλέπει, ὑπολείπεται ὅμως, χωρὶς καμμίαν ἀμφιβολίαν, ὡς πρὸς τὴν μορφὴν τῆς ἐκθέσεως, ἡ ὁποία εὑρίσκεται εἰς τοὺς ἀντίποδας ἐκείνης, τὴν ὁποίαν ὁ Ὑψικλῆς ἐδιδάχθη ἀπὸ τὸν Εὐκλείδην. Τοιαύτη μορφὴ ἐκθέσεως χαρακτηρίζει ἕνα ἔργον τῆς παρακμῆς. Καὶ πράγματι οἱ ἁρμόδιοι ἐν προκειμένῳ ἀποδίδουν τὸ τελευταῖον μέρος τοῦ βιβλίου τούτου εἰς τὸν ἐκ Δαμασκοῦ φιλόσοφον Δαμάσκιον, ἀκμάσαντα περὶ τὸ 510 μ.Χ. ἢ εἰς ἄλλον ἀνώνυμον μαθητὴν τοῦ Ἰσιδώρου τοῦ Μιλησίου, τοῦ διασήμου ἀρχιτέκτονος τῆς Ἁγίας Σοφίας εἰς Κωνσταντινούπολιν, γνωστοῦ ἐπίσης καὶ ὡς ἐκδότου καὶ ὑπομνηματιστοῦ κλασικῶν ἔργων.

Νικομήδης, Διοκλῆς, Περσεύς

53. Ἐνῷ τὰ κείμενα ποὺ ἐμνημονεύσαμεν ἀνωτέρω ἀναφέρονται εἰς θέματα τῆς στοιχειώδους γεωμετρίας, οἱ τρεῖς μαθηματικοί, περὶ τῶν ὁποίων πρόκειται τώρα νὰ ὁμιλήσωμεν, ἐπλούτισαν τὸν κατάλογον τῶν ἐπιπέδων καμπύλων, προετοιμάσαντες τοιουτοτρόπως ἕνα ἀπὸ τὰ σημαντικώτερα κεφάλαια τῆς ἀνωτέρας γεωμετρίας, τουτέστι τὴν γενικὴν θεωρίαν τῶν καμπύλων.



Σχ. 10

Πρῶτος μεταξὺ τούτων ἔρχεται ὁ Νικομήδης, ὁ ὁποῖος, παραδέχονται, ἔζησε κατὰ τὴν περίοδον 250-150 π.Χ. Ὁ μαθηματικὸς οὗτος ὀφείλει τὴν φήμην του εἰς τὸ γεγονὸς ὅτι ἐπενόησε τὴν κογχοειδῆ, ἀξιοσημείωτον ἀλγεβρικὴν καμπύλην τετάρτου βαθμοῦ, ἔχουσαν εἰς καρτεσιανὰς συντεταγμένας ἐξίσωσιν:

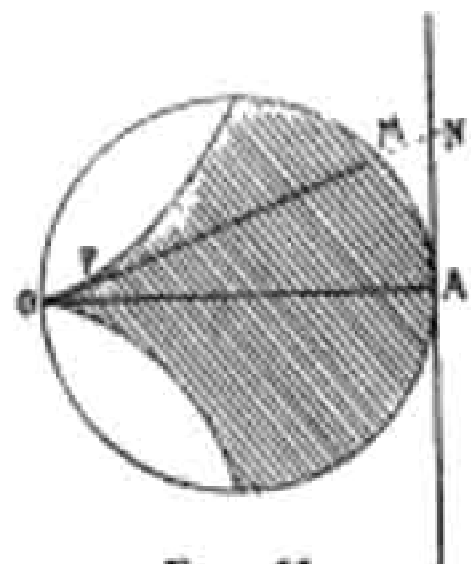
$$x^2y^2 = (a+x)^2(b^2-x^2)$$

καὶ εἰς πολικάς:
$$\rho = \frac{a}{\text{συν}\,\theta} \pm b.$$

Ἡ ἐν λόγῳ καμπύλη (σχ. 10) γράφεται ἀπὸ τὸ ἐλεύθερον ἄκρον εὐθυγράμμου τμήματος, σταθεροῦ μήκους b, τοῦ ὁποίου τὸ ἄλλο ἄκρον διαγράφει σταθερὰν εὐθεῖαν (ἡ ὁποία καλεῖται βάσις), ἐνῷ ἡ εὐθεῖα ἐφ' ἧς κεῖται διέρχεται πάντοτε διὰ σταθεροῦ σημείου, τοῦ πόλου, ἀπέχοντος ἀπόστασιν a ἀπὸ τῆς βάσεως. Ἐὰν τὸ τμῆμα (μήκους b) πίπτῃ πρὸς ὃ μέρος τῆς βάσεως δὲν κεῖται ὁ πόλος, ἡ γεννωμένη καμπύλη ἔχει τὸ σχῆμα τοῦ ἀνοίγματος κογχύλης, ἐξ ἧς καὶ τὸ ὄνομα. Ἐὰν τὸ τμῆμα (μήκους b) πίπτῃ πρὸς ὃ μέρος τῆς βάσεως κεῖται καὶ ὁ πόλος, τότε ἡ καμπύλη παρουσιάζει βρόχον ἢ κόγχην ἢ σημεῖον ἀνακάμψεως ἐφ' ὅσον εἶναι $b > a$ ἢ $b < a$ ἢ $b = a$.

Ὁ Νικομήδης ἐξήτασε βεβαίως τὴν πρώτην ἐκ τῶν τεσσάρων καμπύλων, πιθανῶς δὲ καὶ τὰς λοιπάς. Ἀλλ' ἀντιθέτως πρὸς ὅ,τι κάμνομεν σήμερον, ὁ Νικομήδης δὲν ἐθεώρει μίαν τῶν τριῶν ἄλλων ὡς ἀποτελοῦσαν ἕνα ὅλον μετὰ τῆς πρώτης. Ἡ κογχοειδής, ἀνωτέρα ἢ κατωτέρα, δύναται νὰ γραφῇ εὐκόλως μὲ τὴν βοήθειαν ἁπλουστάτου ἐργαλείου, τὸ ὁποῖον ἐπενόησεν ὁ ἴδιος, ἐμπνεόμενος πιθανῶς ἀπὸ τὴν γεωμετρικὴν πρᾶξιν τῆς «νεύσεως», ποὺ εἴδομεν χρησιμοποιουμένην ὑπὸ τοῦ Ἀρχύτα καὶ τοῦ Ἀπολλωνίου διὰ διαφόρους σκοποὺς καὶ ἡ ὁποία θὰ ἐχρησιμοποιεῖτο συχνὰ εἰς τὴν ἐποχήν του.

Ἡ σπουδαιότης τῆς κογχοειδοῦς συνίστατο κατὰ τοὺς ἀρχαίους εἰς τὴν ἰδιότητά της νὰ ὁδηγῇ εἰς θαυμασίας λύσεις ὄχι μόνον τοῦ δηλίου προβλήματος (διπλασιασμὸς τοῦ κύβου), ἀλλ' ἐπίσης τοῦ προβλήματος τριχοτομήσεως τῆς γωνίας, τουτέστι τοῦ τρίτου ἐκ τῶν 3 ζητημάτων, ποὺ ἐβασάνισαν ἐπὶ αἰῶνας τοὺς μαθηματικοὺς καὶ ἐγαλβάνισαν αὐτοὺς εἰς τὴν γεωμετρικὴν ἔρευναν.



Σχ. 11

Μία ἄλλη ἀνωτέρα ἀλγεβρικὴ καμπύλη, τρίτου βαθμοῦ, ἐπενοήθη, κατὰ τὴν αὐτὴν ἐποχὴν περίπου, ἀπὸ τὸν Διοκλέα, μαθηματικὸν εἰς τὸν ὁποῖον ἀποδίδεται ἐπίσης καὶ ἡ διὰ κωνικῶν τομῶν λύσις τοῦ ἀρχιμηδείου προβλήματος (§ 41): νὰ διαιρεθῇ σφαῖρα ὑπὸ ἐπιπέδου εἰς δύο μέρη, τῶν ὁποίων οἱ ὄγκοι νὰ ἔχουν δοθέντα λόγον.

Ἡ νέα καμπύλη καλεῖται κισσοειδὴς τοῦ Διοκλέους, ἔχουσα ἐξίσωσιν εἰς καρτεσιανὰς συντεταγμένας:

$$y^2 (a - x) = x^3$$

καὶ εἰς πολικάς:

$$\rho = a \frac{\eta\mu^2 \theta}{\sigma\upsilon\nu\, \theta},$$

ὁριζομένη δὲ γεωμετρικῶς ὡς ἑξῆς (σχ. 11). Δίδεται περιφέρεια διαμέτρου ΟΑ = a καὶ ἐφαπτομένη ταύτης εἰς τὸ Α. Ἄγεται διὰ τοῦ Ο εὐθεῖα τέμνουσα τὴν περιφέρειαν εἰς Μ καὶ τὴν ἐφαπτομένην εἰς Ν καὶ μεταφέρεται ἐπ' αὐτῆς ὁμορρόπως τὸ τμῆμα ΜΝ εἰς τὴν θέσιν ΟΡ. Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν θέσεων τοῦ σημείου Ρ, τῆς τεμνούσης μεταβαλλομένης περὶ τὸ Ο, εἶναι μία κισσοειδής.

Ὅπως ἔδειξεν ὁ Διοκλῆς, ἡ λύσις τοῦ δηλίου προβλήματος ἐπιτυγχάνεται ἐπίσης μὲ τὴν βοήθειαν τῆς κισσοειδοῦς. Τὸ ὄνομά της ὀφείλει ἡ καμπύλη εἰς τὴν μικρὰν ὁμοιότητα ποὺ παρουσιάζει πρὸς τὸ φύλλον τοῦ κισσοῦ τὸ χωρίον τὸ περικλειόμενον ὑπὸ τῆς περιφερείας καὶ τῆς κισσοειδοῦς καμπύλης.

54. Ἐνῷ ἡ κογχοειδὴς καὶ ἡ κισσοειδὴς ἀνάγουν τὴν καταγωγήν των εἰς τὰ δύο ἔνδοξα προβλήματα τῆς στοιχειώδους γεωμετρίας, μία ἄλλη κατηγορία καμπύλων ἐπενοήθη δι' ἐπεκτάσεως τῆς μεθόδου, μέσῳ τῆς ὁποίας ἐλήφθησαν αἱ κωνικαὶ τομαὶ ἐκ τοῦ στερεοῦ. Ἐκτὸς τῶν κώνων, τῶν κυλίνδρων καὶ τῶν σφαιρῶν, οἱ ἀρχαῖοι ἐξήτασαν ἐπίσης τὴν δακτυλιοειδῆ ἐπιφάνειαν τὴν γεννωμένην ἐκ τῆς πλήρους περιστροφῆς κύκλου περὶ ἄξονα κείμενον ἐν τῷ ἐπιπέδῳ του καὶ ἔδωσαν εἰς αὐτὴν τὸ ὄνομα σπεῖρα. Εἰς μίαν εἰδικὴν περίπτωσιν ἡ ἐν λόγῳ ἐπιφάνεια ἀπαντᾶται, ὅπως εἴδομεν ἀλλαχοῦ (§ 26) εἰς τὴν λύσιν τοῦ δηλίου προβλήματος ὑπὸ τοῦ Ἀρχύτα, καὶ ἔδωσε λαβὴν εἰς ἕνα ἀπολεσθὲν ἔργον τοῦ Διονυσοδώρου — μαθηματικοῦ ἀμυδρότατα γνωστοῦ, πιθανῶς δὲ συμπίπτοντος, πρὸς ἐκεῖνον εἰς τὸν ὁποῖον ὁ Εὐτόκιος ἀποδίδει μίαν λύσιν διὰ κωνικῶν τοῦ ἀρχιμηδείου προβλήματος — εἰς τὸ ὁποῖον μεταξὺ ἄλλων ὑπῆρχεν ἡ πρότασις: «Ὁ ὄγκος τῆς σπείρας ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ γεννῶντος αὐτὴν κύκλου ἐπὶ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τῆς γραφομένης ὑπὸ τοῦ κέντρου κατὰ τὴν ὑποτιθεμένην περιστροφήν».

Ὅσοι εἶχον μεγάλην οἰκειότητα μὲ τὴν θεωρίαν τῶν τομῶν τοῦ κώνου ἦσαν εἰς θέσιν νὰ συλλάβουν αὐτομάτως τὴν ἰδέαν τῆς παραγωγῆς νέων καμπύλων διὰ τομῶν τῆς σπείρας. Ἐπειδὴ ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τοῦ ἄξονος μιᾶς σπείρας ἢ κάθετον ἐπὶ τοῦτον δίδει τομὰς μόνον κυκλικάς, διὰ τοῦτο προτοῦ ριφθῇ κανεὶς εἰς τὴν γενικὴν περίπτωσιν τῆς ἐξετάσεως τομῶν παραγομένων ὑπὸ ἐπιπέδων ἐντελῶς αὐθαιρέτων, φυσικὸν εἶναι νὰ ἐξετάσῃ τομὰς παραγομένας ὑπὸ ἐπιπέδων παραλλήλων πρὸς τὸν ἄξονα. Τοιαῦται καμπύλαι, ὀνομασθεῖσαι σπειροειδεῖς ἢ σπειρικαὶ γραμμαί, κατέχουν προφανῶς δύο ἄξονας συμμετρίας καὶ ἐξητάσθησαν διὰ πρώτην φορὰν ἀπὸ κάποιον Περσέα, γεωμέτρην ἀγνώστου ἐποχῆς, προγενέστερον πάντως τοῦ σχολιαστοῦ Πρόκλου, ὅστις καὶ διέσωσε τὴν μνήμην του[28]. Τὸ εὕρημα τοῦτο διαμνημονεύεται εἰς δύο μόνον

στίχους διασωθέντας ἐκ τοῦ βιβλίου τὸ ὁποῖον ὁ Περσεὺς εἶχε συγγράψει διὰ τὰς σπειροειδεῖς ἢ σπειρικὰς γραμμάς. Μᾶς παρέχεται μόνον ἡ διαβεβαίωσις ὅτι τῶν καμπύλων τούτων ὁ Περσεὺς καθώρισε τὸ «σύμπτωμα», ἤτοι τὴν χαρακτηριστικὴν ἐκείνην ἰδιότητα, ἥτις εἰς τὴν ἀρχαίαν γεωμετρίαν ἔπαιξεν ἕνα ρόλον ἀνάλογον πρὸς τὴν σημερινὴν ἐξίσωσιν μιᾶς καμπύλης εἰς καρτεσιανὰς συντεταγμένας. Γνωρίζομεν ἐπὶ πλέον ὅτι οὗτος ἀπεκάλυψε τὰς διαφόρους μορφὰς ποὺ παρουσιάζουν αἱ νέαι καμπύλαι ἀναλόγως πρὸς τὴν ἀπὸ τοῦ ἄξονος ἀπόστασιν τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου. Αἱ ὀλίγαι αὐταὶ ἀποσπασματικαὶ εἰδήσεις καθιστοῦν ἰδιαιτέρως λυπηρὰν τὴν ἀπώλειαν ἑνὸς ἔργου, τοῦ ὁποίου εἶναι ἀδύνατον ν' ἀρνηθῶμεν τὴν σπουδαιότητα.

Ζηνόδωρος

55. Ἐνῷ ὁ Νικομήδης, ὁ Διοκλῆς καὶ ὁ Περσεύς, ἀκολουθοῦντες τὰ ἴχνη τῶν μεγάλων διδασκάλων Ἀρχιμήδους καὶ Ἀπολλωνίου, προσέφερον ὑλικὰ πολύτιμα διὰ τὴν μελλοντικὴν ἀνάπτυξιν τῆς θεωρίας τῶν καμπύλων, ὁ Ζηνόδωρος, πιθανῶς σύγχρονος τοῦ ἐκ Πέργης γεωμέτρου, ἔγραψε τὰς πρώτας γραμμὰς εἰς ἕνα κεφάλαιον τῆς γεωμετρίας, τὸ ὁποῖον μόνον κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ παρελθόντος αἰῶνος ἔφθασεν εἰς κατάστασιν ἱκανοποιητικῆς τελειότητος, τουτέστι τὴν θεωρίαν τῶν ἰσοπεριμέτρων. Θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ διατυπωθῇ ἡ γνώμη ὅτι τὸ μικρὸν βιβλίον «περὶ ἰσοπεριμέτρων σχημάτων», ποὺ ἀποδίδεται εἰς τὸν Ζηνόδωρον, ἐγεννήθη ἀπὸ τὴν ἀξιέπαινον προσπάθειαν νὰ ἐκριζωθῇ μία πεπλανημένη γνώμη (ἡ ὁποία διαφαίνεται ἀκόμη καὶ εἰς ἕνα χωρίον τῶν ἱστοριῶν ποὺ ἔγραψεν ὁ Θουκυδίδης τὸν 5ον αἰῶνα π.Χ.), ὅτι διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν μίαν ἐπίπεδον ἐπιφάνειαν ἀρκεῖ νὰ μετρήσωμεν τὴν περίμετρόν της.

Διὰ τὴν ἐπίτευξιν τοῦ σκοποῦ τούτου τὸ καλύτερον μέσον θὰ ἦτο νὰ συγκρίνωμεν τὰ ἐμβαδὰ δύο ἰσοπεριμετρικῶν σχημάτων. Καὶ πράγματι ὁ Ζηνόδωρος δεικνύει πρὸ πάντων ὅτι, «ἐκ δύο πολυγώνων κανονικῶν καὶ ἰσοπεριμέτρων τὸ ἔχον μεγαλύτερον ἀριθμὸν πλευρῶν ἔχει καὶ τὸ μεγαλύτερον ἐμβαδὸν» καὶ ἐπάγεται ἐκ τούτου ὅτι, «ἐὰν κανονικὸν πολύγωνον καὶ κύκλος ἔχουν τὴν ἰδίαν περίμετρον, ὁ κύκλος ἔχει τὸ μεγαλύτερον ἐμβαδόν». Καὶ ἐπειδὴ ὁ Ἕλλην γεωμέτρης δὲν ἀγνοεῖ ὅτι «ἕνα κανονικὸν πολύγωνον ἔχει ἐμβαδὸν μεγαλύτερον ἑνὸς ἄλλου πολυγώνου ἰσοπεριμέτρου, ἀλλὰ μὴ κανονικοῦ» φθάνει εἰς τὸ θεμελιῶδες θεώρημα: «Μεταξὺ ὅλων τῶν ἰσοπεριμέτρων σχημάτων τοῦ ἐπιπέδου ὁ κύκλος εἶναι ὁ ἔχων τὸ μέγιστον ἐμβαδόν».

Εἰς τὸν χῶρον ἰσχύει πρότασις ἀνάλογος, διὰ τὴν ἀπόδειξιν τῆς ὁποίας

στίχους διασωθέντας ἐκ τοῦ βιβλίου τὸ ὁποῖον ὁ Περσεὺς εἶχε συγγράψει διὰ τὰς σπειροειδεῖς ἢ σπειρικὰς γραμμάς. Μᾶς παρέχεται μόνον ἡ διαβεβαίωσις ὅτι τῶν καμπύλων τούτων ὁ Περσεὺς καθώρισε τὸ «σύμπτωμα», ἤτοι τὴν χαρακτηριστικὴν ἐκείνην ἰδιότητα, ἥτις εἰς τὴν ἀρχαίαν γεωμετρίαν ἔπαιξεν ἕνα ρόλον ἀνάλογον πρὸς τὴν σημερινὴν ἐξίσωσιν μιᾶς καμπύλης εἰς καρτεσιανὰς συντεταγμένας. Γνωρίζομεν ἐπὶ πλέον ὅτι οὗτος ἀπεκάλυψε τὰς διαφόρους μορφὰς ποὺ παρουσιάζουν αἱ νέαι καμπύλαι ἀναλόγως πρὸς τὴν ἀπὸ τοῦ ἄξονος ἀπόστασιν τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου. Αἱ ὀλίγαι αὐταὶ ἀποσπασματικαὶ εἰδήσεις καθιστοῦν ἰδιαιτέρως λυπηρὰν τὴν ἀπώλειαν ἑνὸς ἔργου, τοῦ ὁποίου εἶναι ἀδύνατον ν' ἀρνηθῶμεν τὴν σπουδαιότητα.

Ζηνόδωρος

55. Ἐνῷ ὁ Νικομήδης, ὁ Διοκλῆς καὶ ὁ Περσεύς, ἀκολουθοῦντες τὰ ἴχνη τῶν μεγάλων διδασκάλων Ἀρχιμήδους καὶ Ἀπολλωνίου, προσέφερον ὑλικὰ πολύτιμα διὰ τὴν μελλοντικὴν ἀνάπτυξιν τῆς θεωρίας τῶν καμπύλων, ὁ Ζηνόδωρος, πιθανῶς σύγχρονος τοῦ ἐκ Πέργης γεωμέτρου, ἔγραψε τὰς πρώτας γραμμὰς εἰς ἕνα κεφάλαιον τῆς γεωμετρίας, τὸ ὁποῖον μόνον κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ παρελθόντος αἰῶνος ἔφθασεν εἰς κατάστασιν ἱκανοποιητικῆς τελειότητος, τουτέστι τὴν θεωρίαν τῶν ἰσοπεριμέτρων. Θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ διατυπωθῇ ἡ γνώμη ὅτι τὸ μικρὸν βιβλίον «περὶ ἰσοπεριμέτρων σχημάτων», ποὺ ἀποδίδεται εἰς τὸν Ζηνόδωρον, ἐγεννήθη ἀπὸ τὴν ἀξιέπαινον προσπάθειαν νὰ ἐκριζωθῇ μία πεπλανημένη γνώμη (ἡ ὁποία διαφαίνεται ἀκόμη καὶ εἰς ἕνα χωρίον τῶν ἱστοριῶν ποὺ ἔγραψεν ὁ Θουκυδίδης τὸν 5ον αἰῶνα π.Χ.), ὅτι διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν μίαν ἐπίπεδον ἐπιφάνειαν ἀρκεῖ νὰ μετρήσωμεν τὴν περίμετρόν της.

Διὰ τὴν ἐπίτευξιν τοῦ σκοποῦ τούτου τὸ καλύτερον μέσον θὰ ἦτο νὰ συγκρίνωμεν τὰ ἐμβαδὰ δύο ἰσοπεριμετρικῶν σχημάτων. Καὶ πράγματι ὁ Ζηνόδωρος δεικνύει πρὸ πάντων ὅτι, «ἐκ δύο πολυγώνων κανονικῶν καὶ ἰσοπεριμέτρων τὸ ἔχον μεγαλύτερον ἀριθμὸν πλευρῶν ἔχει καὶ τὸ μεγαλύτερον ἐμβαδὸν» καὶ ἐπάγεται ἐκ τούτου ὅτι, «ἐὰν κανονικὸν πολύγωνον καὶ κύκλος ἔχουν τὴν ἰδίαν περίμετρον, ὁ κύκλος ἔχει τὸ μεγαλύτερον ἐμβαδόν». Καὶ ἐπειδὴ ὁ Ἕλλην γεωμέτρης δὲν ἀγνοεῖ ὅτι «ἕνα κανονικὸν πολύγωνον ἔχει ἐμβαδὸν μεγαλύτερον ἑνὸς ἄλλου πολυγώνου ἰσοπεριμέτρου, ἀλλὰ μὴ κανονικοῦ» φθάνει εἰς τὸ θεμελιῶδες θεώρημα: «Μεταξὺ ὅλων τῶν ἰσοπεριμέτρων σχημάτων τοῦ ἐπιπέδου ὁ κύκλος εἶναι ὁ ἔχων τὸ μέγιστον ἐμβαδόν».

Εἰς τὸν χῶρον ἰσχύει πρότασις ἀνάλογος, διὰ τὴν ἀπόδειξιν τῆς ὁποίας

ὁ Ζηνόδωρος ἐπιχειρεῖ μίαν προκαταρκτικὴν ἔρευναν, χωρὶς ὅμως νὰ κατορθώσῃ νὰ δώσῃ συνέχειαν εἰς τὰς προθέσεις του. Τὸ πρᾶγμα δὲν πρέπει νὰ μᾶς ἐκπλήξῃ ἐὰν ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι εἰς τὸν σκοπὸν τοῦτον δὲν ἔφθασεν οὔτε ὁ Steiner, ἀλλὰ μόνον μεταγενέστεροι μαθηματικοὶ ὁπλισθέντες μὲ νεωτέρας ἐννοίας καὶ ὀξυτέρας ἀναλυτικὰς μεθόδους. Τὸ μικρὸν λοιπὸν ἔργον, περὶ τοῦ ὁποίου πρὸ ὀλίγου ὡμιλήσαμεν, δὲν ἀποτελεῖ ἕνα ἐξ ἐκείνων τῶν προνομιούχων προϊόντων τῆς σκέψεως, ὅπου τὸ πνεῦμα ἐφησυχάζει, δὲν εἶναι ὁ καρπός, ἀλλὰ ὁ σπόρος, καὶ ὑπὸ τὴν ἔποψιν αὐτὴν εἶναι καθῆκον τοῦ ἱστορικοῦ νὰ τὸ ἀναγράψῃ καὶ νὰ τὸ ἀξιολογήσῃ.

Πάππος

56. Τὸ καλύτερον μέρος τῶν πληροφοριῶν, τὰς ὁποίας κατέχομεν γύρω ἀπὸ τὰ ἔργα ἐκεῖνα τῶν Ἑλλήνων μαθηματικῶν, τὰ ὁποῖα ἐξηφανίσθησαν ἀπὸ τὴν καταστρεπτικὴν διάβασιν τοῦ χρόνου καὶ τῶν βαρβάρων, ὀφείλομεν εἰς μίαν ἐκτεταμένην συγγραφικὴν ἐργασίαν ἑνὸς Ἀλεξανδρινοῦ γεωμέτρου, ὁ ὁποῖος ἔζησε καὶ πιθανώτατα ἐδίδαξε κατὰ τὸν III αἰῶνα μ.Χ. Ὁ νεώτερος αὐτὸς γεωμέτρης τῆς Ἀλεξανδρείας ὀνομάζεται Π ά π π ο ς.

Ἡ πολύτιμος συγγραφικὴ ἐργασία τοῦ Πάππου, ἡ ὁποία ἔφθασε μέχρις ἡμῶν κατὰ τὸ μεγαλύτερον καὶ σημαντικώτερον μέρος της, ἔχει ἕνα χαρακτῆρα ἐντελῶς ἰδικόν της. Δὲν ἀποτελεῖ ἐγκυκλοπαίδειαν ὑπὸ τὴν συνήθη ἔννοιαν τῆς λέξεως, διότι προϋποθέτει ὅτι εἰς τὴν διάθεσιν τοῦ ἀναγνώστου εὑρίσκονται τὰ πρωτότυπα ἔργα. Δὲν ἀποτελεῖ ἐπίσης συλλογὴν ἑρμηνευτικῶν σχολίων, καθ' ὅσον ὁ Πάππος ὁμιλεῖ συχνὰ διὰ λογαριασμόν του, διορθώνων, ὑποβάλλων εἰς κριτικὴν καὶ γενικεύων τὰς ἀναφερομένας ὑπ' αὐτοῦ προτάσεις. Ἀλλ' οὔτε καὶ ἀποτελεῖ ἱστορίαν ἢ βιβλιογραφίαν, μολονότι εἶναι ἀνεξάντλητος πηγὴ ἱστορικῶν καὶ βιβλιογραφικῶν λεπτομερειῶν.

Πρόκειται, κατὰ τὴν γνώμην μας, περὶ μιᾶς συγκεντρώσεως τῆς ὕλης διαφόρων μαθημάτων, ἀποβλεπόντων εἰς διάδοσιν τῆς γνώσεως καὶ εἰς τὴν διευκόλυνσιν τῶν ἐπιθυμούντων νὰ κατανοήσουν τὰ ἀριστουργήματα τοῦ ἑλληνικοῦ μαθηματικοῦ πνεύματος. Ἡ μελέτη τῆς Μ α θ η μ α τ ι κ ῆ ς Σ υ ν α γ ω γ ῆ ς, (αὐτὸς εἶναι ὁ τίτλος τοῦ μνημειώδους ἔργου) ἐπιτρέπει νὰ συμπληρώσωμεν εἰς πλεῖστα ἐνδιαφέροντα σημεῖα, τὸ πλαίσιον τοῦ μαθηματικοῦ ἔργου τῶν ἀρχαιοτέρων Ἑλλήνων γεωμετρῶν καὶ διὰ τοῦτο εἶναι ἀπαραίτητον νὰ κάμωμεν ἐδῶ μίαν πλήρη, ὅσον τὸ δυνατὸν σύντομον, ἀνάλυσιν.

57. Ἐκ τῶν ὀκτὼ βιβλίων, ποὺ ἀπετέλουν ἀρχικῶς τὴν Σ υ ν α γ ω γ ή ν, τὸ I ἀπωλέσθη, ἐκ δὲ τοῦ II ἐσώθη ἕνα μέρος, τοῦ ὁποίου θὰ κά-

ὁ Ζηνόδωρος ἐπιχειρεῖ μίαν προκαταρκτικὴν ἔρευναν, χωρὶς ὅμως νὰ κατορθώσῃ νὰ δώσῃ συνέχειαν εἰς τὰς προθέσεις του. Τὸ πρᾶγμα δὲν πρέπει νὰ μᾶς ἐκπλήξῃ ἐὰν ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι εἰς τὸν σκοπὸν τοῦτον δὲν ἔφθασεν οὔτε ὁ Steiner, ἀλλὰ μόνον μεταγενέστεροι μαθηματικοὶ ὁπλισθέντες μὲ νεωτέρας ἐννοίας καὶ ὀξυτέρας ἀναλυτικὰς μεθόδους. Τὸ μικρὸν λοιπὸν ἔργον, περὶ τοῦ ὁποίου πρὸ ὀλίγου ὡμιλήσαμεν, δὲν ἀποτελεῖ ἕνα ἐξ ἐκείνων τῶν προνομιούχων προϊόντων τῆς σκέψεως, ὅπου τὸ πνεῦμα ἐφησυχάζει, δὲν εἶναι ὁ καρπός, ἀλλὰ ὁ σπόρος, καὶ ὑπὸ τὴν ἔποψιν αὐτὴν εἶναι καθῆκον τοῦ ἱστορικοῦ νὰ τὸ ἀναγράψῃ καὶ νὰ τὸ ἀξιολογήσῃ.

Πάππος

56. Τὸ καλύτερον μέρος τῶν πληροφοριῶν, τὰς ὁποίας κατέχομεν γύρω ἀπὸ τὰ ἔργα ἐκεῖνα τῶν Ἑλλήνων μαθηματικῶν, τὰ ὁποῖα ἐξηφανίσθησαν ἀπὸ τὴν καταστρεπτικὴν διάβασιν τοῦ χρόνου καὶ τῶν βαρβάρων, ὀφείλομεν εἰς μίαν ἐκτεταμένην συγγραφικὴν ἐργασίαν ἑνὸς Ἀλεξανδρινοῦ γεωμέτρου, ὁ ὁποῖος ἔζησε καὶ πιθανώτατα ἐδίδαξε κατὰ τὸν III αἰῶνα μ.Χ. Ὁ νεώτερος αὐτὸς γεωμέτρης τῆς Ἀλεξανδρείας ὀνομάζεται Π ά π π ο ς.

Ἡ πολύτιμος συγγραφικὴ ἐργασία τοῦ Πάππου, ἡ ὁποία ἔφθασε μέχρις ἡμῶν κατὰ τὸ μεγαλύτερον καὶ σημαντικώτερον μέρος της, ἔχει ἕνα χαρακτῆρα ἐντελῶς ἰδικόν της. Δὲν ἀποτελεῖ ἐγκυκλοπαίδειαν ὑπὸ τὴν συνήθη ἔννοιαν τῆς λέξεως, διότι προϋποθέτει ὅτι εἰς τὴν διάθεσιν τοῦ ἀναγνώστου εὑρίσκονται τὰ πρωτότυπα ἔργα. Δὲν ἀποτελεῖ ἐπίσης συλλογὴν ἑρμηνευτικῶν σχολίων, καθ' ὅσον ὁ Πάππος ὁμιλεῖ συχνὰ διὰ λογαριασμόν του, διορθώνων, ὑποβάλλων εἰς κριτικὴν καὶ γενικεύων τὰς ἀναφερομένας ὑπ' αὐτοῦ προτάσεις. Ἀλλ' οὔτε καὶ ἀποτελεῖ ἱστορίαν ἢ βιβλιογραφίαν, μολονότι εἶναι ἀνεξάντλητος πηγὴ ἱστορικῶν καὶ βιβλιογραφικῶν λεπτομερειῶν.

Πρόκειται, κατὰ τὴν γνώμην μας, περὶ μιᾶς συγκεντρώσεως τῆς ὕλης διαφόρων μαθημάτων, ἀποβλεπόντων εἰς διάδοσιν τῆς γνώσεως καὶ εἰς τὴν διευκόλυνσιν τῶν ἐπιθυμούντων νὰ κατανοήσουν τὰ ἀριστουργήματα τοῦ ἑλληνικοῦ μαθηματικοῦ πνεύματος. Ἡ μελέτη τῆς Μ α θ η μ α τ ι κ ῆ ς Σ υ ν α γ ω γ ῆ ς, (αὐτὸς εἶναι ὁ τίτλος τοῦ μνημειώδους ἔργου) ἐπιτρέπει νὰ συμπληρώσωμεν εἰς πλεῖστα ἐνδιαφέροντα σημεῖα, τὸ πλαίσιον τοῦ μαθηματικοῦ ἔργου τῶν ἀρχαιοτέρων Ἑλλήνων γεωμετρῶν καὶ διὰ τοῦτο εἶναι ἀπαραίτητον νὰ κάμωμεν ἐδῶ μίαν πλήρη, ὅσον τὸ δυνατὸν σύντομον, ἀνάλυσιν.

57. Ἐκ τῶν ὀκτὼ βιβλίων, ποὺ ἀπετέλουν ἀρχικῶς τὴν Σ υ ν α γ ω γ ή ν, τὸ I ἀπωλέσθη, ἐκ δὲ τοῦ II ἐσώθη ἕνα μέρος, τοῦ ὁποίου θὰ κά-

μωμεν μνείαν, ὅταν θὰ ὁμιλήσωμεν διὰ τὴν ἀριθμητικὴν τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων.

Τὸ βιβλίον III ἀρχίζει μὲ ἕνα ἐνδιαφέροντα πρόλογον ὑπὸ τύπον ἐπιστολῆς πρὸς ἕνα ἄτομον Πανδροσίωνα, τοῦ ὁποίου ἀκόμη καὶ τὸ φῦλον εἶναι ἀμφίβολον καὶ τὸ ὁποῖον εὑρίσκετο ἐπικεφαλῆς μιᾶς σχολῆς μὲ τροφίμους τόσον χαμηλοῦ πνευματικοῦ ἐπιπέδου, ὥστε νὰ σφάλλουν ὄχι πλέον εἰς τὴν λύσιν, ἀλλὰ καὶ εἰς τὴν ἐκφώνησιν τῶν προβλημάτων. Πρὸς διαφώτισιν τώρα διδασκάλου καὶ μαθητῶν ὁ Πάππος — ἀκολουθῶν ἕνα σύστημα, τὸ ὁποῖον σήμερα θὰ ἐθεωρεῖτο τοὐλάχιστον παράδοξον — ἀπέστειλε πρὸς τὸν συνάδελφόν του, ὅσα, κατὰ τὴν γνώμην του, ἦσαν ἐπαρκῆ καὶ ἀναγκαῖα πρὸς διασάφησιν τοῦ σημαντικοῦ θέματος.

Ἀρχίζει λοιπὸν μὲ τὴν ἔκθεσιν μιᾶς μεθόδου πρὸς λύσιν τοῦ δηλίου προβλήματος, ὀφειλομένης εἰς κάποιον Ἱέριον, ἡ ὁποία καίτοι δὲν εἶναι ὀρθή, ἐφαρμοζομένη κατ' ἐπανάληψιν ἐπιτρέπει τὸν ὑπολογισμὸν τῆς κυβικῆς ρίζης μὲ ὅσην θέλομεν προσέγγισιν. Κατὰ τὴν κριτικὴν ἐξέτασιν τῆς μεθόδου ὁ Πάππος ἀκολουθεῖ τὴν ἀρχαίαν διαίρεσιν τῶν γεωμετρικῶν προβλημάτων εἰς «ἐπίπεδα», «στερεὰ» καὶ «γραμμικά», ἐφ' ὅσον ἡ λύσις αὐτῶν ἐξηρτᾶτο ἀντιστοίχως ἀπὸ εὐθείας ἢ περιφερείας, κωνικὰς τομὰς καὶ γραμμὰς ἄλλης φύσεως. Εἰς τὴν δευτέραν τῶν κατηγοριῶν τούτων ἀνήκει τὸ δήλιον πρόβλημα, ὁ δὲ Πάππος ἐπιλαμβάνεται τῆς εὐκαιρίας διὰ νὰ ἐκθέσῃ τὰς λύσεις ποὺ ἐδόθησαν εἰς αὐτὸ μέχρι τῶν ἡμερῶν του.

Μετὰ τὴν ἐξάντλησιν τῶν ὅσων ἤρκουν διὰ τὴν ἀποκατάστασιν τῆς διαυγείας τῶν ἰδεῶν εἰς τὸν Πανδροσίωνα καὶ τοὺς μαθητάς του, ὁ Πάππος στρέφεται πρὸς ἄλλο θέμα, τὴν θεωρίαν τῶν ἀναλογιῶν καὶ ἐκθέτει πῶς παράγονται κυκλικῶς αἱ δέκα ἀναλογίαι τῶν ἀρχαίων, ἂν θέσωμεν ἕνα λόγον τοῦ τύπου :

$$\frac{\alpha - \mu}{\mu - \beta}$$

ἴσον διαδοχικῶς πρὸς ἕνα τῶν λόγων :

$$\frac{\alpha}{\alpha}, \quad \frac{\alpha}{\mu}, \quad \frac{\alpha}{\beta}, \quad \frac{\beta}{\alpha}, \quad \frac{\beta}{\mu},$$

ἢ ἕνα λόγον τοῦ τύπου :

$$\frac{\alpha - \beta}{\alpha - \mu},$$

ἴσον διαδοχικῶς πρὸς ἕνα τῶν τριῶν :

$$\frac{\mu}{\beta}, \quad \frac{\alpha}{\mu}, \quad \frac{\alpha}{\beta},$$

ἢ, τέλος, ἂν θέσωμεν:

$$\frac{\alpha-\beta}{\mu-\beta}=\frac{\mu}{\beta}.$$

Εἶναι αἱ ἀναλογίαι, αἱ λεγόμεναι κατὰ σειράν: ἀριθμητική, γεωμετρική, ἁρμονική, ὑπεναντία ἁρμονικῶς, πέμπτη, ἕκτη (ὑπεναντία γεωμετρικῶς, ἑβδόμη, ὀγδόη, ἐνάτη καὶ δεκάτη.

Εἰς τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἰδίου βιβλίου III, ὁ Πάππος δίδει μίαν περίληψιν καὶ σχολιάζει τὸ περιεχόμενον ἑνὸς ἔργου ὑπὸ τὸν τίτλον παράδοξα κάποιου Ἐρυκίνου. Τὸ ἔργον τοῦτο περιελάμβανε μίαν σειρὰν προτάσεων σχετικῶν πρὸς τὴν σύγκρισιν τῆς περιμέτρου ἑνὸς τριγώνου ἢ ἑνὸς πολυγώνου μὲ τὴν περίμετρον πολυγωνικῆς γραμμῆς ἐσωτερικῆς, δηλαδὴ μίαν πραγματείαν ἔχουσαν ὡς φαίνεται ἀφετηρίαν τὴν ὑπ' ἀριθμὸν I, 21 πρότασιν τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου: «Ἐὰν τριγώνου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν ἀπὸ τῶν περάτων δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συσταθῶσιν, αἱ συσταθεῖσαι τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ἐλάττονες μὲν ἔσονται, μείζονα δὲ γωνίαν περιέξουσιν».

Εἰς τὸ τελευταιον μέρος τοῦ βιβλίου III τῆς Συναγωγῆς ὁ συγγραφεὺς ἀσχολεῖται μὲ τὴν θεωρίαν τῶν κανονικῶν πολυέδρων, ἀντλῶν ἐκ τοῦ ἔργου τοῦ Ἀρισταίου (§ 45), εἰς τὸ ὁποῖον δὲν παραλείπει νὰ ἐπιφέρῃ μερικὰς συμπληρώσεις. Ἀξίζει τὸν κόπον νὰ σημειώσωμεν ὅτι, κατ' ἀντίθεσιν πρὸς τὸν Εὐκλείδη, ὁ Πάππος κατεσκεύασε τὰ ἀξιόλογα αὐτὰ στερεὰ δι' ἐγγραφῆς των εἰς μίαν σφαῖραν. Τοιουτοτρόπως τὸ πρόβλημα ἀνήγετο εἰς τὴν διαίρεσιν τῆν σφαιρικῆς ἐπιφανείας εἰς κανονικὰ σφαιρικὰ πολύγωνα μὲ συνεχομένας πλευράς.

58. Τὸ Βιβλίον IV, ἂν καὶ διαιρεῖται εἰς διάφορα μέρη, ἐκ πρώτης ὄψεως ξένα μεταξύ των, κατέχει ἐν τούτοις θεμελιώδη ἑνότητα, καθ' ὅσον περιλαμβάνει μίαν ἔκθεσιν τῶν ἰδιοτήτων, τὰς ὁποίας παρουσιάζουν αἱ καμπύλαι αἱ λύουσαι τὰ τρία κλασικὰ προβλήματα τῆς ἀρχαίας γεωμετρίας. Ἡ ἀπουσία προλόγου παρέσχε στερεὸν ἐπιχείρημα εἰς τὴν ὑπόθεσιν ὅτι τὸ βιβλίον τοῦτο θ' ἀπετέλει ἕνα σύνολον μετὰ τοῦ III, ἐνισχύεται δὲ ἡ ὑπόθεσις αὕτη ἀπὸ τὸ γεγονὸς ὅτι τὸ περιεχόμενόν του δίδει τὴν ἐντύπωσιν φυσικῆς συνεχείας τοῦ τελευταίου μέρους τοῦ βιβλίου III.

Εἰς τὸ πρῶτον μέρος τοῦ βιβλίου IV ἐκτίθεται μία γενίκευσις τοῦ θεωρήματος τοῦ Πυθαγόρου εἰς τρίγωνα μὴ ὀρθογώνια, ἡ ὁποία εἶναι ἀξιοσημείωτος ὄχι μόνον ἀπὸ καθαρᾶς γεωμετρικῆς ἀπόψεως, ἀλλ' ἐπίσης διότι εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν πρότασιν τῆς μηχανικῆς, τὴν γνωστὴν ὑπὸ τὸ ὄνομα «θεώρημα τοῦ Varignon»[33].

Ἀκολουθοῦν μερικαὶ σχέσεις, ἀγνώστου προελεύσεως, μεταξὺ τῶν ἀκτίνων καὶ τῶν διαδοχικῶν στοιχείων μιᾶς σειρᾶς περιφερειῶν, ἑκάστη

τῶν ὁποίων ἐφάπτεται τῆς προηγουμένης καὶ ὅλαι ἐπίσης ἐφάπτονται δύο ἄλλων δοθεισῶν, αἱ ὁποῖαι ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς μεταξύ των, ὑποτίθεται δὲ ὅτι μία τῶν περιφερειῶν τῆς σειρᾶς ἔχει τὸ κέντρον της ἐπὶ τῆς διακέντρου τῶν δοθεισῶν. Αἱ σχέσεις αὐταὶ συνεπληρώθησαν πρὸ αἰῶνος περίπου ἀπὸ τὸν Steiner καὶ ἔδωσαν κατόπιν λαβὴν εἰς ἕνα ἀπὸ τὰ πλέον ἐνδιαφέροντα «προβλήματα φραγμοῦ» ποὺ γνωρίζομεν.

Τὸ δεύτερον μέρος τοῦ Βιβλίου IV τῆς Συναγωγῆς ἀναφέρεται εἰς τὴν ἀρχιμήδειον ἕλικα. Ἀναψηλαφῶν ὁ Πάππος τὸν τετραγωνισμὸν χωρίου τῆς ἕλικος, ἠδυνήθη νὰ προσθέσῃ μερικὰς κομψὰς προτάσεις εἰς ἐκείνας ποὺ ἐδίδαξεν ὁ Ἀρχιμήδης, αἱ ὁποῖαι ἀντέχουν θαυμάσια εἰς σύγκρισιν πρὸς τὰς τοῦ Συρακουσίου.

Εἰς τὸ ἑπόμενον μέρος ἀσχολεῖται μὲ τὴν τετραγωνίζουσαν τοῦ Ἱππία. Ἐκτὸς τῆς ἀρχικῆς γενέσεως τῆς καμπύλης (§ 28) ἐκθέτει δύο ἄλλας ἐντελῶς πρωτοτύπους κατασκευάς, αἱ ὁποῖαι προσφέρουν ἐντυπωσιακὴν ἀπόδειξιν τῆς μεγάλης χρησιμότητος στερεομετρικῶν προϋποθέσεων εἰς τὴν μελέτην τῶν ἐπιπέδων σχημάτων. Διὰ νὰ εἴμεθα περισσότερον συγκεκριμένοι ἂς ἀναφέρωμεν τὴν ἀκόλουθον πρότασιν, τὴν ὁποίαν ἀποδεικνύει ὁ Πάππος: «λαμβάνομεν μίαν τετραγωνίζουσαν, ἂν τμήσωμεν τὴν ἐπιφάνειαν ἑνὸς κοχλίου, ἔχοντος τετραγωνικὴν κατατομὴν σπειρώματος, μὲ ἕνα ἐπίπεδον περιλαμβάνον μίαν γενέτειραν, προβάλωμεν δὲ κατόπιν ὀρθογωνίως τὴν προκύπτουσαν καμπύλην ἐπὶ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα τῆς ἐπιφανείας».

Ἀκόμη περισσότερον περίεργος καὶ ὄχι ὀλιγώτερον ἀξιοσημείωτος εἶναι μία δευτέρα κατασκευὴ τοῦ αὐτοῦ τύπου, ἡ ὁποία στηρίζεται ἐπὶ τῆς θεωρήσεως ἑνὸς κυλίνδρου ὀρθοῦ ἔχοντος βάσιν μίαν ἀρχιμήδειον ἕλικα καὶ ἑνὸς ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου ἔχοντος ἄξονα τὴν ἐκ τοῦ πόλου τῆς ἕλικος κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ταύτης. Ἐὰν ἐξ ὅλων τῶν σημείων τῆς γραμμῆς καθ' ἣν τέμνονται αἱ δύο ἐπιφάνειαι, ἀχθοῦν αἱ κάθετοι ἐπὶ τὸν ἄξονα τῆς δευτέρας παράγεται μία εὐθειογενὴς ἐπιφάνεια, τὴν ὁποίαν τέμνομεν διά τινος ἐπιπέδου περιλαμβάνοντος μίαν γενέτειράν τους κατὰ μίαν καμπύλην, ἡ ὁποία προβάλλεται ὀρθογωνίως ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς ἀρχιμηδείου ἕλικος κατὰ μίαν τετραγωνίζουσαν.

Αἱ θαυμάσιαι αὐταὶ στερεομετρικαὶ θεωρίαι ὡδήγησαν τὸν Πάππον εἰς τὴν ἐξέτασιν τῆς ἀναλόγου καμπύλης πρὸς τὴν ἕλικα τοῦ Ἀρχιμήδους ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας μιᾶς σφαίρας. Διὰ νὰ τὴν περιγράψωμεν θὰ ὑποθέσωμεν ὅτι, ἐνῷ ἕνας μέγιστος κύκλος στρέφεται ὁμαλῶς περὶ μίαν διάμετρόν του, ἕνα σημεῖον τῆς περιφερείας του ἐκκινοῦν ἀπὸ τὸ ἕνα ἐκ τῶν δύο ἄκρων τῆς ἐν λόγῳ διαμέτρου διαγράφει τὴν περιφέρειαν ἐπίσης ὁμαλῶς. Ἡ τροχιά, τὴν ὁποίαν διαγράφει τὸ κινητὸν σημεῖον εἶναι ἡ νέα ἕλιξ τοῦ Πάππου. Ἡ σπουδαιότης τῆς νέας καμπύλης ἐξαίρεται ἀπὸ τὸν

δεινὸν ὑπομνηματιστὴν μὲ τὴν ἀπόδειξιν ἑνὸς κομψοτάτου θεωρήματος τετραγωνισμοῦ, εἰς τὸ ὁποῖον δίδει λαβὴν ἡ ἐν λόγῳ καμπύλη, θεωρουμένη εἰς μίαν εἰδικὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν αἱ δύο ὁμαλαὶ κινήσεις δὲν εἶναι ἐντελῶς τυχοῦσαι, ἀλλὰ τοιαῦται, ὥστε ὅταν ὁ μέγιστος κύκλος συμπληρώσῃ μίαν πλήρη περιστροφήν, τὸ κινητὸν σημεῖον ἔχει διαγράψει ἕνα μόνον τεταρτημόριον*.

Τὸ τελευταῖον μέρος τοῦ βιβλίου IV ἔχει ὡς θέμα τὴν διαίρεσιν μιᾶς γωνίας εἰς μέρη ἔχοντα μεταξύ των προκαθωρισμένους λόγους, εἰδικώτερα δὲ τὴν διαίρεσιν εἰς τρία ἴσα μέρη. Ὁ Πάππος δεικνύει πῶς δυνάμεθα, χρησιμοποιοῦντες τὴν τετραγωνίζουσαν τοῦ Ἱππία ἢ ἐπίσης τὴν ἀρχιμήδειον ἕλικα νὰ ἐπιτύχωμεν τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος. Εἶναι εὔκολον νὰ πεισθῇ κανεὶς περὶ αὐτοῦ, ἂν λάβῃ ὑπ' ὄψιν του τὸ γεγονὸς ὅτι πράγματι αἱ καμπύλαι αὐταὶ ἀνάγουν τὸ πρόβλημα διαιρέσεως τῆς γωνίας εἰς τὸ ἀνάλογον ἐπὶ εὐθυγράμμου τμήματος.

59. Τὸ Βιβλίον V τῆς Συναγωγῆς παρουσιάζει μεγαλυτέραν ἑνότητα τῶν προηγουμένων, καθ' ὅσον ὁλόκληρον ἀφιεροῦται εἰς τὴν θεωρίαν τῶν ἰσοπεριμέτρων (§ 55), ἡ ὁποία ἀρχίζει μὲ μίαν λαμπροτάτην εἰσαγωγήν, ὅπου, λαμβάνων ἀφορμὴν ἀπὸ τὸ γεγονός, ὅτι αἱ μέλισσαι δίδουν εἰς τὰ κελλία τῶν μελιτοφόρων κηρυθρῶν τὴν εὐνοϊκωτέραν πολυγωνικὴν μορφὴν (μέγιστον περιεχόμενον εἰς ἐλαχίστην ἐπιφάνειαν), ὁ Ἀλεξανδρινὸς γεωμέτρης κάμνει ἕνα παραλληλισμὸν μεταξὺ τῆς νοημοσύνης τῶν ἀνθρώπων καὶ ἐκείνης τῶν ἐντόμων. Ἀποδεικνύων κατόπιν τὸ θεμελιῶδες θεώρημα τῶν ἰσοπεριμέτρων διὰ τὰ ἐπίπεδα σχήματα, ὁ Πάππος ἐπιχειρεῖ ἐν συνεχείᾳ ἐπέκτασιν τούτου εἰς τὸν χῶρον. Τὸν ἐξαίρετον ὅμως αὐτὸν σκοπὸν δὲν ἐπιτυγχάνει, ἂν καὶ δι' ἡμᾶς ἡ προσπάθειά του εἶναι πολλοῦ λόγου ἀξία, καθ' ὅσον δι' αὐτῆς τοῦ ἐδόθη ἀφορμὴ νὰ μᾶς παράσχῃ τὰς μοναδικὰς πληροφορίας, ποὺ ἔχομεν μέχρι σήμερον, σχετικῶς πρὸς τὰ ἡμικανονικὰ πολύεδρα τοῦ Ἀρχιμήδους (§ 49).

Διὰ τὸ VI Βιβλίον τῆς Συναγωγῆς δὲν θὰ εἴπωμεν παρὰ ὀλίγας λέξεις, διότι τοῦτο περιλαμβάνει ἀτάκτους παρατηρήσεις ἐπὶ ἔργων, ποὺ θὰ μᾶς ἀπασχολήσουν ἐν συνεχείᾳ, καὶ ἀφορώντων τὴν σφαιρικὴν Ἀστρονομίαν τῶν Ἑλλήνων. Ἄλλωστε εἰς τὸ βιβλίον τοῦτο ὁ Πάππος δὲν εὗρε πεδίον ἀναπτύξεως κάποιας ἀξιοσημειώτου πρωτοτυπίας.

Ἐκεῖνο τὸ βιβλίον, ποὺ ἔχει καθ' ἡμᾶς ἰδιαιτέραν ἀξίαν, εἶναι τὸ ἑπόμενον, δηλαδὴ τὸ βιβλίον VII. Εἰς αὐτὸ παρέχονται πληροφορίαι ἐπὶ ἑνὸς

* Ἂν ἐξαιρέσωμεν τὴν περιοριστικὴν αὐτὴν συνθήκην, ἡ καμπύλη τοῦ Πάππου συμπίπτει πρὸς τὰς καμπύλας, ποὺ ἐπενόησεν ἀργότερα ὁ Guido Grandi (1671-1742) καὶ ὠνόμασε Κλελίας (Flores geometrici ex rhodonearum et claeliarum descriptione resultantes, Flor. 1728).

μεγάλου ἀριθμοῦ σημαντικῶν ἔργων, ὀφειλομένων εἰς κορυφαίους μαθηματικοὺς τῆς Ἀρχαιότητος, τὰ ὁποῖα ὅμως ἐχάθησαν. Τὸ βιβλίον τοῦτο θ' ἀποτελῇ πάντοτε ἀξιόλογον πηγὴν πληροφοριῶν διὰ τοὺς ἱστορικοὺς τῶν ἑλληνικῶν μαθηματικῶν. Τὸ βιβλίον ἀρχίζει μὲ μίαν εἰσαγωγικὴν ἐπιστολὴν τοῦ Πάππου πρὸς τὸν υἱόν του, εἰς τὴν ὁποίαν παρατάσσει λεπτομερῆ κατάλογον τῶν ἔργων, ποὺ ἀπετέλουν τὸν λεγόμενον «Ἀναλυόμενον τόπον». Τὰ ἔργα αὐτὰ προωρίζοντο δι' ἐκείνους οἱ ὁποῖοι, ἀφοῦ διεξήρχοντο τὰ Στοιχεῖα τῆς γεωμετρίας, εἶχον περαιτέρω τὴν ἔφεσιν νὰ γυμνασθοῦν εἰς τὴν τέχνην τῆς λύσεως τῶν προβλημάτων, ἦσαν δὲ μεταξὺ ἄλλων καὶ τὰ ἑξῆς: Δεδομένα, Πορίσματα καὶ Τόποι πρὸς ἐπιφανείᾳ, ἀνήκοντα εἰς τὸν Εὐκλείδη. Λόγου ἀποτομῆς, χωρίου ἀποτομῆς, Διωρισμένης τομῆς, Ἐπαφαί, Νεύσεις καὶ Κωνικαί, ἀνήκοντα εἰς τὸν Ἀπολλώνιον. Τέλος τὸ ἔργον τοῦ Ἐρατοσθένους περὶ Μεσοτήτων.

Δι' ἕνα ἕκαστον τῶν ἔργων τούτων ὁ Πάππος ὑποδεικνύει τὸν σκοπὸν καὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν περιεχομένων προτάσεων, προσθέτει δὲ καὶ ὁ ἴδιος μέγαν ἀριθμὸν λημμάτων, χρησιμωτάτων πρὸς κατανόησιν τοῦ κειμένου. Μερικὰ ἐξ αὐτῶν συμπληρώνουν εἴς τινας λεπτομερείας τὴν ἀρχαίαν «γεωμετρικὴν ἄλγεβραν» καὶ διὰ τοῦτο δὲν ἔχουν πλέον παρὰ ἱστορικὸν μόνον ἐνδιαφέρον. Ὑπάρχουν ὅμως ἄλλα ἐκφράζοντα ἀληθείας, αἱ ὁποῖαι μὲ τὴν πάροδον τοῦ χρόνου κατέλαβον μόνιμον θέσιν εἰς τὴν γεωμετρίαν, ἀσχέτως τοῦ ξένου ἐμβλήματος, ὑπὸ τὸ ὁποῖον συχνότατα παρουσιάζονται σήμερον. Τοιαῦται εἶναι π.χ. αἱ προτάσεις αἱ τιτλοφορούμεναι ὡς θεωρήματα τοῦ Guldin, τοῦ Stewart ὡς ἐπίσης αἱ προτάσεις αἱ ἐκφράζουσαι τὸ ἀναλλοίωτον τοῦ διπλοῦ λόγου τεσσάρων σημείων σημειοσειρᾶς ἢ τεσσάρων ἀκτίνων δέσμης κατὰ τὴν προβολήν.

Τὸ Βιβλίον VIII, τὸ τελευταῖον τῆς Συναγωγῆς ἀφορᾷ τὴν Μηχανικήν, συμφώνως πρὸς τὰς ἀρχαίας ἀντιλήψεις, ἤτοι θεωρίαν τῶν κέντρων βάρους καὶ τῶν ἁπλῶν μηχανῶν. Ἐπειδὴ τὰ σχήματα, ποὺ ἐξετάζονται, ἀποτελοῦν καθαρὰς μαθηματικὰς ἐξιδανικεύσεις τῶν φυσικῶν στερεῶν, ἡ θεωρητικὴ μελέτη τούτων διεξάγεται ἐπὶ τῇ βάσει τῶν αὐστηροτέρων κριτηρίων τοῦ Εὐκλείδου. Μερικὰ μάλιστα ἐκ τῶν παρατιθεμένων ἀποτελεσμάτων εἶναι τόσον γεωμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν οὐσίαν καὶ τὴν μορφήν, ὥστε δὲν πρέπει οἱ καθαροὶ μαθηματικοὶ νὰ θεωροῦν τὸ βιβλίον τοῦτο, τελευταῖον τῆς Συναγωγῆς, ὡς ξένον πρὸς τὰ συνήθη ἀντικείμενα τῆς ἀπασχολήσεώς των.

Ἀπὸ τὴν ἔκθεσιν αὐτὴν τοῦ περισωθέντος τελευταίου μεγάλου ἔργου τῆς Ἀρχαίας Ἑλλάδος, μολονότι σύντομον καὶ ἀτελῆ, προκύπτει πόσον πλούσιον, ποικίλον καὶ σημαντικὸν εἶναι τὸ περιεχόμενον αὐτοῦ. Ἐκεῖνος ὅμως ὁ ὁποῖος, παρακινούμενος ἴσως ἀπὸ τοὺς ἁπλοῦς μόνον ἐγκω-

μιαστικούς χαρακτηρισμούς μας, θ' ἀνατρέξῃ εἰς τὸ πρωτότυπον (τοῦ ὁποίου δυστυχῶς δὲν γνωρίζομεν καμμίαν ἔκδοσιν εἰς ζωντανὴν γλῶσσαν) [69], δὲν θὰ ἀντλήσῃ μόνον ἐξ αὐτοῦ πολυτίμους συμπληρωματικὰς γνώσεις ἐπὶ τῆς ἐξελίξεως τῆς ἑλληνικῆς γεωμετρίας, ἀλλὰ θὰ μάθῃ συγχρόνως πλῆθος τερπνῶν καὶ διδακτικῶν λεπτομερειῶν γύρω ἀπὸ τὰς μεθόδους ποὺ ἐχρησιμοποίουν οἱ ἀρχαῖοι εἰς τὴν ἔρευναν τοῦ ἀληθοῦς — ἐν τῷ πεδίῳ τῶν μαθηματικῶν — καὶ τὰ εὑρήματα ποὺ ἐπέτυχον μὲ αὐτάς.

Κατόπιν τῶν ὅσων ἐξετέθησαν, θὰ ἔπρεπε νὰ σταματήσωμεν ἐδῶ τὴν διατριβήν μας περὶ τοῦ ἐξόχου Ἀλεξανδρινοῦ ὑπομνηματιστοῦ, ἐὰν δὲν συνέβαινε προσφάτως νὰ περιέλθῃ εἰς χεῖρας μας μέσῳ τῶν Ἀράβων, ἕνα ἄλλο ἔργον του, χαρακτῆρος ἀναλόγου πρὸς τὸν τῆς Συναγωγῆς. Πρόκειται περὶ σχολίου εἰς τὸ X Βιβλίον τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, τὸ ὁποῖον, ὅπως εἴδομεν (§ 37) ἀναφέρεται εἰς τοὺς ἀσυμμέτρους τοὺς προερχομένους ἐκ τῆς λύσεως διτετραγώνων ἐξισώσεων.

Ἠλπίζετο ὅτι ἐκ τοῦ ἔργου τούτου θὰ ἦτο δυνατὸν ν' ἀντληθοῦν νέα στοιχεῖα ἐπιτρέποντα μίαν ἀνασύνθεσιν τῆς ἱστορίας τῶν ἀσυμμέτρων μεγεθῶν ἐν γένει. Δυστυχῶς ὅμως τοῦτο δὲν προσεκόμισε παρὰ κάποιαν ἐπιβεβαίωσιν τῆς γνωστῆς μας ἤδη συμβολῆς τοῦ Θεαιτήτου εἰς τὴν ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου ἀναπτυσσομένην θεωρίαν εἰς τὸ X βιβλίον τῶν Στοιχείων.

Παρατηρητέον, ἐξ ἄλλου, ὅτι ἐνῷ εἰς τὴν Συναγωγὴν ὁ Πάππος δὲν εἶχε κάμει, οὐδὲ πόρρωθεν, νύξιν ἐπὶ τῶν φιλοσοφικῶν του πεποιθήσεων, εἰς τὸ ἐν λόγῳ ἔργον ἐμφανίζεται ὡς ὀπαδὸς τῆς Νεο-Πλατωνικῆς Σχολῆς. Καὶ ἐνῷ ἐκεῖ ἐτήρει ὕφος περιεκτικόν, ἐδῶ ἐκφράζεται διεξοδικῶς καὶ μὲ διδακτικὸν τόνον μετριώτερον. Ὅσον καὶ ἂν αὐτὸ ἠμπορεῖ νὰ ὀφείλεται εἰς τὴν φύσιν τοῦ ἀντικειμένου, καθῆκον μας εἶναι νὰ τὸ σημειώσωμεν, διὰ νὰ καταλήξωμεν εἰς τὸ συμπέρασμα, ὅτι αἱ νέαι σελίδες ποὺ προσετέθησαν προσφάτως εἰς τὰ ἄλλα ἔργα τοῦ Πάππου ἐλάχιστα ἢ οὐδόλως ἐπηύξησαν τὴν ἀρχικὴν φήμην, τῆς ὁποίας ἐπαξίως ἔχαιρεν.

Σερῆνος

60. Ὑφίστανται εἰς τὴν ἀρχαίαν μαθηματικὴν γραμματείαν δύο μικρὰ ἔργα, διαφυγόντα θαυματουργικῶς τὰς παγίδας, αἱ ὁποῖαι κατὰ τὸν μεσαίωνα ἠπείλουν γενικῶς τὰ χειρόγραφα. Ὁ συγγραφεὺς τούτων Σερῆνος δὲν ἀναφέρεται ἀπὸ τὸν Πάππον, οὔτε ἀπὸ ἄλλον γνωστὸν σχολιαστήν. Ἐνομίζετο δὲ ἐπὶ αἰῶνας ὅτι πατρίς του ἦτο ἡ Ἀντίσσα, πόλις τῆς νήσου Λέσβου, καταστραφεῖσα ὁλοσχερῶς ὑπὸ τῶν Ρωμαίων τὸ 167 π.Χ. Προσεκτικωτέρα ὅμως ἐξέτασις τῶν ἀξιοπίστων χειρογράφων ὡδήγησεν εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι οὗτος κατήγετο ἀπὸ τὴν αἰγυπτιακὴν πόλιν Ἀντινόην, τῆς ὁποίας τὰ θεμέλια εἶχε θέσει ὁ αὐτοκράτωρ Ἀδριανὸς τὸ ἔτος 122 μ.Χ.

μιαστικούς χαρακτηρισμούς μας, θ' ἀνατρέξῃ εἰς τὸ πρωτότυπον (τοῦ ὁποίου δυστυχῶς δὲν γνωρίζομεν καμμίαν ἔκδοσιν εἰς ζωντανὴν γλῶσσαν) [49], δὲν θὰ ἀντλήσῃ μόνον ἐξ αὐτοῦ πολυτίμους συμπληρωματικὰς γνώσεις ἐπὶ τῆς ἐξελίξεως τῆς ἑλληνικῆς γεωμετρίας, ἀλλὰ θὰ μάθῃ συγχρόνως πλῆθος τερπνῶν καὶ διδακτικῶν λεπτομερειῶν γύρω ἀπὸ τὰς μεθόδους ποὺ ἐχρησιμοποίουν οἱ ἀρχαῖοι εἰς τὴν ἔρευναν τοῦ ἀληθοῦς — ἐν τῷ πεδίῳ τῶν μαθηματικῶν — καὶ τὰ εὑρήματα ποὺ ἐπέτυχον μὲ αὐτάς.

Κατόπιν τῶν ὅσων ἐξετέθησαν, θὰ ἔπρεπε νὰ σταματήσωμεν ἐδῶ τὴν διατριβήν μας περὶ τοῦ ἐξόχου Ἀλεξανδρινοῦ ὑπομνηματιστοῦ, ἐὰν δὲν συνέβαινε προσφάτως νὰ περιέλθῃ εἰς χεῖρας μας μέσῳ τῶν Ἀράβων, ἕνα ἄλλο ἔργον του, χαρακτῆρος ἀναλόγου πρὸς τὸν τῆς Συναγωγῆς. Πρόκειται περὶ σχολίου εἰς τὸ Χ Βιβλίον τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, τὸ ὁποῖον, ὅπως εἴδομεν (§ 37) ἀναφέρεται εἰς τοὺς ἀσυμμέτρους τοὺς προερχομένους ἐκ τῆς λύσεως διτετραγώνων ἐξισώσεων.

Ἠλπίζετο ὅτι ἐκ τοῦ ἔργου τούτου θὰ ἦτο δυνατὸν ν' ἀντληθοῦν νέα στοιχεῖα ἐπιτρέποντα μίαν ἀνασύνθεσιν τῆς ἱστορίας τῶν ἀσυμμέτρων μεγεθῶν ἐν γένει. Δυστυχῶς ὅμως τοῦτο δὲν προσεκόμισε παρὰ κάποιαν ἐπιβεβαίωσιν τῆς γνωστῆς μας ἤδη συμβολῆς τοῦ Θεαιτήτου εἰς τὴν ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου ἀναπτυσσομένην θεωρίαν εἰς τὸ Χ βιβλίον τῶν Στοιχείων.

Παρατηρητέον, ἐξ ἄλλου, ὅτι ἐνῷ εἰς τὴν Συναγωγὴν ὁ Πάππος δὲν εἶχε κάμει, οὐδὲ πόρρωθεν, νῦξιν ἐπὶ τῶν φιλοσοφικῶν του πεποιθήσεων, εἰς τὸ ἐν λόγῳ ἔργον ἐμφανίζεται ὡς ὀπαδὸς τῆς Νεο-Πλατωνικῆς Σχολῆς. Καὶ ἐνῷ ἐκεῖ ἐτήρει ὕφος περιεκτικόν, ἐδῶ ἐκφράζεται διεξοδικῶς καὶ μὲ διδακτικὸν τόνον μετριώτερον. Ὅσον καὶ ἂν αὐτὸ ἠμπορεῖ νὰ ὀφείλεται εἰς τὴν φύσιν τοῦ ἀντικειμένου, καθῆκον μας εἶναι νὰ τὸ σημειώσωμεν, διὰ νὰ καταλήξωμεν εἰς τὸ συμπέρασμα, ὅτι αἱ νέαι σελίδες ποὺ προσετέθησαν προσφάτως εἰς τὰ ἄλλα ἔργα τοῦ Πάππου ἐλάχιστα ἢ οὐδόλως ἐπηύξησαν τὴν ἀρχικὴν φήμην, τῆς ὁποίας ἐπαξίως ἔχαιρεν.

Σερῆνος

60. Ὑφίστανται εἰς τὴν ἀρχαίαν μαθηματικὴν γραμματείαν δύο μικρὰ ἔργα, διαφυγόντα θαυματουργικῶς τὰς παγίδας, αἱ ὁποῖαι κατὰ τὸν μεσαίωνα ἠπείλουν γενικῶς τὰ χειρόγραφα. Ὁ συγγραφεὺς τούτων Σερῆνος δὲν ἀναφέρεται ἀπὸ τὸν Πάππον, οὔτε ἀπὸ ἄλλον γνωστὸν σχολιαστήν. Ἐνομίζετο δὲ ἐπὶ αἰῶνας ὅτι πατρίς του ἦτο ἡ Ἀντίσσα, πόλις τῆς νήσου Λέσβου, καταστραφεῖσα ὁλοσχερῶς ὑπὸ τῶν Ρωμαίων τὸ 167 π.Χ. Προσεκτικωτέρα ὅμως ἐξέτασις τῶν ἀξιοπίστων χειρογράφων ὡδήγησεν εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι οὗτος κατήγετο ἀπὸ τὴν αἰγυπτιακὴν πόλιν Ἀντινόην, τῆς ὁποίας τὰ θεμέλια εἶχε θέσει ὁ αὐτοκράτωρ Ἀδριανὸς τὸ ἔτος 122 μ.Χ.

Τὸ συμπέρασμα τοῦτο ἐπιτρέπει νὰ δεχθῶμεν, ὅτι ὁ Σερῆνος ὑπῆρξε μεταγενέστερος τοῦ Πάππου καὶ ἐξηγεῖ διατὶ οὐδεμία μνεία τοῦ ὀνόματός του γίνεται ἀπὸ τὸν Ἀλεξανδρινὸν γεωμέτρην.

Τὸ πρῶτον ἀπὸ τὰ δύο ἔργα, ποὺ ἐμνημονεύσαμεν, δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς συμπλήρωμα εἰς τὰ Κωνικὰ τοῦ Ἀπολλωνίου, ἀφοῦ θέτει ὡς σκοπὸν τὴν ἀπόδειξιν τῆς ταυτότητος τῶν τομῶν ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου μὲ τὰς γραμμὰς τὰς ὁποίας ὁ Περγαῖος ὀνομάζει ἐλλείψεις. Ὁ σκοπὸς οὗτος ἐπιτυγχάνεται πλήρως διὰ συλλογισμῶν ἁπλῶν, ἀλλ' αὐστηρῶν, συντεταγμένων κατὰ τὰ πρότυπα τῶν Ἑλλήνων γεωμετρῶν τῆς χρυσῆς περιόδου. Τὸ γεγονὸς δὲ ὅτι τὰ θεωρήματα τοῦ Σερήνου παρέχουν τὰ μέσα διὰ τὴν λύσιν μερικῶν ἐνδιαφερόντων προβλημάτων σχετικῶν μὲ τοὺς κώνους καὶ τοὺς κυλίνδρους τοὺς διερχομένους διὰ δεδομένης ἐλλείψεως ἐπηύξησε τὸ κῦρος τοῦ ἔργου του.

Ἡ δευτέρα ἐργασία τοῦ Σερήνου στρέφεται πρὸς ἀντικείμενον περισσότερον στοιχειῶδες, ἂν καὶ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἕνα κεφάλαιον τῆς γεωμετρικῆς θεωρίας τῶν μεγίστων καὶ ἐλαχίστων. Περιέχει πράγματι προτάσεις, αἱ ὁποῖαι διδάσκουν ποῖον εἶναι τὸ σχετικὸν μέγεθος τῶν τριγώνων, τὰ ὁποῖα παράγονται εἰς ὀρθὸν κυκλικὸν κῶνον, ὑπὸ ἐπιπέδων διερχομένων διὰ τῆς κορυφῆς του. Συμφώνως πρὸς δήλωσιν τοῦ ἰδίου τοῦ Σερήνου, μὲ τὸ θέμα τοῦτο οὐδεὶς τῶν πρὸ αὐτοῦ μαθηματικῶν εἶχεν ἀσχοληθῆ, καὶ εἶναι δίκαιον ν' ἀναγνωρίσωμεν ὅτι διεπραγματεύθη τοῦτο κατὰ τρόπον εὐτυχῆ καὶ ἐξαντλητικόν. Περιοριζόμεθα ν' ἀναφέρωμεν τὴν ὑπὸ τούτου γενομένην ἀνακάλυψιν, ἐν σχέσει μὲ τὰ ἐν λόγῳ ζητήματα, ὅτι ὁ ὀξυγώνιος κῶνος καὶ ὁ ἀμβλυγώνιος παρουσιάζουν διάφορον συμπεριφοράν.

Εἰς τὰς τελευταίας σελίδας τοῦ ἔργου του ὁ Σερῆνος ἐκθέτει σημαντικὸν ἀριθμὸν προτάσεων ἐπὶ τῶν ἐπιφανειῶν καὶ τῶν ὄγκων ὀρθῶν κυκλικῶν κώνων, περιωρισμένου ὅμως ἐνδιαφέροντος, καθ' ὅσον αἱ ἐν λόγῳ προτάσεις ἀποτελοῦν ἁπλᾶ πορίσματα τῶν θεμελιωδῶν ἐκφράσεων διὰ τὴν ἐπιφάνειαν καὶ τὸν ὄγκον τοῦ κώνου ἐκ περιστροφῆς.

Οἱ Σχολιασταί

61. Μὲ τὸν Σερῆνον κλείει ἡ σειρὰ τῶν ἐπιγόνων τῶν μεγάλων Ἑλλήνων γεωμετρῶν. Ἀλλὰ διὰ νὰ ἐξαντλήσωμεν τὸν κατάλογον τῶν συγγραφέων ἐκείνων, τῶν ὁποίων τὴν μνήμην δὲν κατώρθωσε νὰ ἐξαλείψῃ ὁ χρόνος, ἔχομεν ὑποχρέωσιν νὰ εἴπωμεν μερικὰς λέξεις διὰ τοὺς σχολιαστάς, τῶν ὁποίων ὁ ἀριθμὸς ἐπολλαπλασιάσθη, ἀφ' ὅτου ἡ Ἑλλὰς μαζὶ μὲ τὴν ἀνεξαρτησίαν ἔχασε καὶ τὸ ἐφευρετικὸν δαιμόνιον, τοὐλάχιστον εἰς τὸ πεδίον τῶν ἀκριβῶν ἐπιστημῶν (διότι εἰς ἄλλους τομεῖς οἱ ὑποταγέντες Ἕλληνες ἀπέβησαν διδάσκαλοι τῶν Ρωμαίων κατακτητῶν). Μερικοὶ

Τὸ συμπέρασμα τοῦτο ἐπιτρέπει νὰ δεχθῶμεν, ὅτι ὁ Σερῆνος ὑπῆρξε μεταγενέστερος τοῦ Πάππου καὶ ἐξηγεῖ διατὶ οὐδεμία μνεία τοῦ ὀνόματός του γίνεται ἀπὸ τὸν Ἀλεξανδρινὸν γεωμέτρην.

Τὸ πρῶτον ἀπὸ τὰ δύο ἔργα, ποὺ ἐμνημονεύσαμεν, δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς συμπλήρωμα εἰς τὰ Κωνικὰ τοῦ Ἀπολλωνίου, ἀφοῦ θέτει ὡς σκοπὸν τὴν ἀπόδειξιν τῆς ταυτότητος τῶν τομῶν ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου μὲ τὰς γραμμὰς τὰς ὁποίας ὁ Περγαῖος ὀνομάζει ἐλλείψεις. Ὁ σκοπὸς οὗτος ἐπιτυγχάνεται πλήρως διὰ συλλογισμῶν ἁπλῶν, ἀλλ' αὐστηρῶν, συντεταγμένων κατὰ τὰ πρότυπα τῶν Ἑλλήνων γεωμετρῶν τῆς χρυσῆς περιόδου. Τὸ γεγονὸς δὲ ὅτι τὰ θεωρήματα τοῦ Σερήνου παρέχουν τὰ μέσα διὰ τὴν λύσιν μερικῶν ἐνδιαφερόντων προβλημάτων σχετικῶν μὲ τοὺς κώνους καὶ τοὺς κυλίνδρους τοὺς διερχομένους διὰ δεδομένης ἐλλείψεως ἐπηύξησε τὸ κῦρος τοῦ ἔργου του.

Ἡ δευτέρα ἐργασία τοῦ Σερήνου στρέφεται πρὸς ἀντικείμενον περισσότερον στοιχειῶδες, ἂν καὶ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἕνα κεφάλαιον τῆς γεωμετρικῆς θεωρίας τῶν μεγίστων καὶ ἐλαχίστων. Περιέχει πράγματι προτάσεις, αἱ ὁποῖαι διδάσκουν ποῖον εἶναι τὸ σχετικὸν μέγεθος τῶν τριγώνων, τὰ ὁποῖα παράγονται εἰς ὀρθὸν κυκλικὸν κῶνον, ὑπὸ ἐπιπέδων διερχομένων διὰ τῆς κορυφῆς του. Συμφώνως πρὸς δήλωσιν τοῦ ἰδίου τοῦ Σερήνου, μὲ τὸ θέμα τοῦτο οὐδεὶς τῶν πρὸ αὐτοῦ μαθηματικῶν εἶχεν ἀσχοληθῆ, καὶ εἶναι δίκαιον ν' ἀναγνωρίσωμεν ὅτι διεπραγματεύθη τοῦτο κατὰ τρόπον εὐτυχῆ καὶ ἐξαντλητικόν. Περιοριζόμεθα ν' ἀναφέρωμεν τὴν ὑπὸ τούτου γενομένην ἀνακάλυψιν, ἐν σχέσει μὲ τὰ ἐν λόγῳ ζητήματα, ὅτι ὁ ὀξυγώνιος κῶνος καὶ ὁ ἀμβλυγώνιος παρουσιάζουν διάφορον συμπεριφοράν.

Εἰς τὰς τελευταίας σελίδας τοῦ ἔργου του ὁ Σερῆνος ἐκθέτει σημαντικὸν ἀριθμὸν προτάσεων ἐπὶ τῶν ἐπιφανειῶν καὶ τῶν ὄγκων ὀρθῶν κυκλικῶν κώνων, περιωρισμένου ὅμως ἐνδιαφέροντος, καθ' ὅσον αἱ ἐν λόγῳ προτάσεις ἀποτελοῦν ἁπλᾶ πορίσματα τῶν θεμελιωδῶν ἐκφράσεων διὰ τὴν ἐπιφάνειαν καὶ τὸν ὄγκον τοῦ κώνου ἐκ περιστροφῆς.

Οἱ Σχολιασταὶ

61. Μὲ τὸν Σερῆνον κλείει ἡ σειρὰ τῶν ἐπιγόνων τῶν μεγάλων Ἑλλήνων γεωμετρῶν. Ἀλλὰ διὰ νὰ ἐξαντλήσωμεν τὸν κατάλογον τῶν συγγραφέων ἐκείνων, τῶν ὁποίων τὴν μνήμην δὲν κατώρθωσε νὰ ἐξαλείψῃ ὁ χρόνος, ἔχομεν ὑποχρέωσιν νὰ εἴπωμεν μερικὰς λέξεις διὰ τοὺς σχολιαστάς, τῶν ὁποίων ὁ ἀριθμὸς ἐπολλαπλασιάσθη, ἀφ' ὅτου ἡ Ἑλλὰς μαζὶ μὲ τὴν ἀνεξαρτησίαν ἔχασε καὶ τὸ ἐφευρετικὸν δαιμόνιον, τοὐλάχιστον εἰς τὸ πεδίον τῶν ἀκριβῶν ἐπιστημῶν (διότι εἰς ἄλλους τομεῖς οἱ ὑποταγέντες Ἕλληνες ἀπέβησαν διδάσκαλοι τῶν Ρωμαίων κατακτητῶν). Μερικοὶ

ἐξ αὐτῶν εἶναι ἁπλοῖ ἑρμηνευταὶ ὑπὸ τὴν ταπεινοτέραν σημασίαν τῆς λέξεως, ἄλλοι ὅμως διήνθησαν τὰ κλασικὰ ἔργα μὲ ἱστορικὰς πληροφορίας, φιλοσοφικοὺς στοχασμοὺς καὶ μεθοδολογικὰς παρατηρήσεις, αἱ ὁποῖαι εἶχον ὡς ἀποτέλεσμα νὰ διατηρηθῇ ζωηρὸς ὁ σεβασμὸς πρὸς τοὺς κορυφαίους, νὰ διεγείρουν τὴν ἔφεσιν πρὸς τὰς μαθηματικὰς ἐρεύνας, ἔτι δὲ νὰ ἐνδυναμώσουν τὰ πνεύματα πρὸς ἐπιτυχῆ ἀπασχόλησιν μὲ αὐτάς.

Μεταξὺ τῶν νέων τούτων συγγραφέων, τοὺς ὁποίους πρόκειται νὰ ἐξετάσωμεν, τὴν πρώτην θέσιν θὰ παραχωρήσωμεν εἰς τὸν Γέμινον, ἢ Γεμῖνον γεννηθέντα εἰς τὴν Ρόδον, πιθανῶς τὸ 70 π.Χ., ὁ ὁποῖος φέρεται συγγράψας ἕνα ἔργον μακρᾶς πνοῆς ὡς καὶ ἄλλα μικρότερα γύρω ἀπὸ τὴν φιλοσοφίαν τῶν μαθηματικῶν.

Πρέπει ἄραγε νὰ ταυτίσωμεν τὸν μαθηματικὸν τοῦτον μὲ τὸν ὁμώνυμον συγγραφέα ἑνὸς μετρίου ἔργου περιγραφικῆς ἀστρονομίας, ὑφισταμένου μέχρι σήμερον; Ἡ ταύτισις τῶν δύο προσώπων εἶχε γίνει ἄνευ συζητήσεως δεκτὴ μέχρι τῶν τελευταίων χρόνων ἀπὸ ὅλους ἐκείνους, οἱ ὁποῖοι ἠσχολήθησαν μὲ τὴν πνευματικὴν ἱστορίαν τῆς Ἑλλάδος. Κατόπιν ὅμως τῶν ἀποτελεσμάτων τῶν πλέον προσφάτων μελετῶν, ἡ ταύτισις αὕτη δὲν δύναται νὰ γίνῃ δεκτὴ κατὰ τρόπον ὁριστικόν, διότι δὲν εἶναι ἀβάσιμος ἡ ὑποψία ὅτι ὁ Γέμινος ὁμοιάζει πρὸς τὰ σχήματα ἐκεῖνα, τὰ ἀτελῶς χαραχθέντα, τὰ ὁποῖα ὁρώμενα μὲ ἔντονον προσοχήν, παρουσιάζουν τὸ περίεργον φαινόμενον τοῦ αἰφνιδίου διχασμοῦ.

Κατὰ χρονολογικὴν σειράν, τὸν Γέμινον ἀκολουθεῖ ὁ Θέων ὁ Σμυρναῖος, ζήσας τὸν II αἰῶνα μ.Χ. Ὡς ἀποτέλεσμα μιᾶς τῶν ἀναδρομῶν ἐκείνων ποὺ εἶναι συχναὶ εἰς τὴν ἱστορίαν τῆς ἀνθρωπίνης σκέψεως, αἱ θεωρίαι τοῦ Πυθαγόρου καὶ τοῦ Πλάτωνος ἀνέκτησαν, κατὰ τὴν ἐποχὴν αὐτὴν τὴν γενικὴν εὔνοιαν εἰς τοιοῦτον βαθμόν, ὥστε ὁ Θέων ἔκρινε σκόπιμον νὰ συγγράψῃ ἕνα ἔργον, τοῦ ὁποίου ὁ σκοπὸς γίνεται φανερὸς ἀπὸ τὸν τίτλον του: «Θέωνος Σμυρναίου Πλατωνικοῦ τῶν κατὰ τὸ Μαθηματικὸν χρησίμων εἰς τὴν Πλάτωνος ἀνάγνωσιν».

Καθ' ἑαυτὸ τὸ ἔργον εἶναι μικροῦ ἐπιστημονικοῦ ἐνδιαφέροντος. Ἀποτελεῖ ὅμως πολύτιμον πηγὴν πληροφοριῶν ἐπὶ τῶν πυθαγορείων μελετῶν γύρω ἀπὸ τὴν Ἀριθμητικήν, καθὼς καὶ ἐπὶ τῆς ἀστρονομικῆς ἐπιστήμης τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων.

62. Τῆς Νεο - Πλατωνικῆςσ χολῆς σημαντικὸν μέλος ὑπῆρξεν ὁ Πρόκλος, τοῦ ὁποίου τὸ ὄνομα ἔχομεν συχνότατα ἀναφέρει, ὡς πλουσίαν πηγὴν πληροφοριῶν, καὶ περὶ τοῦ ὁποίου πρέπει τώρα, μὲ τὴν δυνατὴν συντομίαν, νὰ ὁμιλήσωμεν. Γεννηθεὶς εἰς τὸ Βυζάντιον κατὰ τὸ 410 μ.Χ., ὑπῆρξε μαθητὴς καὶ κατόπιν διάδοχος τοῦ Συριανοῦ εἰς τὴν διεύθυνσιν τῆς Ἀκαδημίας, ἀνασυσταθεῖσαν εἰς τὰς Ἀθήνας χάρις εἰς τοὺς θαυμα-

στάς τοῦ θείου φιλοσόφου, διετήρησε δὲ τὸ ἀξίωμα τοῦτο μέχρι τῆς ἡμέρας (17 Ἀπριλίου 485) καθ' ἣν ἐπλήγη ἀπὸ τὸ δρέπανον τοῦ θανάτου.

Ἡ θέσις τὴν ὁποίαν, κατὰ γενικὴν συγκατάθεσιν, κατέλαβεν εἰς τὴν ἱστορίαν τῆς ἐπιστήμης, ἀποτελεῖ ἐπαξίαν ἐπιβράβευσιν διὰ τὸ εὐσυνείδητον ἔργον του Σχόλια εἰς τὸ Ι Βιβλίον τοῦ Εὐκλείδου, τὸ ὁποῖον καθιστᾶ φανερὰν τὴν ζημίαν τῆς ἐπιστήμης ἐκ τῆς ἀπωλείας τῶν ὑπολοίπων σχολίων του[41].

Κατὰ τὴν ἀνάπτυξιν τοῦ προγράμματός του ὁ Πρόκλος ἔχει ὁδηγὸν τὸν Πλάτωνα, ἀντλεῖ ὅμως ἀφθόνως ἀπὸ ὅλους ἐκείνους, οἱ ὁποῖοι ἦσαν εἰς θέσιν νὰ τοῦ παράσχουν βοήθειαν καὶ πρὸ πάντων ἀπὸ τὸν Γέμινον, κατορθώσας τοιουτοτρόπως νὰ παρουσιάσῃ τεράστιον ὄγκον πολυτίμων ἱστορικῶν καὶ βιβλιογραφικῶν πληροφοριῶν, εἰς τὰς ὁποίας ἔγκειται καθ' ἡμᾶς ἡ διαρκὴς ἀξία τῶν μόχθων του.

Μὴ δυνάμενοι νὰ εἰσέλθωμεν ἐδῶ εἰς λεπτομερείας, περιοριζόμεθα μόνον εἰς τὸ νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι τὸ ἱστορικὸν διάγραμμα, ποὺ ἐχάραξεν ὁ Πρόκλος, ἐπὶ τῆς ἐξελίξεως τῆς ἑλληνικῆς γεωμετρίας ὑπῆρξε τὸ πλαίσιον, ἐντὸς τοῦ ὁποίου ἐκινήθησαν ὅλοι οἱ μετέπειτα ἱστορικοὶ τῆς αὐτῆς περιόδου. Προστίθεται ὅτι, ἐὰν διὰ νὰ κατανοήσωμεν καὶ περιγράψωμεν ἕνα συγγραφέα εἶναι οὐσιῶδες νὰ συμμεριζώμεθα τὰς ἰδέας του, ὁ Πρόκλος δὲν ἦτο πράγματι ὁ ἐνδεδειγμένος νὰ διαδώσῃ εἰς τὸν κόσμον τὸν εὐκλείδειον λόγον. Καὶ τοῦτο διότι ἐνῷ ὁ κορυφαῖος Ἀλεξανδρινὸς εἶχεν ἐκφέρει ἀπόφασιν διαζυγίου μεταξὺ μαθηματικῶν καὶ φιλοσοφίας, ὁ Πρόκλος φαίνεται διατεθειμένος νὰ ἐπαναφέρῃ τὴν συμφιλίωσιν. Ἐὰν τώρα συγκρίνωμεν τὴν καταπληκτικὴν ἀνθοφορίαν ποὺ ἐστεφάνωσε τοὺς κόπους τοῦ πρώτου μὲ τὴν ἀπογοητευτικὴν στειρότητα τῶν χρόνων ποὺ ἠκολούθησαν τὸν δεύτερον, εἴμεθα ἠναγκασμένοι νὰ συμπεράνωμεν ὅτι, πρὸς τὸ συμφέρον τῆς ἐπιστήμης, διετηρήθησαν πιστῶς αἱ κατευθυντήριοι γραμμαί, τὰς ὁποίας ἐχάραξεν ὁ πρῶτος.

Τὸν Πρόκλον διεδέχθη ὡς ἀρχηγὸς τῆς Νεο - Πλατωνικῆς σχολῆς ὁ ἐκ τῆς Φλαβίας Νεαπόλεως τῆς Παλαιστίνης καταγόμενος Μαρῖνος ὅστις φέρεται συγγράψας βιογραφίαν τοῦ προκατόχου του καὶ ὡς ἐκδώσας τὰ Δεδομένα τοῦ Εὐκλείδου (§ 96), συνοδευόμενα μὲ ἐκτενῆ ἰδικά του προλεγόμενα.

Μετ' αὐτὸν ἀναφέρεται ὁ Ἰσίδωρος ὁ Μιλήσιος, ἕνας ἐκ τῶν δύο ἀρχιτεκτόνων τῆς Ἁγίας Σοφίας, καὶ διδάσκαλος τοῦ Δαμασκίου, τοῦ συγγράψαντος ὅπως εἴδομεν (§ 52), τὸ οὕτω λεγόμενον XV Βιβλίον τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου. Ὁ Δαμάσκιος εἶχεν ἐπίσης διδάσκαλον τὸν Θέωνα τὸν Ἀλεξανδρέα (320 - 395 μ.Χ.), ἄλλον ἐξέχοντα ἐκδότην καὶ ὑπομνηματιστὴν τοῦ Εὐκλείδου, πατέρα τῆς Ὑπατίας (375 - 415 μ.Χ). Η τελευταία διαπρέψασα εἰς τὰ μαθηματικά, ἐδίδαξεν εἰς τὴν Ἀλεξάν-

δρειαν, ὅπου καὶ ἐφονεύθη βαναύσως τὸ 415 μ.Χ. εἰς μίαν ἀπὸ τὰς αἱματηρὰς ἐκείνας ἐπαναστατικὰς ἐκδηλώσεις, μὲ τὰς ὁποίας ἡ πνέουσα τὰ λοίσθια εἰδωλολατρία ἐζήτει νὰ φράξῃ τὸν δρόμον εἰς τὴν θριαμβευτικὴν πορείαν τοῦ Χριστιανισμοῦ.

63. Περίπου κατὰ τὴν ἰδίαν ἐποχὴν ἤνθισεν ἕνας ἄλλος πολλοῦ λόγου ἄξιος σχολιαστής, ὁ Εὐτόκιος, ἀνήκων εἰς μίαν ἐξέχουσαν οἰκογένειαν τῆς Ἀσκάλωνος (ἐν Παλαιστίνῃ). Τούτου περιεσώθησαν μερικαὶ μέτριαι ἐπεξηγηματικαὶ διασαφήσεις εἰς τὰ ἔργα τοῦ Ἀρχιμήδους περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου, κύκλου μέτρησις καὶ περὶ ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν, ὡς ἐπίσης καὶ εἰς τὰ τέσσαρα πρῶτα βιβλία τῶν Κωνικῶν τοῦ Ἀπολλωνίου. Μὲ αὐτὰ δὲν προστίθεται τίποτε τὸ οὐσιῶδες εἰς τὴν ἐπιστημονικήν μας κληρονομίαν, ἀλλὰ δὲν πρέπει νὰ λησμονοῦνται καὶ νὰ παραθεωροῦνται ἀπὸ ἐκεῖνον, ὁ ὁποῖος φιλοδοξεῖ νὰ γνωρίσῃ κατὰ βάθος καὶ ὑφ' ὅλας τὰς ἐπόψεις τὴν ἀρχαίαν γεωμετρίαν.

Συγχρόνως μὲ τὸν προαναφερθέντα Δαμάσκιον, ἐδίδαξεν εἰς τὰς Ἀθήνας καὶ ὁ γνωστότατος Σιμπλίκιος, τοῦ ὁποίου ἡ φήμη στηρίζεται ὄχι εἰς τὰ εἰς Εὐκλείδην σχόλιά του, τῶν ὁποίων ἐλάχιστα μόνον ἴχνη ὑφίστανται σήμερον, ἀλλὰ πρὸ πάντων εἰς τὰ περίφημα σχόλιά του ἐπὶ τῶν ἔργων τοῦ Ἀριστοτέλους. Ἡ ἐν Ἀθήναις διδασκαλία του, ἀσυμβίβαστος πρὸς τὴν πολιτικὴν τοῦ Ἰουστινιανοῦ ἔναντι τῆς νέας θρησκείας, διεκόπη, ὅταν τὸ 529 μ.Χ. ὁ αὐτοκράτωρ διέταξε τὸ κλείσιμον τοῦ Ἀθηναϊκοῦ Πανεπιστημίου μὲ τὸν σκοπὸν νὰ ἐμποδίσῃ τὴν περαιτέρω ὑπόθαλψιν καὶ διάδοσιν σπερμάτων τῆς εἰδωλολατρίας. Οὕτω ἐσβέσθη καὶ ὁ τελευταῖος σπινθήρ, διὰ τοῦ ὁποίου ἐμαρτυρεῖτο ὅτι εἰς τὴν πατρίδατου Θαλοῦ δὲν εἶχεν ἀκόμη ἐγκαταλειφθῆ ἡ ἐπιστημονικὴ ἔρευνα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

ΤΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΝ ΕΡΓΟΝ ΤΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΑΣΤΡΟΝΟΜΩΝ ΚΑΙ ΓΕΩΔΑΙΤΩΝ

64. Εἰς ὅλους τοὺς λαούς, ποὺ ἔφθασαν εἰς ἀξιόλογον βαθμὸν πολιτισμοῦ, καὶ εἰς ὅλας τὰς ἐποχάς, ἀπὸ τῶν ἀρχαιοτέρων μέχρι τῶν νεωτέρων, ἡ μελέτη τῶν φυσικῶν φαινομένων, διεξαγομένη μὲ εὐρύτητα σκέψεως καὶ αὐστηρότητα μεθόδων, ὑπῆρξεν ἰσχυρότατος μοχλὸς διὰ τὴν καθαρὰν ἐπιστημονικὴν ἔρευναν, τὸ γενικὸν δὲ αὐτὸ φαινόμενον ἐπαληθεύεται κατ' ἐξοχὴν εἰς τοὺς Ἕλληνας. Διὰ νὰ καταστήσωμεν σαφὲς τὸ πλαίσιον τῶν συμβολῶν, ποὺ ἐγένοντο εἰς τὰ μαθηματικὰ ἀπὸ τοὺς διανοουμένους τῆς Ἑλλάδος, εἶναι ἀπαραίτητον νὰ ἐξετάσωμεν ἀκόμη τὰ γραπτὰ ἐκείνων ἐξ αὐτῶν, οἱ ὁποῖοι ᾐσθάνθησαν τὴν ἕλξιν τῆς εὐγενοῦς φιλοδοξίας ν' ἀνακαλύψουν τὴν δομὴν καὶ τὸν μηχανισμὸν τοῦ κόσμου ἢ τοὐλάχιστον τῆς μετριωτέρας, ἀλλ' οὐχὶ ὀλιγώτερον γονίμου φιλοδοξίας νὰ προσδιορίσουν τὸ μέγεθος καὶ τὸ σχῆμα τοῦ πλανήτου μας.

Ἡ ἔρευνα, τὴν ὁποίαν προτιθέμεθα νὰ κάμωμεν ἐν συνεχείᾳ, θὰ μᾶς ἐπιτρέψῃ νὰ προσδιορίσωμεν ὁποῖα νέα γεωμετρικὰ σχήματα ἐμελετήθησαν, ὁποῖαι νέαι ἰδιότητες τοῦ γεωμετρικοῦ διαστήματος ἀνεκαλύφθησαν, ὁποῖαι νέαι μέθοδοι ἐδοκιμάσθησαν. Διὰ τοῦ τρόπου τούτου θὰ λάβωμεν ἀφορμὴν νὰ προσθέσωμεν νέα ὀνόματα εἰς τὸν πίνακα τῶν μεγάλων προσωπικοτήτων ποὺ ἐνεφανίσθησαν εἰς τὸ προσκήνιον τοῦ ἑλληνικοῦ κόσμου, ἀκόμη δὲ νὰ ἐπισημάνωμεν μερικὰς ἀπόψεις, αἱ ὁποῖαι μέχρι τοῦδε παρέμενον εἰς τὴν σκιάν, ἐνῷ ἀφοροῦν σημαντικὰς ἐκδηλώσεις τῆς ἐπιστημονικῆς δραστηριότητος τῶν κορυφαίων ἐκείνων ἀνδρῶν, περὶ τῶν ὁποίων ἔχομεν ἤδη ὁμιλήσει.

Ἡ ἑλληνικὴ ἀστρονομία ἀπὸ τοῦ Θαλοῦ μέχρι τοῦ Κλαυδίου Πτολεμαίου

65. Διὰ νὰ ἐπιτύχωμεν τὸν προεκτεθέντα σκοπὸν εἶναι σκόπιμον νὰ ἐπιστρέψωμεν εἰς τὸ λυκαυγὲς τοῦ ἑλληνικοῦ πολιτισμοῦ, ἀφοῦ, καλῶς ἢ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

ΤΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΝ ΕΡΓΟΝ ΤΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΑΣΤΡΟΝΟΜΩΝ ΚΑΙ ΓΕΩΔΑΙΤΩΝ

64. Εἰς ὅλους τοὺς λαούς, ποὺ ἔφθασαν εἰς ἀξιόλογον βαθμὸν πολιτισμοῦ, καὶ εἰς ὅλας τὰς ἐποχάς, ἀπὸ τῶν ἀρχαιοτέρων μέχρι τῶν νεωτέρων, ἡ μελέτη τῶν φυσικῶν φαινομένων, διεξαγομένη μὲ εὐρύτητα σκέψεως καὶ αὐστηρότητα μεθόδων, ὑπῆρξεν ἰσχυρότατος μοχλὸς διὰ τὴν καθαρὰν ἐπιστημονικὴν ἔρευναν, τὸ γενικὸν δὲ αὐτὸ φαινόμενον ἐπαληθεύεται κατ' ἐξοχὴν εἰς τοὺς Ἕλληνας. Διὰ νὰ καταστήσωμεν σαφὲς τὸ πλαίσιον τῶν συμβολῶν, ποὺ ἐγένοντο εἰς τὰ μαθηματικὰ ἀπὸ τοὺς διανοουμένους τῆς Ἑλλάδος, εἶναι ἀπαραίτητον νὰ ἐξετάσωμεν ἀκόμη τὰ γραπτὰ ἐκείνων ἐξ αὐτῶν, οἱ ὁποῖοι ᾐσθάνθησαν τὴν ἕλξιν τῆς εὐγενοῦς φιλοδοξίας ν' ἀνακαλύψουν τὴν δομὴν καὶ τὸν μηχανισμὸν τοῦ κόσμου ἢ τοὐλάχιστον τῆς μετριωτέρας, ἀλλ' οὐχὶ ὀλιγώτερον γονίμου φιλοδοξίας νὰ προσδιορίσουν τὸ μέγεθος καὶ τὸ σχῆμα τοῦ πλανήτου μας.

Ἡ ἔρευνα, τὴν ὁποίαν προτιθέμεθα νὰ κάμωμεν ἐν συνεχείᾳ, θὰ μᾶς ἐπιτρέψῃ νὰ προσδιορίσωμεν ὁποῖα νέα γεωμετρικὰ σχήματα ἐμελετήθησαν, ὁποῖαι νέαι ἰδιότητες τοῦ γεωμετρικοῦ διαστήματος ἀνεκαλύφθησαν, ὁποῖαι νέαι μέθοδοι ἐδοκιμάσθησαν. Διὰ τοῦ τρόπου τούτου θὰ λάβωμεν ἀφορμὴν νὰ προσθέσωμεν νέα ὀνόματα εἰς τὸν πίνακα τῶν μεγάλων προσωπικοτήτων ποὺ ἐνεφανίσθησαν εἰς τὸ προσκήνιον τοῦ ἑλληνικοῦ κόσμου, ἀκόμη δὲ νὰ ἐπισημάνωμεν μερικὰς ἀπόψεις, αἱ ὁποῖαι μέχρι τοῦδε παρέμενον εἰς τὴν σκιάν, ἐνῷ ἀφοροῦν σημαντικὰς ἐκδηλώσεις τῆς ἐπιστημονικῆς δραστηριότητος τῶν κορυφαίων ἐκείνων ἀνδρῶν, περὶ τῶν ὁποίων ἔχομεν ἤδη ὁμιλήσει.

Ἡ ἑλληνικὴ ἀστρονομία ἀπὸ τοῦ Θαλοῦ μέχρι τοῦ Κλαυδίου Πτολεμαίου

65. Διὰ νὰ ἐπιτύχωμεν τὸν προεκτεθέντα σκοπὸν εἶναι σκόπιμον νὰ ἐπιστρέψωμεν εἰς τὸ λυκαυγὲς τοῦ ἑλληνικοῦ πολιτισμοῦ, ἀφοῦ, καλῶς ἢ

κακῶς, ἐκεῖνος ὁ ὁποῖος ἀπεκλήθη «πατὴρ τῆς ἑλληνικῆς ἀστρονομίας» εἶναι ὁ Θαλῆς ὁ Μιλήσιος. Τὸ τιμητικὸν αὐτὸ ἐπίθετον ἀπεδόθη πιθανῶς εἰς τὸν σοφὸν τῆς Μιλήτου «ἀρχαιόθεν», εἰς ἀνάμνησιν τῆς περιφήμου ἐκείνης ἐκλείψεως, τὴν ὁποίαν εἶχεν ὁ ἴδιος προβλέψει (§ 19). Ἀλλὰ καὶ οἱ νεώτεροι δὲν ἐδίστασαν νὰ τὸ διατηρήσουν, ἀναγνωρίζοντες ὅτι ἐν τῷ προσώπῳ τοῦ Θαλοῦ ἔλαβε χώραν μία μετάβασις ἀπὸ τῆς λαϊκῆς κοσμογραφίας, τῆς ὁποίας τὴν μνήμην διέσωσαν τὰ ποιήματα τοῦ Ὁμήρου καὶ τοῦ Ἡσιόδου, εἰς μίαν, ἔστω καὶ ἐμβρυώδη, ἀστρονομικὴν ἐπιστήμην.

Ἡ φυσικὴ ῥοπή, τὴν ὁποίαν ἐξεδήλωσεν ὁ ἱδρυτὴς τῆς Ἰωνικῆς Σχολῆς, πρὸς παρατήρησιν καὶ μελέτην τῶν οὐρανίων φαινομένων ἀπαντᾶται καὶ εἰς τοὺς διαδόχους του Ἀναξίμανδρον καὶ Ἀναξιμένην, χάρις εἰς τοὺς ὁποίους οἱ Ἕλληνες ἐξοικειώθησαν βαθμηδὸν μὲ τὴν ἰδέαν ὅτι ἡ Γῆ ἦτο ἕνα περιωρισμένων διαστάσεων στερεόν, αἰωρούμενον ἐλευθέρως εἰς τὸ διάστημα. Πάντως ὁ ἐπιστήμων, ὁ ὁποῖος καθορίζει τὴν μετάβασιν τῆς ἀστρονομίας ἀπὸ τοῦ μεταφυσικοῦ εἰς τὸ ἐπιστημονικὸν στάδιον εἶναι ἐκεῖνος, εἰς τὸν ὁποῖον ὀφείλεται ἡ ἀνάλογος μεταμόρφωσις τῆς γεωμετρίας, τουτέστιν ὁ Πυθαγόρας ὁ Σάμιος (§ 22).

Οὗτος πράγματι ἐδίδαξεν εἰς τοὺς μαθητάς του, ὅτι ἡ Γῆ εἶναι ἕνα σφαιρικὸν σῶμα μὲ κέντρον σταθερόν, ὅτι εἶναι κατοικήσιμος ἀκόμη καὶ εἰς τὸ ἡμισφαίριον τὸ ἀντικείμενον πρὸς ἐκεῖνο, ἐπὶ τοῦ ὁποίου εὑρίσκετο ἡ Μεγάλη Ἑλλὰς (Magna Grecia), ὅτι διαιρεῖται εἰς 5 ζώνας καὶ ὅτι οἱ πλανῆται εἶναι ἐμψυχωμένοι μὲ ἰδίας κινήσεις ἐκ Δυσμῶν πρὸς Ἀνατολάς. Τὸ οὕτω διαμορφωθὲν κοσμικὸν σύστημα ἐπὶ πολλοὺς αἰῶνας ἐθεωρεῖτο τόσον ἱκανοποιητικόν, ὥστε εἶχεν υἱοθετηθῆ γενικῶς καθ' ὅλην τὴν μακρὰν χρονικὴν περίοδον ποὺ διέρρευσεν ἀπὸ τοῦ Πλάτωνος μέχρι τοῦ Dante, ὅπως ἀποδεικνύεται ἀπὸ τὸν διάλογον τοῦ πρώτου, τὸν τιτλοφορούμενον **Τίμαιος**, καὶ ἀπὸ τὸ Ἆσμα XXII (στ. 133 - 150) τοῦ τρίτου μέρους τῆς **Θείας Κωμῳδίας**.

Ὅταν ἐχάθη ὁ μέγας φιλόσοφος τῆς Σάμου καὶ διεσκορπίσθησαν τὰ μέλη τῆς Πυθαγορείου κοινότητος, οἱ Ἕλληνες δὲν ἀπέθεσαν τὴν τήβεννον τῆς ἐπιστημονικῆς ἐρεύνης, οὔτε παρητήθησαν τοῦ πόθου νὰ δώσουν ἐξήγησιν εἰς τὴν πορείαν τῶν ὅσων συνέβαινον εἰς τὸν οὐρανόν. Ἀπόδειξις τούτου εἶναι τὸ γεγονὸς ὅτι ἕνας σύγχρονος τοῦ Σωκράτους, ὁ Ταραντῖνος **Φιλόλαος**, ἐτροποποίησε τὸ πυθαγόρειον σύστημα πρὸς μίαν κατεύθυνσιν, ἡ ὁποία δὲν εἶναι τίποτε ὀλιγώτερον ἀπὸ μία στροφὴ πρὸς τὸ Κοπερνίκειον σύστημα.

Ἔπειτα ἀπ' αὐτόν, τὸ κίνημα πρὸς τὴν κατεύθυνσιν ταύτην ἐτονώθη κατὰ τρόπον ἐντυπωσιακόν, ὥστε κατὰ τὴν ἐποχὴν τοῦ Πλάτωνος, οἱ Ἕλληνες εἶχον προχωρήσει τόσον πολύ, ὥστε πολὺ ὀλίγος δρόμος ὑπε-

λείπετο εἰς αὐτοὺς διὰ νὰ γίνουν κύριοι τῆς γενικῆς ἐννοίας τῆς «ἡλιοκεντρικῆς κινήσεως τῶν πλανητῶν». Καὶ εἶναι πρὸς δόξαν των, ὅτι κατώρθωσαν, ἔπειτα ἀπὸ πολὺ σύντομον χρονικὸν διάστημα, νὰ διανύσουν καὶ τὸ τελευταῖον τοῦτο στάδιον τῆς ὁδοῦ. Ἡ μεγαλυτέρα τιμὴ διὰ τὸ ἀξιομνημόνευτον τοῦτο ἐπίτευγμα ἐπεφυλάσσετο εἰς ἕνα μαθηματικόν, σύγχρονον τοῦ Ἀρχιμήδους (ἴσως ὀλίγον προγενέστερον), Ἀρίσταρχον τὸν Σάμιον, τὸν «Κοπέρνικον τῆς Ἀρχαιότητος».

Δὲν ὑφίσταται πλέον (οὔτε καὶ εἶναι βέβαιον ὅτι ἐγράφη ποτὲ) τὸ ἔργον, εἰς τὸ ὁποῖον ὁ Ἀρίσταρχος ἐπεχείρησε νὰ φέρῃ μίαν ἐπανάστασιν εἰς τὴν ἀστρονομίαν τῆς ἐποχῆς του, ἔφθασεν ὅμως μέχρις ἡμῶν ἕνα μικρὸν ἔργον «περὶ τῶν μεγεθῶν καὶ τῶν ἀποστάσεων τοῦ ἡλίου καὶ τῆς σελήνης», τὸ ὁποῖον, ἂν διὰ τὰ ἀριθμητικά του ἐξαγόμενα δὲν εἶναι ἄξιον νὰ καταλάβῃ σήμερον θέσιν εἰς τὴν βιβλιοθήκην ἑνὸς ἀστρονόμου, διὰ τὸ σύνολον ὅμως τῶν μαθηματικῶν γνώσεων, τὰς ὁποίας συγκεντρώνει ἢ ἀποκαλύπτει, ὡς καὶ διὰ τὴν αὐστηρὰν λογικὴν συνοχὴν τῶν μερῶν, εἶναι ἄξιον νὰ συμπαρίσταται τιμητικῶς πλησίον τῶν καλλιτέρων ἔργων τῆς ἐποχῆς του. Δὲν ἀρκεῖ ἄλλωστε, εἰς ἔνδειξιν τῆς ἀξίας του, τὸ γεγονός, ὅτι ἐξ αὐτοῦ ἤντλησεν ὁ Ἀρχιμήδης τὰς ἀστρονομικὰς βάσεις τῶν ὑπολογισμῶν (§ 80), τοὺς ὁποίους ἐκθέτει εἰς τὸ ἔργον του «Ψαμμίτης;»

66. Φαίνεται ὅτι οἱ καιροὶ δὲν ἦσαν ἀκόμη ὥριμοι διὰ μίαν καινοτομίαν, ὅπως αὐτὴ τὴν ὁποίαν ἐφαντάσθη ὁ Ἀρίσταρχος καὶ ἡ ὁποία, ἐκ πρώτης ὄψεως, ἔρχεται εἰς ἀντίθεσιν πρὸς τὰς μαρτυρίας τῶν αἰσθήσεων. Τὸ σύστημα, ποὺ ὠνομάσθη ἀργότερα Κοπερνίκειον, ἐγκατελείφθη, διὰ τοῦτο, πολὺ γρήγορα, διὰ νὰ γίνῃ δεκτὸν «τὸ σύστημα τῶν ἐκκέντρων καὶ ἐπικύκλων», προϊόν, ὡς εἰκάζεται, τῆς φαντασίας τοῦ ἐκ Πέργης Ἀπολλωνίου. Τὸ τελευταῖον παρουσιάζετο προσφορώτερον εἰς τὴν ἀναπαράστασιν τῶν οὐρανίων φαινομένων καὶ εἰς τὴν κατάστρωσιν τῶν σχετικῶν ὑπολογισμῶν, ἐσέβετο δὲ ἀπολύτως τὴν θεμελιώδη ἀρχὴν ὅλων τῶν ἀστρονομικῶν συστημάτων ποὺ ἐπροτάθησαν ἀπὸ τοῦ Πυθαγόρου μέχρι τοῦ Κοπερνίκου, δηλαδὴ «νὰ μὴ θίγεται δι' αὐτῶν παντάπασι τὸ κάλλος καὶ ἡ ἁπλότης τῆς δημιουργίας». Τὸ ἀπολλώνειον σύστημα (ἐπὶ τῶν λεπτομερειῶν τοῦ ὁποίου δὲν δυνάμεθα ἐδῶ νὰ διατρίψωμεν) διὰ νὰ ἐκτεθῇ, ἀπαιτεῖ εὐρεῖαν γνῶσιν τῶν σχέσεων, αἱ ὁποῖαι ὑφίστανται μεταξὺ τῶν σχημάτων, τῶν χαρασσομένων ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας μιᾶς σφαίρας. Ἡ γνῶσις τῶν σχέσεων τούτων εἶναι ἀπαραίτητος ἀκόμη καὶ εἰς ἐκεῖνον, ὁποῖος θὰ ἐπιχειρήσῃ ν' ἀντιμετωπίσῃ τὸ περίφημον πρόβλημα, ποὺ ἐπρότεινεν ὁ Πλάτων, ἐκθέτων τὰς κοσμολογικὰς ἰδέας τῶν Πυθαγορείων, ἤτοι τὸ πρόβλημα τῆς εὑρέσεως συστήματος κινήσεων τῶν ἄστρων, συμ-

φώνου πρὸς τὰς ἀστρονομικὰς παρατηρήσεις (σῴζοντος τὰ φαινόμενα, ὅπως ἔλεγον οἱ ἀρχαῖοι).

Εἰς τὴν λύσιν τοῦ ὡραίου αὐτοῦ γεωμετρικο-μηχανικοῦ προβλήματος ἐπεδόθη ἕνας δεινὸς μαθηματικός, τὸν ὁποῖον ἐγνωρίσαμεν ἤδη (§ 31), ὁ Εὔδοξος ὁ Κνίδιος. Οὗτος κατέληξεν εἰς τὸ περίφημον «σύστημα τῶν ὁμοκέντρων σφαιρῶν», τὸ ὁποῖον, ἀφ' ὅτου ὁ G. Schiaparelli ἐδίδαξε τὸν τρόπον τῆς κατανοήσεως καὶ ἀξιολογήσεώς του, ηὔξησεν εἰς ὑπέρμετρον βαθμὸν τὴν φήμην ἐκείνου ὁ ὁποῖος ἐπρολείανε τὴν ὁδὸν εἰς τὸν Ἀρχιμήδη διὰ τὴν πραγματοποίησιν τῶν ἀνεκτιμήτων ἀνακαλύψεών του.

Εἶναι ἀλλότριον πρὸς τὸν σκοπόν μας νὰ ἐκθέσωμεν ἐδῶ τὸ νέον αὐτὸ ἀστρονομικὸν σύστημα. Ὀφείλομεν ὅμως νὰ ἐξάρωμεν τὴν μεγάλην οἰκειότητα τοῦ ἐφευρέτου μὲ τὴν «σφαιρικὴν γεωμετρίαν» (εἰδικὸν κλάδον, ὀνομαζόμενον ὑπὸ τῶν ἀρχαίων σφαιρική), ἔτι δὲ μὲ τὴν τέχνην τῆς συναρμογῆς μηχανισμῶν, ἱκανῶν νὰ παρουσιάσουν ἕνα ἱκανοποιητικὸν ὑπόδειγμα τῆς κινήσεως τῶν ἄστρων (ἄλλος κλάδος δημιουργηθεὶς ὑπὸ τῶν ἀρχαίων καὶ καλούμενος ὑπ' αὐτῶν σφαιροποιΐα).

Θὰ ἴδωμεν μετ' ὀλίγον, ὅτι μεθοδικαὶ ἐκθέσεις τῶν ἰδιοτήτων τῶν σφαιρικῶν σχημάτων ἀριθμοῦνται πολλαὶ εἰς τὴν ἑλληνικὴν βιβλιογραφίαν τῶν ἀρχαίων. Ἡ βαθεῖα μελέτη τῶν ἐργασιῶν τούτων καὶ ἡ ἀντιπαραβολή των ἤγαγε τοὺς ἁρμοδιωτέρους ἐπὶ τοῦ θέματος ὄχι μόνον νὰ παραδεχθοῦν ὅτι προϋφίστατο τούτων ἄλλη ἀρχαιοτέρα, ἀλλ' ἐπίσης νὰ ἐπιχειρήσουν τὴν εἰς γενικὰς γραμμὰς ἀνασύνταξιν αὐτῆς. Τούτου γενομένου, ἠγέρθη τὸ ζήτημα ποῖος ἦτο ὁ συγγραφεὺς τοῦ ὑποθετικοῦ αὐτοῦ ἔργου. Ἀνεζήτησαν λοιπόν, διὰ τὴν λύσιν τοῦ ζητήματος, μεταξὺ τῶν γνωστῶν ὀνομάτων ἐκεῖνον, ὁ ὁποῖος ἦτο προσφυέστερος πρὸς τὸ θέμα καὶ τελικῶς παρεδέχθησαν ὅτι ὁ ἔχων περισσοτέρους τίτλους ἁρμοδιότητος ἦτο ἀκριβῶς ὁ Εὔδοξος. Καὶ πράγματι, παρὰ τὸν περιορισμὸν τῆς ἐρεύνης, ἐξ ἀνάγκης τῶν πραγμάτων, εἰς τὴν προειρημένην μέθοδον, τὸ συμπέρασμα εἶναι φυσικὸν καὶ μάλιστα σχεδὸν ἀναπόφευκτον. Παρὰ ταῦτα, ἐπειδὴ μία τοιαύτη τακτική, τυχὸν γενικευομένη, θὰ καθιέρωνεν ἕνα ἱστορικὸν κριτήριον δυνάμενον νὰ ὁδηγήσῃ εἰς τὰ πλέον ψευδῆ καὶ ἄτοπα συμπεράσματα *, ἀπέφυγα νὰ προσθέσω τὸ ἔργον τοῦτο εἰς τὸν κατάλογον τῶν ἐργασιῶν τοῦ μεγάλου γεωμέτρου τῆς Κνί-

---

* Διὰ νὰ καταστήσω σαφεστέραν τὴν σκέψιν μου θὰ κάμω τὴν παρατήρησιν, ὅτι ἂν τοῦ μικροῦ τόμου, εἰς τὸν ὁποῖον ἔχουν συγκεντρωθῆ τὰ γραπτὰ τοῦ Galois, ἐχάνετο τὸ ὄνομα τοῦ συγγραφέως καὶ ἀνεζητεῖτο ὁ συγγραφεὺς μεταξὺ τῶν γνωστῶν ὀνομάτων, θὰ ἦτο κανεὶς δεσμευμένος νὰ ἐκλέξῃ μεταξὺ τοῦ Cauchy, τοῦ Sturm ἢ τοῦ Liouville, μαθηματικῶν, οἱ ὁποῖοι διεκρίνοντο ἐν Γαλλίᾳ κατὰ τὴν ἐποχὴν τοῦ Galois.

-δου, ἂν καὶ εἶμαι μεταξὺ τῶν παραδεχομένων τὴν ὕπαρξιν τοιαύτης πρωτοτύπου ἐργασίας, μὴ περισωθείσης.

67. Ἐξ ὅσων βεβαιώνει ὁ Πάππος, τὰ ἀρχαιότερα χειρόγραφα, τὰ ὁποῖα κατέχομεν ἐπὶ τῶν σφαιρικῶν σχημάτων, ὀφείλονται εἰς ἕνα σύγχρονον τοῦ Εὐκλείδου (ἴσως ὀλίγον προγενέστερόν του), γεννηθέντα εἰς τὰς ἀκτὰς τῆς Μικρᾶς Ἀσίας, τοῦ ὁποίου τὸ ὄνομα εἶναι Αὐτόλυκος ὁ Πριηνεύς. Ἐκ τῶν δύο σωζομένων ἔργων του, τὸ ἕνα «περὶ κινουμένης σφαίρας» διδάσκει τὰς ἁπλουστέρας σχέσεις, αἱ ὁποῖαι προέρχονται ἐκ τῆς θεωρήσεως σφαίρας περιστρεφομένης ὁμαλῶς περὶ τὸν ἄξονά της, τὸ ἄλλο «περὶ ἐπιτολῶν καὶ δύσεων», δυνάμενον νὰ θεωρηθῇ ὡς συνέχεια τοῦ πρώτου, πραγματεύεται περὶ τῶν φαινομένων, τὰ ὁποῖα συνοδεύουν τὴν ἀνατολὴν καὶ δύσιν τῶν ἀστέρων.

Τὰ ἔργα αὐτά, ἀξιόλογα καθ' ἑαυτὰ διὰ τὸ περιεχόμενον, εἶναι πολὺ ἀξιολογώτερα διὰ τὸν τρόπον τῆς ἐκθέσεως, ὁ ὁποῖος ἔχει ὅλα τὰ χαρακτηριστικά, εἰς τὰ ὁποῖα ὀφείλουν τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου τὴν φήμην των. Καὶ ἐπειδὴ ὁ συγγραφεὺς τῶν ἔργων αὐτῶν δὲν εἶναι μεταγενέστερος τοῦ Εὐκλείδου, ἐπιβεβαιοῦται οὕτω, ὅτι ἡ κανονικὴ καὶ κομψὴ μορφή, ἡ ὁποία ἐδόθη εἰς τὰ Στοιχεῖα ὑπὸ τοῦ μεγάλου Ἀλεξανδρινοῦ γεωμέτρου, δὲν ἦτο ἐξ ὁλοκλήρου ἰδικῆς του ἐπινοήσεως.

Πρὸς τὰ γραπτὰ τοῦ Αὐτολύκου παρουσιάζει ἀναμφισβήτητον ὁμοιότητα ἕνα ἔργον τοῦ Εὐκλείδου Φαινόμενα, περὶ τοῦ ὁποίου ἔχομεν ἤδη συντομώτατα ὁμιλήσει (§ 39). Μολονότι ἕνας ἀπὸ τοὺς βαθυτέρους γνώστας τῆς ἑλληνικῆς ἐπιστήμης (ἐννοοῦμεν τὸν Delambre) διετύπωσε τὴν γνώμην, ὅτι αἱ προτάσεις ποὺ τὸ ἀποτελοῦν ἀνήκουν εἰς τὴν «Μεταφυσικὴν τῆς Ἀστρονομίας», ἐν τούτοις δὲν θεωροῦμεν σύμφωνον πρὸς τὴν ἀλήθειαν τὴν δήλωσιν ὅτι ἐξ αὐτῶν δὲν δυνάμεθα ν' ἀντλήσωμεν κάποιαν πρακτικὴν χρησιμότητα, ἀφοῦ αὗται ἀποτελοῦν στοιχεῖα ἀπαραίτητα διὰ μίαν θεωρητικὴν περιγραφὴν τῶν ἀξιολογωτέρων οὐρανίων φαινομένων.

Χωρὶς νὰ σταματήσωμεν εἰς ἕνα μικρὸν ἔργον ἀστρονομικοῦ περιεχομένου, ὀφειλομένου εἰς τὸν Ὑψικλῆν (§ 52) καὶ πραγματευόμενον περὶ ἀνατολῶν — εἰς τοῦτο ὁ μαθηματικὸς σημειώνει μερικὰς ἰδιότητας τῶν ἀριθμητικῶν προόδων — θὰ ὁμιλήσωμεν ἐν συντομίᾳ δι' ἕνα ἄλλο ἔργον, πολὺ ἀξιολογώτερον ἄλλων διασωθέντων, ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ θέματος. Τοῦτο ὀφείλεται εἰς τὸν Θεοδόσιον τὸν Τριπολίτην (ἐκ Τριπόλεως τῆς Βιθυνίας), ὁ ὁποῖος ἔζησε πιθανῶς περὶ τὸ 150 π.Χ. Ἡ φήμη του προέρχεται κατὰ μέγα μέρος ἀπὸ ἕνα ἀξιόλογον ἐγχειρίδιον Σφαιρικῆς, τὸ ὁποῖον ἐγράφη ὑπὸ τούτου καὶ μετεφράσθη κατὰ τὸν XI αἰῶνα ἐκ τῆς ἀραβικῆς εἰς τὴν λατινικὴν ὑπὸ ἑνὸς πολυμαθοῦς, γνωστοῦ ὑπὸ τὸ ὄνομα Πλάτων

ὁ Τιβολίτης ἢ Τιμπουρτῖνος, ἐδημοσιεύθη δὲ βραδύτερον ἀπὸ τὸν Φραγκίσκον Μαυρόλυκον (1494 - 1575). Τὸ ἑλληνικὸν πρωτότυπον, συνοδευόμενον ἀπὸ λατινικὴν μετάφρασιν, εἶδε τὸ φῶς τῆς δημοσιότητος τὸ 1558, φροντίδι τοῦ G. Pena.

Πρόκειται περὶ ἑνὸς ἔργου διῃρημένου εἰς τρία βιβλία, τὸ ὁποῖον καλύπτει τὸ πλῆρες σχεδὸν κενόν, ποὺ ὑπάρχει εἰς τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου, γύρω ἀπὸ τὰς ἰδιότητας τῶν σφαιρικῶν σχημάτων, κενὸν μὴ δυνάμενον ἄλλως νὰ ἐξηγηθῇ, παρὰ μόνον διὰ τῆς παραδοχῆς ὅτι πρόκειται περὶ ὕλης θεωρουμένης τότε ξένης πρὸς τὴν καθαρὰν γεωμετρίαν, ἀφοῦ ἦτο κυρίως χρήσιμος εἰς τὴν ἔρευναν τῶν οὐρανίων φαινομένων. Εἶναι ἔργον στοιχειωδέστατον, τὸ ὁποῖον διδάσκει μόνον τὰς ἁπλουστέρας σχέσεις μεταξὺ μεγίστων καὶ μικρῶν κύκλων τῆς σφαίρας. Καὶ διὰ νὰ ἐξηγήσωμεν διατί ὁ Θεοδόσιος ἐμακρηγόρησε μὲ τόσην συγκατάβασιν, ἐφ' ἑνὸς θέματος τόσον μικροῦ διδακτικοῦ ἐνδιαφέροντος, πρέπει νὰ παραδεχθῶμεν, ὅτι οὗτος εἶχε σταθερῶς ὑπ' ὄψιν του τὴν χρῆσιν, ἡ ὁποία θὰ ἐγίνετο ἀπὸ τοὺς ἐπιθυμοῦντας νὰ ἐξηγήσουν θεωρητικῶς τὰ ὅσα συνέβαινον εἰς τὸ ἀχανὲς θέατρον τῶν οὐρανῶν.

68. Τὸ ἀπόγειον τῆς σφαιρικῆς γεωμετρίας ἐπισημαίνεται μὲ τὴν ἐμφάνισιν ἑνὸς ἐξέχοντος ἔργου, τὸ ὁποῖον ἔγραψεν ἐπὶ τοῦ θέματος ὁ Μενέλαος. Οὗτος, γεννηθεὶς εἰς Ἀλεξάνδρειαν, ἔκαμε τὸ 98 μ.Χ. εἰς τὴν Ρώμην μίαν ἀστρονομικὴν παρατήρησιν, ἡ ὁποία ἐπιτρέπει νὰ θεωρήσωμεν ὡς βέβαιον, ὅτι ἔζησε μεταξὺ I καὶ II αἰῶνος μ.Χ. Τὸ ἔργον του Σφαιρικὴ μᾶς εἶναι γνωστὸν μόνον διὰ μέσου μεταφράσεων εἰς τὴν ἀραβικὴν καὶ τὴν ἑβραϊκὴν γλῶσσαν [42], συνεπληροῦτο δὲ μὲ ἕνα ἄλλο, περὶ ὑπολογισμοῦ τῶν χορδῶν κύκλου, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν μόνον τὸν τίτλον. Εἰς τὴν Σφαιρικὴν τοῦ Μενελάου ἡ θεωρία τῶν σφαιρικῶν σχημάτων λαμβάνει, πρὸς ἔπαινον βεβαίως τοῦ συγγραφέως, τὸ ὁριστικὸν περίγραμμα, ποὺ ἐπέπρωτο νὰ διατηρήσῃ κατ' ἀναλογίαν πλήρη πρὸς τὴν γεωμετρίαν τοῦ ἐπιπέδου, ἀναλογίαν ἐκδηλουμένην εὐθὺς ὡς συμφωνήσωμεν ν' ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου αἱ περιφέρειαι μεγίστων κύκλων τῆς σφαίρας. Εἰδικώτερον, χάρις εἰς τὸ ἔργον αὐτό, εἰσέρχεται εἰς τὴν ἐπιστήμην τὸ «σφαιρικὸν τρίγωνον» (τουτέστι τρίγωνον ἔχον πλευρὰς τρία τόξα μεγίστου κύκλου), σχῆμα καταλαβὸν ἀμέσως θεμελιώδη θέσιν εἰς ὅλας τὰς μελέτας τὰς ἀναφερομένας εἰς τὴν σφαῖραν.

Σημειωτέον ὅτι ὁ Μενέλαος, ἐνῷ ἐξαίρει τὰς πολλὰς ὁμοιότητας ἢ ἀντιστοιχίας πρὸς τὰ ἐπίπεδα τρίγωνα, δὲν παραλείπει νὰ ἀναφέρῃ ὅτι πρόκειται περὶ ἀντιστοιχίας, ἡ ὁποία ἔχει ἐξαιρέσεις. Ἀξίζει ν' ἀναφέρωμεν ὅτι εἰς τὸ ἔργον του ἀπαντᾶται ἕνα ἀπὸ τὰ θεμελιώδη θεωρήματα τῆς

θεωρίας τῶν διατεμνουσῶν διὰ τὰ σφαιρικὰ τρίγωνα, ἡ πρότασις δηλαδή, ἡ ὁποία φέρει σήμερον δικαίως τὸ ὄνομα «Θεώρημα τοῦ Μενελάου» καὶ τὴν ὁποίαν οἱ σύγχρονοι μαθηματικοὶ διατυπώνουν ὡς ἑξῆς: «Ἐὰν αἱ πλευραὶ BC, CA, AB σφαιρικοῦ τριγώνου ABC τέμνωνται ἀντιστοίχως εἰς τὰ σημεῖα L, M, N ὑπὸ περιφερείας μεγίστου κύκλου, τὸ γινόμενον

$$\frac{\text{ημ BL}}{\text{ημ CL}} \cdot \frac{\text{ημ CM}}{\text{ημ AM}} \cdot \frac{\text{ημ AN}}{\text{ημ BN}}$$

ἰσοῦται ἀπολύτως πρὸς τὴν μονάδα».

Ἡ σπουδαιότης τῆς προτάσεως ταύτης ἀποδεικνύεται ἀπὸ τὰς πολλαπλᾶς ἐφαρμογάς, τὰς ὁποίας παρουσιάζει ὁ Μενέλαος. Σημειώνομεν π.χ. μίαν σχέσιν ἰσοδύναμον πρὸς τὴν γνωστὴν πρότασιν: «ἐὰν σφαιρικὸν τρίγωνον ABC εἶναι ὀρθογώνιον εἰς A θὰ ἔχωμεν:

$$\text{εφ AB} = \text{εφ BC} \cdot \text{συν B}».$$

Σημειώνομεν ἀκόμη τὰς ἰδιότητας ποὺ ἐκφράζουν ὅτι τὰ τρία τόξα — διχοτόμοι καὶ τὰ τρία τόξα - ὕψη παντὸς σφαιρικοῦ τριγώνου ἔχουν ἀνὰ ἕνα κοινὸν σημεῖον τομῆς. Ἀναφέρομεν τέλος καὶ τὸ θεώρημα: «Ἐὰν τὸ τόξον AD διαιρῇ εἰς ἴσα μέρη τὴν γωνίαν εἰς A τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου ABC, θὰ ὑπάρχῃ ἡ σχέσις:

$$\frac{\text{ημ AB}}{\text{ημ AC}} = \frac{\text{ημ BD}}{\text{ημ CD}}».$$

Προσθέτομεν ἀκόμη ὅτι ὁ Πάππος ἀποδίδει εἰς τὸν Μενέλαον τὴν ἀνακάλυψιν μιᾶς εἰδικῆς καμπύλης, ἡ ὁποία ὠνομάζετο «παράδοξος», χωρὶς ὅμως ν' ἀναφέρῃ τίποτε ὡς πρὸς τὴν φύσιν αὐτῆς. Διὰ τοῦτο οἱ ἱστορικοὶ τῆς γεωμετρίας, εἰς τὴν προσπάθειάν των νὰ πληρώσουν τὸ κενόν, κατέφυγον εἰς ὑποθέσεις, αἱ ὁποῖαι οὐδεμίαν στερεὰν βάσιν παρέχουν, ἀξίαν νὰ λάβῃ θέσιν εἰς μίαν συλλογὴν τῶν βεβαιωμένων κατακτήσεων τῶν ἀρχαίων εἰς τὴν περιοχὴν τῶν μαθηματικῶν.

Κλαύδιος Πτολεμαῖος

69. Τὰ ἔργα τοῦ Αὐτολύκου, τοῦ Εὐκλείδου, τοῦ Ὑψικλέους καὶ τοῦ Ἀριστάρχου, μὲ τὰ ὁποῖα ἠσχολήθημεν, μαζὶ μὲ ἄλλα μικροτέρας σημασίας, ἀπετέλουν μέρος — κατὰ μαρτυρίαν τοῦ Αὐτολύκου — τῆς Μικρᾶς Ἀστρονομικῆς Συντάξεως, ἡ ὁποία περιελάμβανε τὰ ἀπαραίτητα ἔργα διὰ τὴν κατανόησιν τοῦ μεγίστου ἀστρονομικοῦ κώδικος, ποὺ μᾶς ἐκληροδότησεν ἡ ἀρχαιότης. Ἐννοοῦμεν τὸ διάσημον ἔργον τοῦ Κλαυδίου Πτολεμαίου, τὸ ὁποῖον ἀρχικῶς ἔφερε τὸν τίτλον Μαθηματική

Σύνταξις, ὠνομάσθη δὲ κατόπιν ὑπὸ τῶν μεταγενεστέρων θαυμαστῶν Μεγάλη Σύνταξις. Οἱ Ἄραβες, οἱ ὁποῖοι μετέφρασαν τὸ ἔργον εἰς τὴν γλῶσσαν των κατὰ τὸν VIII αἰῶνα, ἥνωσαν τὸ ἀραβικὸν ἄρθρον αλ μὲ τὴν ἐξαραβισθεῖσαν προφορὰν μαγέστα (ἀντὶ μεγίστη), καὶ οὕτω συνέθεσαν τὴν βαρβαρικὴν λέξιν Ἀλμαγέστα, ἡ ὁποία καὶ παρέμεινεν ἔκτοτε γνωστὴ ὡς τίτλος τοῦ ἔργου. Ἡ μελέτη τοῦ ἔργου τούτου εἶναι ἀναπόφευκτος δι' ἐκεῖνον, ὁ ὁποῖος ἐπιθυμεῖ νὰ γνωρίσῃ τὴν ἀρχαίαν ἐπιστήμην, ἀφοῦ πρόκειται περὶ μιᾶς ἐργασίας, χάρις εἰς τὴν ὁποίαν ὁ Πτολεμαῖος διετήρησεν ἐπὶ πολλοὺς αἰῶνας ἀδιαφιλονίκητον κυριαρχικὴν ἐπιρροὴν εἰς τὰ πνεύματα ὅλων τῶν ἀστρονόμων.

Τὸ ἱστορικὸν ἐνδιαφέρον τοῦ ἔργου ἀπορρέει κατὰ πρῶτον λόγον ἐκ τοῦ γεγονότος, ὅτι ἐξ αὐτοῦ ἀρυόμεθα τὰς πολυτιμοτέρας πληροφορίας γύρω ἀπὸ τὸν πρίγκηπα τῶν Ἑλλήνων ἀστρονόμων, τὸν Ἵππαρχον τὸν ἐκ Νικαίας (τῆς Βιθυνίας) *, ὅστις εἰσήγαγεν εἰς τὴν Ἑλλάδα τὴν διαίρεσιν τοῦ κύκλου εἰς 360 μοίρας καὶ ἔκαμε κατὰ τὸν II αἰῶνα π.Χ. πολλὰς παρατηρήσεις εἰς Ρόδον καὶ Ἀλεξάνδρειαν, τοιαύτης σπουδαιότητος, ὥστε — ὡς ἔγραφεν ὁ Πλίνιος — ἤρθη εἰς στάθμην ἀνωτέραν τῆς ἀνθρωπίνης, διότι ἔφερεν εἰς πέρας πράγματα, τὰ ὁποῖα μόνον οἱ θεοὶ θὰ ἠδύναντο μετὰ κόπου νὰ ἐπιτελέσουν.

Ὁ δεύτερος λόγος, διὰ τὸν ὁποῖον ἡ μελέτη τῆς Ἀλμαγέστας κατέχει ἰδιαιτέραν ἱστορικὴν σπουδαιότητα, εἶναι διότι εἰς αὐτὴν εὑρίσκονται αἱ μοναδικαὶ καὶ ἀσφαλεῖς βιογραφικαὶ πληροφορίαι γύρω ἀπὸ τὸν συγγραφέα της (διότι αἱ πληροφορίαι τὰς ὁποίας ἀφθόνως καὶ λεπτομερῶς παρέχουν οἱ Ἄραβες δὲν εἶναι ἐν γένει ἀξιόπιστοι, λόγῳ τῆς ἐπιδράσεως πολὺ ζωηρᾶς φαντασίας). Ἀτυχῶς τὸ σύνολον τῶν δεδομένων ἀνάγεται τελικῶς εἰς τὴν πληροφορίαν ὅτι ὁ Πτολεμαῖος ἔζησε περὶ τὸ 150 μ.Χ.

Κατ' ἀναλογίαν πρὸς τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου καὶ τὰ Ἀριθμητικὰ τοῦ Διοφάντου (βλ. Κεφάλαιον VI), ἡ Μαθηματικὴ Σύνταξις (Ἀλμαγέστα) διαιρεῖται εἰς 13 βιβλία. Τὸ Βιβλίον I περιλαμβάνει τὰς προκαταρκτικὰς γνώσεις ποὺ εἶναι ἀπαραίτητοι διὰ μίαν καρποφόρον ἔρευναν τῶν οὐρανίων φαινομένων, μὲ βάσιν τὴν ὑπόθεσιν ὅτι ἡ Γῆ κατέχει τὸ κέντρον τοῦ Κόσμου. Τὸ Βιβλίον II διδάσκει τὴν διαίρεσιν τῆς οὐρανίου σφαίρας εἰς ζώνας καὶ τὰ φαινόμενα, διὰ τῶν ὁποίων ἐπισημαίνεται ἡ ἀνατολὴ καὶ ἡ δύσις τῶν ἀστέρων. Ἡ διάρκεια τοῦ ἔτους καὶ ἡ θεωρία τοῦ ἡλίου δίδει ὕλην εἰς τὸ Βιβλίον III, ἡ διάρκεια τῶν μηνῶν καὶ ἡ θεωρία τῆς σελήνης δίδει ὕλην εἰς τὸ Βιβλίον IV.

---

* Τὸ μόνον διασωθὲν ἔργον τοῦ Ἱππάρχου (120 π.Χ.) εἶναι ἕνα μικρᾶς σημασίας σχόλιον εἰς ποίημα τοῦ Ἀράτου καὶ εἰς Εὔδοξον. ὑπάρχει δὲ τοῦ σχολίου τούτου μία πρόσφατος ἔκδοσις.

Τὸ Βιβλίον V ἀσχολεῖται μὲ τὴν περιγραφὴν καὶ κατασκευὴν τοῦ περιφήμου ὀργάνου, τὸ ὁποῖον ἐκαλεῖτο ἀστρόλαβος, τὸ σπουδαιότερον ὄργανον τῶν ἀρχαίων ἀστεροσκοπείων, ὅπερ ἐχρησιμοποίησε καὶ ὁ Δανὸς ἀστρονόμος Tycho Brahe (1546-1601) εἰς τὰς παρατηρήσεις του. Τὸ Βιβλίον VI ἀσχολεῖται μὲ τὰ φαινόμενα τῶν «συζυγιῶν» καὶ «ἀντιζυγιῶν» τῶν μεγάλων ἄστρων Ἡλίου καὶ Σελήνης καὶ μὲ τὰς σχέσεις αὐτῶν πρὸς τὰ φαινόμενα τῶν ἐκλείψεων.

Τὰ δύο ἑπόμενα βιβλία εἶναι ἀφιερωμένα εἰς τοὺς ἀπλανεῖς ἀστέρας καὶ τὴν σπουδαιοτάτην καὶ περιφανῆ ἀνακάλυψιν τοῦ Ἱππάρχου, τὴν γνωστὴν ὑπὸ τὸν ἀστρονομικὸν ὅρον «μετάπτωσις τῶν ἰσημεριῶν». Τὰ τελευταῖα πέντε βιβλία εἶναι ἀφιερωμένα ἕκαστον εἰς ἕνα τῶν πλανητῶν Ἑρμῆν Ἀφροδίτην, Ἄρην, Δία καὶ Κρόνον.

70. Εἰς τοὺς ἀνωτέρω ὑποδειχθέντας λόγους, ἱστορικοῦ χαρακτῆρος, διὰ τοὺς ὁποίους ἡ Ἀλμαγέστα παρουσιάζει τόσον πλούσιον ἐνδιαφέρον, πρέπει νὰ προστεθῇ καὶ ἕνας τρίτος, ἀκόμη σπουδαιότερος. Ὅτι τὸ ἔργον αὐτὸ ἀποτελεῖ τὴν ἀρχαιοτέραν συγγραφικὴν ἐργασίαν, εἰς τὴν ὁποίαν περιέχονται πολυάριθμα στοιχεῖα καὶ θαυμάσιαι ἐφαρμογαὶ τῆς σφαιρικῆς τριγωνομετρίας, ἐπιστήμης μὴ χωριζομένης πλέον ἀπὸ τὸ πλευρὸν τῆς Ἀστρονομίας, ἂν ὄχι προηγουμένως διὰ τῶν ἐργασιῶν τοῦ Ἀρχιμήδους, τοὐλάχιστον ἀπὸ τῆς ἡμέρας, καθ' ἣν ὁ Ἵππαρχος καθώρισεν ἐπὶ τῆς οὐρανίου σφαίρας τὴν θέσιν τῶν ἄστρων διὰ τῆς χρήσεως σφαιρικῶν συντεταγμένων (πλάτους καὶ μήκους). Ἐπειδὴ ὅμως ἐκ τῆς σφαιρικῆς τριγωνομετρίας ὁ Πτολεμαῖος περιέλαβε μόνον ὅσα ἦσαν ἀναγκαῖα εἰς τὸν σκοπόν του, δὲν πρέπει νὰ θεωροῦμεν ὅτι αἱ προτάσεις, τὰς ὁποίας ἀναφέρει, ἐκπροσωποῦν τὸ σύνολον τῶν γνώσεων τῶν Ἑλλήνων ἐπὶ τοῦ θέματος, μολονότι δὲν ἔχομεν δυστυχῶς δεδομένα ἐπιτρέποντα τὴν συμπλήρωσιν.

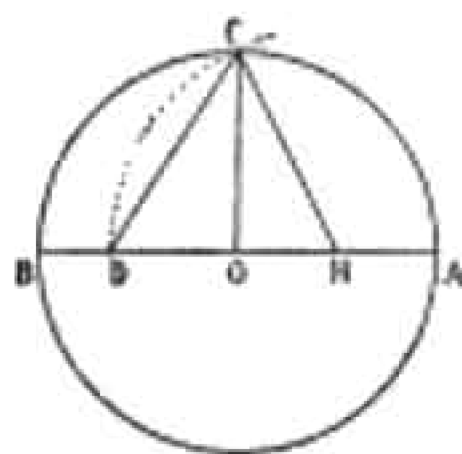
Ἡ Πτολεμαϊκὴ Τριγωνομετρία φαίνεται, χωρὶς ἀμφιβολίαν, πολὺ διάφορος τῆς ἰδικῆς μας, διότι δὲν ἀπαντῶνται εἰς ἐκείνην αἱ συνήθεις εἰς ἡμᾶς τριγωνομετρικαὶ συναρτήσεις, ἀλλὰ μόνον αἱ χορδαὶ τῶν θεωρουμένων τόξων. Παρὰ ταῦτα, ἀρκεῖ εἰς τὰ θεωρήματα τῆς Ἀλμαγέστας νὰ θέσωμεν ὅπου «χορδὴ x» τὸ ἰσοδύναμον «2 ημ x/2», διὰ ν' ἀποκαταστήσωμεν τὴν οὐσιαστικὴν ταυτότητα τῶν δύο συστημάτων.

Ἡ δημιουργία ἑνὸς ὑποκαταστάτου τῆς θεωρίας τῶν κυκλικῶν συναρτήσεων ὑπῆρξεν ἀποτέλεσμα τῆς συχνῆς ἀνάγκης, ποὺ παρουσιάζετο εἰς τοὺς ἀστρονόμους, νὰ ἔχουν ἕνα πίνακα τιμῶν τῶν χορδῶν τόξων πολλαπλασίων ἑνὸς τόξου περιφερείας *. Τοιαύτη ἀνάγκη, διαπιστωθεῖσα ἀπὸ

* Ἦτο μία ἀνάγκη, ἡ ὁποία ἀπὸ γεωμετρικῆς ἀπόψεως εἶχε γίνει αἰσθητὴ εἰς τὸν Ἀρχιμήδη, ὡς προκύπτει ἀπὸ ἕνα ἔργον, ἐκ τοῦ ὁποίου ἐσώθη μικρὸν ἀπόσπασμα.

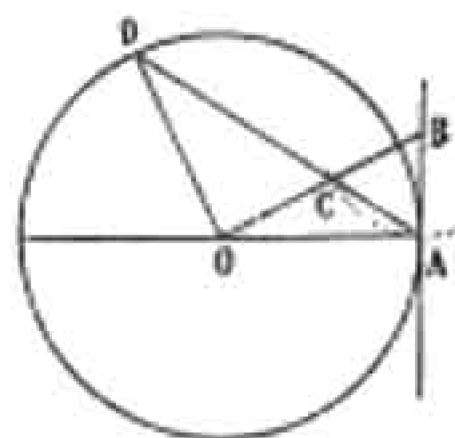
τὸν Ἵππαρχον (ἂν ὄχι προηγουμένως), ἱκανοποιήθη ὑπὸ τούτου εἰς ἕνα ἔργον ἐκ δώδεκα βιβλίων, δυστυχῶς ἀπολεσθέν. Προσθέτομεν ὅτι δὲν ἀποκλείεται εἰς τὴν ἐργασίαν αὐτὴν νὰ εἶχε μερικοὺς προδρόμους, γενάρχης τῶν ὁποίων θὰ ἦτο, κατά τινα μαρτυρίαν, ὁ Ἀπολλώνιος ὁ Περγαῖος ἢ ἀκόμη ἴσως καὶ ὁ Ἀρχιμήδης. Ἐφ' ὅσον ὅλα αὐτὰ τὰ ἔργα ἐχάθησαν, μόνον ἡ Ἀλμαγέστα δύναται νὰ μᾶς φωτίσῃ ὡς πρὸς τὸν τρόπον, μὲ τὸν ὁποῖον οἱ ἀρχαῖοι ἐπέτυχον τοῦ σκοποῦ των.

Μανθάνομεν ἀπὸ τὸ μέγα αὐτὸ ἔργον, ὅτι ἐντελῶς ἀναλόγως πρὸς ὅ,τι συνηθίζεται σήμερον, ἤρχιζαν ἀπὸ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν χορδῶν μερικῶν ἀξιοσημειώτων τόξων, ἐφαρμόζοντες τὸ Πυθαγόρειον Θεώρημα καὶ τὰς σχέσεις ἀκτῖνος κύκλου πρὸς τὰς πλευρὰς τῶν ἁπλουστέρων ἐγγεγραμμένων κανονικῶν πολυγώνων (σχέσεις γνωστὰς ἀπὸ τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου). Ἁρμόζει ν' ἀναφέρωμεν μίαν κατασκευὴν τῶν πλευρῶν τοῦ εἰς κύκλον ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πενταγώνου καὶ δεκαγώνου ἐξαιρετικῆς ἁπλότητος: Εἰς δεδομένον κύκλον (σχ. 12) ἄγεται ἡ διάμετρος AB καὶ ἡ ἐπ' αὐτὴν κάθετος ἀκτὶς OC. Ἐὰν εἶναι M τὸ μέσον τῆς ἀκτῖνος OA, γράφομεν μὲ κέντρον τὸ σημεῖον τοῦτο καὶ ἀκτῖνα MC τόξον περιφερείας τέμνον εἰς D τὴν ἀκτῖνα OB. Θὰ εἶναι τότε CD ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ πενταγώνου καὶ OD ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου, ποὺ ἐγγράφονται εἰς τὸν δοθέντα κύκλον.



Σχ. 12

Ἡ ἐν λόγῳ κατασκευὴ ἀναγράφεται ἐπίσης ἀνωνύμως εἰς τὸν Ἀντλαντικὸν Κώδικα (Codice Atlantico) τοῦ Leonardo da Vinci, εἶναι δὲ ἀνάλογος, ἀλλὰ ἁπλουστέρα μιᾶς ἄλλης προταθείσης εἰς τὸν Gauss δι' ἐπιστολῆς ὑπὸ χρονολογίαν 17 Φεβρουαρίου 1814 (Ἀλληλογραφία μεταξὺ C. F. Gauss καὶ C. L. Gerling, Βερολῖνον 1927, σελ. 46), τὴν ὁποίαν κατασκευὴν ἂς μᾶς ἐπιτραπῇ ν' ἀναφέρωμεν: Μὲ τὰ αὐτὰ δεδομένα (σχ. 13), ἂς ἀχθῇ εἰς τὸ σημεῖον A ἡ ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας καὶ ἂς ληφθῇ ἐπ' αὐτῆς τὸ τμῆμα AB ἴσον πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος. Ἄγεται ἡ εὐθεῖα OB καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς BC = BA. Ἂν ἡ εὐθεῖα AC προεκτεινομένη τέμνῃ τὴν περιφέρειαν εἰς D, θὰ εἶναι ἡ OD κάθετος ἐπὶ τὴν OB, ἡ OC πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου καὶ ἡ CD πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ πενταγώνου, ἐγγεγραμμένων εἰς τὸν δοθέντα κύκλον.



Σχ. 13

Ἐπειδὴ ἡ χρῆσις τῶν κανονικῶν πολυγώνων περιορίζει μοιραίως τὴν προσπάθειαν εἰς εἰδικὰς κατηγορίας τόξων, ὁ Πτολεμαῖος ἠσθάνθη τὴν

ἀνάγκην νὰ καταφύγῃ εἰς θεώρημα γενικοῦ χαρακτῆρος καὶ οὕτω διετύπωσε τὴν ἀκόλουθον πρότασιν: «Ἐὰν ABCD εἶναι τετράπλευρον ἐγγεγραμμένον εἰς περιφέρειαν, τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν ζευγῶν ἀντικειμένων πλευρῶν αὐτοῦ, $AB \cdot CD$ καὶ $AD \cdot BC$, εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν διαγωνίων $AC \cdot BD$». Αὐτὸ εἶναι τὸ σημαντικὸν θεώρημα ποὺ φέρει ἀκριβῶς σήμερον τὸ ὄνομα τοῦ Πτολεμαίου, ὄχι τόσον διὰ νὰ ἐπιβεβαιώνῃ τὴν ὑπ' αὐτοῦ ἀνακάλυψίν του, ὅσον διὰ νὰ ὑπενθυμίζῃ ὅτι τὸ θεώρημα ἀπαντᾶται διὰ πρώτην φορὰν εἰς τὸ ἀθάνατον ἔργον του. Ἐφαρμόζων τοῦτο ὁ Πτολεμαῖος μετά τινων προφυλάξεων, ἔφθασεν εἰς θεμελιώδη ἐξαγόμενα, τὰ ὁποῖα σήμερον ἐκφράζονται μὲ τοὺς γνωστοὺς τύπους τῆς Τριγωνομετρίας:

$$\eta\mu\,(x - y) = \eta\mu\, x\; \sigma\upsilon\nu\, y - \sigma\upsilon\nu\, x\; \eta\mu\, y$$

$$\sigma\upsilon\nu\,(x + y) = \sigma\upsilon\nu\, x\; \sigma\upsilon\nu\, y - \eta\mu\, x\; \eta\mu\, y$$

Ἐκ τούτων, ὅπως εἶναι γνωστόν, ἐξάγονται ὅλαι αἱ ἄλλαι σχέσεις αἱ ἀποτελοῦσαι τὴν σημερινὴν θεωρίαν τῶν κυκλικῶν συναρτήσεων. Οὕτω ὁ Πτολεμαῖος ἐξάγει π.χ. τὴν σχέσιν

$$\eta\mu^2 x = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu\, 2x}{2},$$

τὴν ὁποίαν κατόπιν ἐφαρμόζει κατ' ἐπανάληψιν διὰ νὰ ὑπολογίσῃ τὴν σειρὰν τῶν χορδῶν τὴν ἀρχομένην ἀπὸ τοῦ τόξου 12°, οὗτινος ἡ χορδὴ εἶχεν ἤδη προηγουμένως ὑπολογισθῆ, καὶ φθάνουσαν εἰς τὸ τόξον 3/4 μοίρας.

Τὸ τελευταῖον θεωρητικὸν στοιχεῖον, ποὺ ἦτο ἀναγκαῖον εἰς τὸν Πτολεμαῖον διὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ ζητουμένου πίνακος χορδῶν, συνίστατο εἰς ἕνα θεώρημα, ἀπαντώμενον ἤδη εἰς τὸν Ἀρίσταρχον καὶ τὸν Ἀρχιμήδη καὶ διατυπούμενον ὡς ἑξῆς: «Ἐὰν x, y εἶναι δύο τόξα μικρότερα τοῦ τετάρτου περιφερείας καὶ εἶναι $x > y$, θ' ἀληθεύῃ δι αὐτὰ ἡ σχέσις:

$$\frac{\chi o\rho\delta\dot{\eta}\; x}{\chi o\rho\delta\dot{\eta}\; y} < \frac{x}{y}».$$

Μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ θεωρήματος τούτου ὁ Πτολεμαῖος φθάνει εἰς ἐκτίμησιν τῆς χορδῆς 1°, δυνάμεθα δὲ νὰ ἐκτιμήσωμεν τὴν ἀκρίβειαν τοῦ εὑρεθέντος ἀποτελέσματος παρατηροῦντες ὅτι, ἐὰν ταυτισθῇ ἡ χορδὴ μετὰ τοῦ ἀντιστοίχου τόξου, προκύπτει ὡς μῆκος περιφερείας, διαμέτρου ἴσης πρὸς τὴν μονάδα, ἡ τιμή:

$$3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{60^2} = 3{,}14166\,..,$$

ἡ ὁποία ἔχει ἀκριβῆ τρία δεκαδικὰ ψηφία.

Ἐκμεταλλευόμενος τὰ διάφορα αὐτὰ ἀποτελέσματα ὁ Πτολεμαῖος ὑπολογίζει τὰς χορδὰς ὅλων τῶν τόξων, ποὺ εἶναι πολλαπλάσια τοῦ τόξου 1/2 μοίρας καὶ δὲν ὑπερβαίνουν τὰς 180°, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου ἐκφράζεται διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 120. Κατ' οὐσίαν πρόκειται περὶ καταστρώσεως ἑνὸς πίνακος ἡμιτόνων ὅλων τῶν τόξων, ποὺ εἶναι πολλαπλάσια τοῦ τόξου 1/4 μοίρας καὶ δὲν ὑπερβαίνουν τὰς 90°, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκρίβεια δύναται νὰ ἐκτιμηθῇ ἐκ τῆς παρατηρήσεως ὅτι διὰ τὸ ημ 30′ δίδει μίαν τιμὴν μὲ ἀκριβῆ τέσσαρα δεκαδικὰ ψηφία. Ἐπειδὴ δὲν διαφεύγει τοῦ Πτολεμαίου τὸ γεγονός, ὅτι διὰ τῆς ἐφαρμοζομένης μεθόδου τὰ σφάλματα προστίθενται τὰ μὲν εἰς τὰ δέ, ἐλέγχει καὶ διορθώνει τὰ ἐξαγόμενα διὰ συγκρίσεως τῶν τιμῶν, τὰς ὁποίας ὑπελόγισε προηγουμένως κατ' εὐθεῖαν διὰ μίαν σειρὰν ἀξιοσημειώτων τόξων.

Ὁ ἔχων πρὸ ὀφθαλμῶν τὸ γενικὸν διάγραμμα τῆς ὕλης τῶν σημερινῶν βιβλίων τριγωνομετρίας, θὰ κάμῃ ἀσφαλῶς τὴν ὑπόθεσιν, ὅτι ὁ Πτολεμαῖος, μετὰ τὴν ἀποκατάστασιν μιᾶς θεωρίας ἰσοδυνάμου πρὸς τὴν ἰδικήν μας θεωρίαν τῶν κυκλικῶν συναρτήσεων, ἐστράφη πρὸς τὴν ἐπίλυσιν τῶν εὐθυγράμμων τριγώνων, ὅπου εὑρίσκει ἄμεσον ἐφαρμογήν. Τίποτε ὅμως παρόμοιον δὲν ἀπαντᾶται. Ἂν καὶ ἀπέδειξε μὲ ἕνα παράδειγμα ὅτι ἦτο εἰς θέσιν νὰ ὑπολογίσῃ ὅλα τὰ στοιχεῖα ἑνὸς σχήματος, ὅταν ἐδίδετο ἐπαρκὴς ἀριθμὸς πλευρῶν καὶ γωνιῶν, ἐντούτοις δὲν προβαίνει εἰς μεθοδικὴν ἀνάπτυξιν ἑνὸς συστήματος λογισμοῦ. Καὶ ἐπειδὴ ἀκριβῶς, προκειμένου περὶ σφαιρικῶν τριγώνων, ἀκολουθεῖ διαμετρικῶς ἀντίθετον τακτικήν, θεμελιοῦται εἰς τὴν ἱστορίαν τῶν μαθηματικῶν τὸ περιεργότατον γεγονὸς ὅτι ἡ σφαιρικὴ τριγωνομετρία προηγήθη ἱστορικῶς τῆς ἐπιπέδου.

Ὡς θεωρητικὸν θεμέλιον τῆς σφαιρικῆς τριγωνομετρίας ἐκλέγει ὁ Πτολεμαῖος τὸ θεώρημα τοῦ Μενελάου (§ 68) διὰ τὰ σφαιρικὰ τρίγωνα. Προστρέχει εἰς αὐτὸ ὁσάκις ἔχει ἀνάγκην νὰ ἐκφράσῃ κάποιο στοιχεῖον σφαιρικοῦ τριγώνου μέσῳ ἐπαρκῶν δεδομένων ἄλλων στοιχείων του. Διὰ τὸ ὀρθογώνιον εἰς A σφαιρικὸν τρίγωνον ABC μὲ πλευρὰς τὰ τόξα a, b, c εὑρίσκει π.χ. τὰς γνωστὰς σχέσεις :

$$\text{ημ}\, c = \text{ημ}\, a \cdot \text{ημ}\, C$$

$$\text{εφ}\, c = \text{ημ}\, b \cdot \text{εφ}\, C$$

$$\text{εφ}\, c = \text{εφ}\, a \cdot \text{συν}\, B$$

Καὶ ἐπειδὴ αἱ ἀνωτέρω σχέσεις δὲν εἶναι αἱ μόναι ἐφαρμογαί, τὰς ὁποίας δύναται νὰ δώσῃ τὸ θεώρημα τοῦ Μενελάου, καταδεικνύεται ὅτι τοῦτο δύναται νὰ καταλάβῃ εἰς τὴν σφαιρικὴν τριγωνομετρίαν θέσιν πολὺ σπουδαιοτέραν ἐκείνης, τὴν ὁποίαν τοῦ δίδουν εἰς τὰ σύγχρονα ἐγχειρίδια.

71. Ὅπως συμβαίνει εἰς ὅλα τὰ ἔργα τὰ θεωρούμενα κλασικά, οὕτω καὶ προκειμένου περὶ τῆς Ἀλμαγέστας, δὲν ἔλλειψαν οἱ σχολιασταί. Ὁ γνωστότερος ἐξ αὐτῶν εἶναι ὁ Θέων ὁ Ἀλεξανδρεύς, ζήσας μεταξὺ IV καὶ V αἰῶνος μ.Χ. ὑπὸ τὴν βασιλείαν Θεοδοσίου τοῦ Μεγάλου, καὶ γνωστὸς εἰς τὴν ἱστορίαν διὰ μίαν ἐπιμελημένην ἔκδοσιν τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου. Τὸ ἀστρονομικόν του ἔργον, τοὐλάχιστον ἐν μέρει (ἴσως ὅμως καὶ ἐξ ὁλοκλήρου, διότι δὲν εἶναι βέβαιον ὅτι ἐπεξέτεινε τὰς διασαφήσεις του εἰς ὁλόκληρον τὴν Ἀλμαγέσταν) ἀντέστη νικηφόρως εἰς τὴν καταστρεπτικὴν μανίαν τοῦ χρόνου, μὲ περιωρισμένον ὄφελος διὰ τὴν ἐπιστήμην καὶ τὴν ἱστορίαν, διότι πολὺ μικρὰν βοήθειαν προσφέρει εἰς τοὺς μελετητὰς τοῦ μεγάλου ἔργου τοῦ Πτολεμαίου, καθὼς καὶ εἰς τοὺς ἐπιθυμοῦντας ν' ἀντλήσουν πληροφορίας περὶ τῆς ἐξελίξεως τῆς ἑλληνικῆς ἀστρονομίας μέχρι τῶν ἡμερῶν αὐτοῦ. Δὲν συντρέχει λοιπὸν κανεὶς λόγος νὰ ἐνδιατρίψωμεν ἀναλύοντες τὸ πτωχὸν αὐτὸ κείμενον τοῦ μετρίου ἀλεξανδρινοῦ ὑπομνηματιστοῦ *. Ἀντιθέτως εἶναι καθῆκον μας νὰ μνημονεύσωμεν δύο ἄλλα ἀξιόλογα ἔργα τοῦ συγγραφέως τῆς Μαθηματικῆς Συναγωγῆς, τὰ ὁποῖα ἔφθασαν μέχρις ἡμῶν.

Τὸ ἕνα φέρει τὸν τίτλον Ἀνάλημμα καὶ ἔχει ὡς θέμα τὴν ὀρθὴν προβολὴν μιᾶς σφαίρας ἐφ' ἑνὸς ἐπιπέδου, εἰς ὑποβοήθησιν τῆς χαράξεως τῶν ἡλιακῶν ὡρολογίων (μεσημβρινῶν). Τὸ ἄλλο, ποὺ φέρει τὸν τίτλον Ἅπλωσις ἐπιφανείας ἔχει ὡς ἀντικείμενον τὴν κεντρικὴν προβολὴν τῆς ἐπιφανείας μιᾶς σφαίρας ἐπὶ τοῦ ἰσημερινοῦ ἐπιπέδου ἀπὸ τοῦ βορείου πόλου. Πρόκειται λοιπὸν περὶ τῆς μεθόδου ἀπεικονίσεως ἐφ' ἑνὸς ἐπιπέδου μιᾶς σφαίρας, μεθόδου γνωστῆς σήμερον ὑπὸ τὸ ὄνομα στερεογραφικὴ προβολή. Ὁ Πτολεμαῖος ἐγνώριζε μίαν τῶν θεμελιωδῶν ἰδιοτήτων, καθ' ἣν γίνεται ἡ ἀντιστοιχία μιᾶς περιφερείας τῆς σφαίρας πρὸς μίαν περιφέρειαν τοῦ ἐπιπέδου, καὶ προέβη εἰς χρησίμους ἐφαρμογάς.

---

* Ἀπὸ τὸ ἔργον τοῦ Θέωνος Σχόλιον εἰς τὴν Ἀλμαγέσταν ἦσαν γνωστὰ τὰ ἀφορῶντα τὰ βιβλία I καὶ II, ἐθεωρεῖτο δὲ ἀπολεσθὲν τὸ κείμενον τὸ ἀφορῶν τὸ βιβλίον III. Ἀνευρέθη ὅμως καὶ τοῦτο ὑπὸ τοῦ A. Rome εἰς τὴν ἐθνικὴν βιβλιοθήκην τῆς Φλωρεντίας. Πληροφορίαι σχετικαὶ πρὸς τὴν ἀνακάλυψιν αὐτὴν εὑρίσκονται εἰς ἄρθρον τοῦ ἰδίου Le troisième livre des commentaires sur l' Almageste, par Théon et Hypathie (Publications du laboratoire d' Astronomie et de Géodésie de l' Université de Louvain, vol. III, 1916). Συνάγεται ἐξ αὐτοῦ ὅτι εἰς τὸ ἔργον του ὁ Θέων ἐβοηθήθη ἀπὸ τὴν κόρην του Ὑπατίαν, τὴν πολυμαθῆ συγγραφέα, ἡ ὁποία, ὡς εἴδομεν (§ 62), κατεκρεουργήθη βαναύσως εἰς τὰς ὁδοὺς τῆς Ἀλεξανδρείας τὸ 415 κατὰ τὴν διάρκειαν τῶν συγκρούσεων μεταξὺ τῆς καταρρεούσης εἰδωλολατρίας καὶ τοῦ οἰκουμενικῶς διαδιδομένου χριστιανισμοῦ. Εἰς τὴν ἱστορίαν μας ἡ Ὑπατία, ἀνεξαρτήτως τοῦ μαρτυρικοῦ της θανάτου, εἶναι ἀξία μνείας, διότι εἶναι ἡ πρώτη εἰς τὴν σειρὰν τῶν γυναικῶν, αἱ ὁποῖαι κατέλιπον ἴχνη ὡς ἐργάτιδες τῶν ἀκριβῶν ἐπιστημῶν.

Τελειώνομεν μὲ τὴν παρατήρησιν ὅτι εἰς τὸ περισσότερον διαδεδομένον ἔργον του, δηλαδὴ τὴν Γεωγραφικὴν ἀφήγησιν, εἰς 8 βιβλία, ὁ Πτολεμαῖος χρησιμοποιεῖ ἄλλην μέθοδον ἀπεικονίσεως σφαίρας ἐπὶ ἐπιπέδου, ἡ ὁποία ἐνέπνευσεν εἰς τὸν Μερκάτορα τὴν ἐφαρμογὴν αὐτῆς εἰς τοὺς χάρτας τῶν ναυτιλλομένων, ποὺ φέρουν σήμερον τὸ ὄνομα Μερκατορικοὶ χάρται.

Τὸ συμπέρασμα εἶναι ὅτι εἰς τὴν ἀρχαίαν ἑλληνικὴν βιβλιογραφίαν ὑφίστανται αἱ θεωρητικαὶ βάσεις τῶν τριῶν κυριωτέρων μεθόδων, αἱ ὁποῖαι ἐφηρμόσθησαν ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον, διὰ τὴν ἐπὶ ἐπιπέδου ἀπεικόνισιν τῆς γηίνης ἐπιφανείας.

Ἥρων ὁ Ἀλεξανδρεύς

72. Ἡ ἐξέτασις τοῦ συνόλου τῆς πτολεμαϊκῆς ἐπιστημονικῆς παραγωγῆς μᾶς κατεβίβασε βαθμηδὸν ἀπὸ τοῦ οὐρανοῦ εἰς τὴν Γῆν καὶ ἐδῶ ἁρμόζει νὰ παραμείνωμεν διὰ ν' ἀναγνωρίσωμεν ὅτι μεταξὺ τῶν γραπτῶν μνημείων, τὰ ὁποῖα μᾶς ἐκληροδότησαν οἱ Ἕλληνες, ὑπάρχει μία συλλογὴ πλουσία, ἀλλὰ συγκεχυμένη, διαφόρων ἔργων φερομένων ὑπὸ τὸ ὄνομα τοῦ Ἥρωνος καὶ ἀποτελούντων τὸν πυρῆνα τῆς γεωδαιτικῆς γραμματείας τοῦ ἑλληνικοῦ κόσμου. Τὸ πρόβλημα ποὺ παρουσιάζεται τώρα εἶναι, πρὸ πάντων, πῶς νὰ κατανεμηθοῦν αὐτὰ τὰ ἔργα εἰς τὰ διάφορα πρόσωπα τὰ φέροντα τὸ ὄνομα τοῦτο. Τὸ ἱστορικὸν αὐτὸ πρόβλημα — γνωστὸν ὑπὸ τὸν τίτλον «Ἡρώνειον πρόβλημα» — τυγχάνει δυσχερέστατον, λόγῳ τῶν ἀναριθμήτων παρεμβολῶν καὶ ἀκρωτηριασμῶν, τοὺς ὁποίους ὑπέστησαν τὰ χειρόγραφα τῆς περὶ ἧς ὁ λόγος συλλογῆς, ὡς καὶ τῆς μεγάλης συχνότητος τοῦ ὀνόματος — ἀναφέρονται περίπου 20 Ἕλληνες μὲ αὐτὸ τὸ ὄνομα. Ἐπὶ πλέον ἡ λέξις Ἥρων εἶναι αἰγυπτιακῆς προελεύσεως καί, ἐκτὸς τῆς χρήσεως αὐτῆς ὡς κυρίου ὀνόματος προσώπων, εἶχε καὶ μίαν σημασίαν ἀνάλογον πρὸς ἐκείνην, ποὺ ἔχει σήμερον ἡ λέξις «μηχανικός». Εὐτυχῶς, ἐκ τῶν προσώπων ποὺ φέρουν τὸ ὄνομα Ἥρων, γνωστῶν εἰς ἡμᾶς, τρία μόνον ἠσχολήθησαν μὲ τὰ μαθηματικά. Ἕνας εἶναι Ἀλεξανδρινός, ἀναφερόμενος ἀπὸ τὸν Εὐτόκιον, τὸν Πάππον καὶ τὸν Πρόκλον· ὁ δεύτερος ὑπῆρξε διδάσκαλος τοῦ προηγουμένου· ὁ τρίτος εἶναι Βυζαντινός, καλούμενος συνήθως «Ἥρων ὁ νεώτερος», θὰ ὁμιλήσωμεν δὲ περὶ αὐτοῦ ἐν καιρῷ τῷ δέοντι (§ 95).

Εἰς τὸν πρῶτον ἀποδίδεται τὸ καλύτερον μέρος τῶν φυσικομαθηματικῶν ἔργων τῶν φερομένων ὑπὸ τὸ ὄνομα τοῦ Ἥρωνος. Ἀλλὰ εἰς ποίαν ἐποχὴν ἔζησε; Βέβαιον εἶναι ὅτι ἤκμασε μεταξὺ 300 π.Χ. καὶ 200 μ.Χ. Διὰ τὸν περιορισμὸν τοῦ μακροῦ τούτου χρονικοῦ διαστήματος εἰς στενώτερα ὅρια, διετυπώθησαν πολλαὶ καὶ διάφοροι λεπταὶ θεωρίαι, αἱ ὁποῖαι

Τελειώνομεν μὲ τὴν παρατήρησιν ὅτι εἰς τὸ περισσότερον διαδεδομένον ἔργον του, δηλαδὴ τὴν Γεωγραφικὴν ἀφήγησιν, εἰς 8 βιβλία, ὁ Πτολεμαῖος χρησιμοποιεῖ ἄλλην μέθοδον ἀπεικονίσεως σφαίρας ἐπὶ ἐπιπέδου, ἡ ὁποία ἐνέπνευσεν εἰς τὸν Μερκάτορα τὴν ἐφαρμογὴν αὐτῆς εἰς τοὺς χάρτας τῶν ναυτιλλομένων, ποὺ φέρουν σήμερον τὸ ὄνομα Μερκατορικοὶ χάρται.

Τὸ συμπέρασμα εἶναι ὅτι εἰς τὴν ἀρχαίαν ἑλληνικὴν βιβλιογραφίαν ὑφίστανται αἱ θεωρητικαὶ βάσεις τῶν τριῶν κυριωτέρων μεθόδων, αἱ ὁποῖαι ἐφηρμόσθησαν ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον, διὰ τὴν ἐπὶ ἐπιπέδου ἀπεικόνισιν τῆς γηίνης ἐπιφανείας.

Ἥρων ὁ Ἀλεξανδρεύς

72. Ἡ ἐξέτασις τοῦ συνόλου τῆς πτολεμαϊκῆς ἐπιστημονικῆς παραγωγῆς μᾶς κατεβίβασε βαθμηδὸν ἀπὸ τοῦ οὐρανοῦ εἰς τὴν Γῆν καὶ ἐδῶ ἁρμόζει νὰ παραμείνωμεν διὰ ν' ἀναγνωρίσωμεν ὅτι μεταξὺ τῶν γραπτῶν μνημείων, τὰ ὁποῖα μᾶς ἐκληροδότησαν οἱ Ἕλληνες, ὑπάρχει μία συλλογὴ πλουσία, ἀλλὰ συγκεχυμένη, διαφόρων ἔργων φερομένων ὑπὸ τὸ ὄνομα τοῦ Ἥρωνος καὶ ἀποτελούντων τὸν πυρῆνα τῆς γεωδαιτικῆς γραμματείας τοῦ ἑλληνικοῦ κόσμου. Τὸ πρόβλημα ποὺ παρουσιάζεται τώρα εἶναι, πρὸ πάντων, πῶς νὰ κατανεμηθοῦν αὐτὰ τὰ ἔργα εἰς τὰ διάφορα πρόσωπα τὰ φέροντα τὸ ὄνομα τοῦτο. Τὸ ἱστορικὸν αὐτὸ πρόβλημα — γνωστὸν ὑπὸ τὸν τίτλον «Ἡρώνειον πρόβλημα» — τυγχάνει δυσχερέστατον, λόγῳ τῶν ἀναριθμήτων παρεμβολῶν καὶ ἀκρωτηριασμῶν, τοὺς ὁποίους ὑπέστησαν τὰ χειρόγραφα τῆς περὶ ἧς ὁ λόγος συλλογῆς, ὡς καὶ τῆς μεγάλης συχνότητος τοῦ ὀνόματος — ἀναφέρονται περίπου 20 Ἕλληνες μὲ αὐτὸ τὸ ὄνομα. Ἐπὶ πλέον ἡ λέξις Ἥρων εἶναι αἰγυπτιακῆς προελεύσεως καί, ἐκτὸς τῆς χρήσεως αὐτῆς ὡς κυρίου ὀνόματος προσώπων, εἶχε καὶ μίαν σημασίαν ἀνάλογον πρὸς ἐκείνην, ποὺ ἔχει σήμερον ἡ λέξις «μηχανικός». Εὐτυχῶς, ἐκ τῶν προσώπων ποὺ φέρουν τὸ ὄνομα Ἥρων, γνωστῶν εἰς ἡμᾶς, τρία μόνον ἠσχολήθησαν μὲ τὰ μαθηματικά. Ἕνας εἶναι Ἀλεξανδρινός, ἀναφερόμενος ἀπὸ τὸν Εὐτόκιον, τὸν Πάππον καὶ τὸν Πρόκλον· ὁ δεύτερος ὑπῆρξε διδάσκαλος τοῦ προηγουμένου· ὁ τρίτος εἶναι Βυζαντινός, καλούμενος συνήθως «Ἥρων ὁ νεώτερος», θὰ ὁμιλήσωμεν δὲ περὶ αὐτοῦ ἐν καιρῷ τῷ δέοντι (§ 95).

Εἰς τὸν πρῶτον ἀποδίδεται τὸ καλύτερον μέρος τῶν φυσικομαθηματικῶν ἔργων τῶν φερομένων ὑπὸ τὸ ὄνομα τοῦ Ἥρωνος. Ἀλλὰ εἰς ποίαν ἐποχὴν ἔζησε; Βέβαιον εἶναι ὅτι ἤκμασε μεταξὺ 300 π.Χ. καὶ 200 μ.Χ. Διὰ τὸν περιορισμὸν τοῦ μακροῦ τούτου χρονικοῦ διαστήματος εἰς στενώτερα ὅρια, διετυπώθησαν πολλαὶ καὶ διάφοροι λεπταὶ θεωρίαι, αἱ ὁποῖαι

ὡδήγησαν τοὺς ἀσχοληθέντας μὲ ἐπιδεξιωτέραν ἐπιμέλειαν εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι ὁ γεωδαίτης περὶ τοῦ ὁποίου ὁ λόγος, ἔζησε κατὰ τὸν Ι αἰῶνα π.Χ., χωρὶς ν' ἀποκλείεται ἡ ἀρχὴ τῆς ὑπάρξεώς του ἀπὸ τοῦ ΙΙ αἰῶνος. Πιθανῶς ἐδίδαξεν εἰς Ἀλεξάνδρειαν, τὰ δὲ γραπτά του εἶχον μεγάλην διάδοσιν εἰς τὴν Αἴγυπτον. Ἀκριβεστέρας τούτων βιογραφικὰς πληροφορίας δὲν εἴμεθα εἰς θέσιν νὰ δώσωμεν. Εἰς ὀλιγώτερον ἀόριστα συμπεράσματα ὁδηγεῖ ἡ ἐξέτασις τῶν ἔργων του, τὴν ὁποίαν τώρα θὰ ἐπιχειρήσωμεν.

73. Περὶ τῶν καρπῶν τοὺς ὁποίους συνέλεξεν ὁ Ἥρων ἐφαρμόζων τὰς θεμελιώδεις ἀρχὰς τῆς ἀρχιμηδείου Στατικῆς δίδει πληροφορίας ὁ Πάππος εἰς τὸ τελευταῖον βιβλίον τῆς Μαθηματικῆς Συναγωγῆς, περὶ τῆς ἀξίας δὲ τούτων εἴμεθα εἰς θέσιν νὰ ἐκφέρωμεν σήμερον γνώμην ἐπὶ ἀσφαλεστέρων βάσεων, κατόπιν τῆς δημοσιεύσεως (μὲ μετάφρασιν εἰς σύγχρονον γλῶσσαν) τῆς ἀραβικῆς μεταφράσεως ἑνὸς σημαντικοῦ μηχανικοῦ ἔργου τοῦ Ἥρωνος, φέροντος τὸν τίτλον «ὁ Βαρουλκός».

Ἐξ αὐτοῦ συνάγεται ὅτι ὁ Ἥρων κατέγινε κατὰ προτίμησιν εἰς τὴν πρακτικὴν μηχανικήν, μὲ ὁδηγὸν τὸ γαλιλαϊκὸν γνωμικὸν «ἡ πεῖρα εἶναι ὁ καλύτερος διδάσκαλος». Ἡ χαρακτηριστικὴ αὐτὴ νοοτροπία ἐπιβεβαιοῦται ἀπὸ πολλὰ ἄλλα ἔργα (τὰ ὁποῖα ἐν τούτοις ἐξέρχονται τοῦ πλαισίου τῆς συγγραφῆς μας), ἀναβιβάσαντα τὸν Ἥρωνα εἰς στάθμην ἀνωτάτης αὐθεντίας εἰς τὴν κατασκευὴν ἐκπληκτικῶν μηχανισμῶν καὶ πολεμικῶν συσκευῶν.

Παρὰ τὴν ἔμφυτον κλίσιν του πρὸς τὴν ἐφηρμοσμένην φυσικήν, ὁ Ἥρων ἀντιμετωπίζων τὸ ἀρχιμήδειον πρόβλημα « ν' ἀνυψωθῇ δεδομένον βάρος μὲ δεδομένην δύναμιν» εὑρέθη εἰς τὴν ἀνάγκην ν' ἀσχοληθῇ μὲ τὸ πρόβλημα τῆς «παρεμβολῆς δύο μέσων ἀναλόγων μεταξὺ δύο δοθέντων μεγεθῶν». Καὶ ἐπειδὴ ἔλυσε τὸ πρόβλημα τοῦτο μὲ καλῶς ρυθμιζομένας δοκιμάς, ἀφοῦ τὸ ἀνήγαγε προηγουμένως εἰς εἰδικὸν πρόβλημα παρεμβολῆς, «ὁ Βαρουλκὸς» εἶναι ἔργον ἄξιον τιμητικῆς μνείας εἰς οἱανδήποτε ἱστορίαν γεωμετρίας. Ἀκόμη μάλιστα περισσότερον, διότι εἰς τὸ ἔργον αὐτὸ εὑρίσκονται ἀκριβεῖς πληροφορίαι γύρω ἀπὸ τὴν κυκλικὴν στερεὰν ἕλικα, πιθανώτατα ἀντληθεῖσαι ἀπὸ φημολογούμενον ἔργον τοῦ Ἀπολλωνίου, τοῦ ὁποίου μέχρι σήμερον δὲν ἀνευρέθη οὔτε ἐλάχιστον ἴχνος.

Τ' ἀνωτέρω ἀποκαλύπτουν τὴν ὕπαρξιν εἰς τὸν Ἥρωνα μιᾶς ἐκτάκτου δεξιότητος εἰς καθαρῶς γεωμετρικὰς ἐρεύνας, περὶ τῆς ὁποίας τὰ ἀναφερόμενα ἔργα του θὰ ἠδύναντο εὐλόγως νὰ γεννήσουν ἀμφιβολίας. Περὶ αὐτῆς ὅμως δυνάμεθα νὰ ἐπικαλεσθῶμεν καὶ ἄλλας μαρτυρίας τόσον πολλάς, ὥστε νὰ μὴ διστάζωμεν νὰ δεχθῶμεν τὴν πληροφορίαν ὅτι συνέγραψε σχόλια, ἴσως μάλιστα πλήρη, εἰς τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου, περιέχοντα πλῆθος πρωτοτύπων καὶ σπουδαίων ἀπόψεων. Εἰς τὸ συμπέ-

ρασμα τοῦτο ἀγόμεθα πρὸ πάντων ἀπαριθμοῦντες τὰς βελτιώσεις καὶ τὰς προσθήκας, τὰς ὁποίας ὁ Πρόκλος ἀναφέρει εἰς τὰ Σχόλιά του, ὡς ὀφειλομένας εἰς τὸν Ἥρωνα.

Τελευταίως τὸ συμπέρασμα τοῦτο εὗρε καὶ ἄλλας πολλὰς ἐπιβεβαιώσεις εἰς παραπλήσιον ἔργον ἑνὸς Ἄραβος (γνωστοῦ εἰς τὴν Δύσιν ὑπὸ τὸ ὄνομα Anaritio), τὸ ὁποῖον μετεφράσθη τὸν XII αἰῶνα εἰς τὴν λατινικὴν ὑπὸ τοῦ Γεράρδου τῆς Κρεμώνης (1144 - 1187). Ὅταν ἐδημοσιεύθη ἡ ἐν λόγῳ μετάφρασις, ἡ ὁποία περιποιεῖ τιμὴν εἰς τὸν σοφὸν μεταφραστὴν καὶ βαθὺν μελετητὴν τῶν μεσαιωνικῶν μαθηματικῶν, περιῆλθον εἰς γνῶσιν τοῦ ἐπιστημονικοῦ κόσμου νέα ἀξιόλογα ἐξαγόμενα, συμπληροῦντα τὰς θεωρίας τοῦ Εὐκλείδου καὶ ὀφειλόμενα εἰς τὸν εὐφυῆ Ἀλεξανδρινὸν γεωδαίτην.

Ἀναφέρομεν ὡς παράδειγμα τὴν παρατήρησιν τοῦ Ἥρωνος, ὅτι εἰς τὸ σχῆμα, ποὺ χρησιμοποιεῖ ὁ Εὐκλείδης διὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ πυθαγορείου θεωρήματος (Βιβλίον I, πρότασις 47), ἡ κάθετος ἡ ἀγομένη ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν διέρχεται προεκτεινομένη ἀπὸ τὸ σημεῖον τομῆς τῶν ἀπωτάτων πλευρῶν τῶν δύο τετραγώνων ποὺ κατασκευάζονται ἐπὶ τῶν καθέτων πλευρῶν τοῦ τριγώνου. Τοιουτοτρόπως, ὁ Ἥρων ἀπεκάλυψεν, ὅτι τὸ ἐν λόγῳ σχῆμα ἀποτελεῖ γόνιμον σπόρον πρὸς ἀνακάλυψιν νέων ἀληθειῶν.

Εἰς τὸν Ἥρωνα ἀποδίδεται ἐπίσης μία συλλογή, φέρουσα τίτλον ὁρισμοί, γεωμετρικά, γεωδαισία, στερεομετρικά, τὴν ὁποίαν ἀναφέρομεν, μολονότι ἡ πατρότης τοῦ ἔργου εἶναι ἀμφίβολος, διότι, ἀνεξαρτήτως τοῦ ποῖος εἶναι ὁ συγγραφεύς, ἀποτελεῖ μνημεῖον χρήσιμον εἰς ἐκεῖνον, ὁ ὁποῖος ἐπιθυμεῖ νὰ συμπληρώσῃ εἰς τὸ ἀκέραιον τὸν πίνακα τῶν σχημάτων ποὺ ἐξήτασαν οἱ ἀρχαῖοι γεωμέτραι.

74. Ἡ σημαντικωτέρα συμβολὴ τοῦ Ἥρωνος εἰς τὴν γεωμετρίαν εὑρέθη διὰ πρώτην φορὰν εἰς ἕνα ἔργον του, εἰς τὸ ὁποῖον ἐκτίθεται ἡ χρῆσις τῆς διόπτρας, ὀργάνου ἰδικῆς του ἐφευρέσεως, παίζοντος εἰς τὴν ἀρχαίαν γεωδαισίαν ρόλον ἀνάλογον πρὸς τὸν τοῦ σημερινοῦ Θεοδολίχου. Ἀπὸ τὸν πρόλογον τοῦ ἔργου τούτου, φέροντος τὸν τίτλον «Διόπτρα», συνάγεται ὅτι ὁ Ἥρων δὲν ὑπῆρξεν ὁ πρῶτος Ἕλλην, ποὺ συνέταξε πρακτικὸν ἐγχειρίδιον γεωμετρίας, ἀλλ' ὁ πρῶτος εἰσαγαγὼν ἑνότητα μεθόδου ἐν συνδυασμῷ πρὸς τὴν χρῆσιν τῆς διόπτρας. Ἡ ἁπλῆ ἐξέτασις τῶν 36 προβλημάτων, τὰ ὁποῖα πραγματεύεται, ἀποδεικνύει ὅτι τὸ ἔργον του εἶναι ἕνα ἐγκόλπιον (vade - mecum) μεγίστης χρησιμότητος διὰ τὸν τοπογράφον, ἀφοῦ περιλαμβάνει μεθόδους μετρήσεως ἀποστάσεων καὶ ἐπιφανειῶν, ὑψομέτρων καὶ βυθομέτρων, μεθόδους διαιρέσεως ἐδαφικῶν ἐπιφανειῶν, διατρήσεως ὀρέων κλπ. Τὰ συμπεράσματά του κατοχυρώνει ὁ Ἥρων

δι' ἀποδείξεων στηριζομένων εἰς ὁρισμούς, θεωρήματα καὶ μεθόδους ἀναγομένας εἰς τὸν Εὐκλείδη.

Εἰς μίαν ὅμως περίπτωσιν θίγει ἕνα ζήτημα, τοῦ ὁποίου οὐδὲν ἴχνος ἀπαντᾶται εἰς τὰ Στοιχεῖα. Πρόκειται περὶ τοῦ ὑπολογισμοῦ τοῦ ἐμβαδοῦ ἑνὸς τριγώνου, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὰ μήκη τῶν πλευρῶν. Προβαίνει δὲ εἰς τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου μὲ ἕνα καθαρῶς γεωμετρικὸν τέχνασμα τόσον κομψὸν κατὰ τὴν μορφὴν καὶ τόσον σημαντικὸν κατὰ τὴν οὐσίαν, ὥστε ὁ ἴδιος ὁ Εὐκλείδης δὲν θὰ ἐδίσταζεν ἀσφαλῶς νὰ τὸ ἐπικυρώσῃ διὰ τῆς ὑπογραφῆς του. Τὸ προκῦπτον ἀποτέλεσμα διὰ τὸ ἐμβαδὸν Ε τοῦ τριγώνου, τοῦ ἔχοντος πλευρὰς α, β, γ, δίδεται σήμερον ἀπὸ τὸν γνωστὸν τύπον:

$$E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)},$$

(ὅπου τ ἡ ἡμιπερίμετρος) ὁ ὁποῖος δικαιοῦται ἀναμφιβόλως νὰ φέρῃ τὸ ὄνομα «τύπος τοῦ Ἥρωνος», ἀντὶ ἄλλων ὀνομάτων, ποὺ τοῦ ἐδόθησαν προτοῦ ἔλθῃ εἰς φῶς τὸ ἀρχαιότερον ἔργον, ἐντὸς τοῦ ὁποίου ἀναφέρεται.

Ὑπάρχουν εἰς τὸν τύπον αὐτὸν δύο πράγματα, ἄξια ἰδιαιτέρας προσοχῆς. Τὸ πρῶτον εἶναι ὅτι ἐμφανίζεται ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ γινομένου τεσσάρων μηκῶν, πρᾶγμα παράδοξον, καθ' ὅσον πρόκειται περὶ ἐκφράσεως συστηματικῶς ἀποφευγομένης ὑπὸ τῶν ἀρχαίων, διότι δὲν ὑπάρχει γεωμετρικὸν μέγεθος ἰσοδύναμον, ἀνάλογον πρὸς ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ γινόμενον δύο μηκῶν. Πιθανῶς ὁ Ἥρων ν' ἀντελαμβάνετο τὴν σημασίαν τῆς παραστάσεως $\sqrt{m \cdot n \cdot p \cdot q}$ ὡς ὀρθογώνιον ἔχον τὴν μίαν πλευρὰν ἴσην πρὸς τὴν μέσην ἀνάλογον τῶν m καὶ n, τὴν δὲ ἄλλην ἴσην πρὸς τὴν μέσην ἀνάλογον τῶν p καὶ q. Ἴσως ὅμως καὶ νὰ μὴ ἔβλεπε κανένα ἐμπόδιον εἰς μίαν παράστασιν αὐτῆς τῆς μορφῆς, ἐφ' ὅσον εἶχεν ὑπ' ὄψιν του ὅτι τὰ μεγέθη m, n, p, q παρίστανον τοὺς ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι ἐλήφθησαν ἐκ τῆς ἐπὶ τοῦ ἐδάφους μετρήσεως τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου. Ὑπὲρ τῆς ἐκδοχῆς ταύτης συνηγορεῖ τὸ γεγονός, ὅτι ἡ μεθοδικὴ ἀντικατάστασις ἑνὸς μήκους ὑπὸ τοῦ μετροῦντος αὐτὸ ἀριθμοῦ ἀπαντᾶται, ὅπως θὰ ἴδωμεν εἰς τὸ ἑπόμενον κεφάλαιον, ἐκ συστήματος εἰς τὸν Διόφαντον, ὁ ὁποῖος, ἐν συνεχείᾳ δὲν ἐδίσταζε νὰ προσθέτῃ μεγέθη ἑτερογενῆ, ὡς εἶναι τὰ μήκη καὶ τὰ ἐμβαδά.

Τὸ δεύτερον παράδοξον εἶναι, ὅτι οὐδεὶς Ἕλλην συγγραφεὺς ἢ σχολιαστής, μεταγενέστερος τοῦ Ἥρωνος, ἔκαμε μνείαν τῆς σημαντικῆς αὐτῆς συμπληρώσεως τοῦ περιεχομένου τῶν Στοιχείων. Ἡ μόνη ἐξήγησις τῆς παραδόξου αὐτῆς σιωπῆς ἔγκειται καθ' ἡμᾶς εἰς τὸ γεγονός, ὅτι ὁ τύπος τοῦ Ἥρωνος ἐθεωρεῖτο ὑπὸ τῶν ἀρχαίων ὡς ἀνήκων εἰς τὸν κλάδον τῆς γεωδαισίας καὶ διὰ τοῦτο ξένος πρὸς τὸ πρόγραμμα τῆς καθαρᾶς γεωμετρίας. Ἐξήγησις καθόλου ἀβάσιμος, ἂν ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ὅτι

παρόμοιος ἐξοστρακισμὸς ἔπληξεν, ὅπως εἴδομεν, καὶ τὴν σφαιρικὴν γεωμετρίαν, θεωρουμένην τότε ἀποκλειστικῶς θεραπαινίδα τῆς Ἀστρονομίας. Καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις εὑρισκόμεθα ἐνώπιον ἑνὸς φαινομένου στείρας πεζότητος.

75. Εἰς τὸν Ἥρωνα ὀφείλεται ἓν ἄλλο ἐκτεταμένον ἔργον, εἰς τρία βιβλία, τοῦ ὁποίου τὸ πρωτότυπον ἀνεκαλύφθη τὸ 1896 εἰς τὴν Βιβλιοθήκην σουλτανικοῦ ἀνακτόρου τῆς Κωνσταντινουπόλεως, ὅταν ἡ κυβέρνησις τῶν νεοτούρκων ἤνοιξεν αὐτὴν εἰς τοὺς ἀπίστους, περιεχόμενον εἰς χειρόγραφον τοῦ XII αἰῶνος μ.Χ. Φέρει τὸν τίτλον Μετρικὰ καὶ δύναται νὰ χρησιμεύσῃ, καλύτερον οἱουδήποτε ἄλλου ἔργου του εἰς ἡμᾶς γνωστοῦ, εἰς τὸ νὰ καθορίσωμεν τὸ ἐπιστημονικὸν περίγραμμα τοῦ συγγραφέως του.

Τὸ ἔργον, ἀποβλέπον εἰς ζητήματα πρακτικῆς γεωμετρίας, δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ὑπόδειγμα τῶν ἀγγλοσαξωνικῶν ἐγχειριδίων, τὰ ὁποῖα κυκλοφοροῦν ὑπὸ τὸν τίτλον «Καταμέτρησις» (Mensuration), καθ' ὅσον διδάσκονται εἰς αὐτὸ οἱ ἀκολουθητέοι κανόνες πρὸς ἐκτίμησιν ἐπιφανειῶν καὶ ὄγκων καὶ ἐν συνεχείᾳ ἐφαρμόζονται ἐπὶ ἀριθμητικῶν παραδειγμάτων. Σημειωτέον ὅτι τὰ δεδομένα εἶναι πάντοτε ἀριθμοὶ ἀκέραιοι καὶ κατὰ τὸ πλεῖστον τοιοῦτοι, ὥστε, ὅπου ἀπαιτεῖται ἡ ἐξαγωγὴ τετραγωνικῆς ρίζης, τὰ ἐξαγόμενα νὰ εἶναι ἀριθμοὶ ρητοί.

Τὸ ἔργον ἀρχίζει μὲ ἕνα πρόλογον ἱστορικοῦ χαρακτῆρος, εἰς τὸν ὁποῖον τονίζεται ὅτι ἀρχικῶς μοναδικὸς σκοπὸς τῆς γεωμετρίας ἦτο ἡ μέτρησις τεμαχίων ἐδαφικῆς ἐπιφανείας (ἐξ οὗ καὶ τὸ ὄνομα τῆς ἐπιστήμης αὐτῆ;), κατόπιν ὅμως, ὀλίγον κατ' ὀλίγον, τὸ πρόγραμμα διεπλατύνθη διὰ τῆς ἐρεύνης ὄγκων καὶ ἐπιφανειῶν μὴ ἐπιπέδων. Τοῦτο ἔδωσε λαβὴν εἰς ἐρεύνας θεωρητικοῦ χαρακτῆρος, αἱ ὁποῖαι ἐπέτρεψαν εἰς τὸν Εὔδοξον καὶ τὸν Ἀρχιμήδη ν' ἀνακαλύψουν τὰς ἐκφράσεις, ποὺ δίδουν τοὺς ὄγκους τοῦ κώνου καὶ τῆς σφαίρας, ὡς καὶ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς τελευταίας.

Εἰς τὰς πρώτας προτάσεις τοῦ Βιβλίου I ὑπολογίζονται τὰ ἐμβαδὰ ὀρθογωνίων καὶ τριγώνων. Εἰς μερικὰ προβλήματα τῆς τελευταίας ταύτης κατηγορίας ὁ Ἥρων ἐφαρμόζει τὸν τύπον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου συναρτήσει τῶν πλευρῶν του, τὸν ὁποῖον φροντίζει προηγουμένως ν' ἀποδείξῃ μὲ τὸν ἴδιον συλλογισμὸν ποὺ ἀπαντᾶται εἰς τὴν Διόπτραν. Κατόπιν μεταβαίνει εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ἐμβαδοῦ τετραπλεύρων, ἐγγραψίμων ἢ μή, καὶ τέλος εἰς τὸν ὑπολογισμόν, κατ' ἐπαρκῆ προσέγγισιν, τῶν μηκῶν τῶν πλευρῶν κανονικῶν πολυγώνων 3, 5, ... ἢ 12 πλευρῶν. Ὅσον ἀφορᾷ δὲ τὰ πολύγωνα τῶν 9 καὶ 11 πλευρῶν, χρησιμοποιεῖ ἀποτελέσματα περιεχόμενα εἰς ἕνα ἔργον τοῦ Ἱππάρχου, τὸ ὁποῖον ἠδύνατο νὰ ἔχῃ εἰς τὴν διάθεσίν του. Ὅσον ἀφορᾷ τὰ ὑπόλοιπα, δὲν κατέφυγεν,

ἐξ ὅσων γνωρίζομεν, εἰ μὴ εἰς τὰς ἰδίας του δυνάμεις καὶ ἔφθασεν εἰς συμπεράσματα μὴ ἐστερημένα ἐνδιαφέροντος καὶ κομψότητος. Ἀναφέρομεν χάριν παραδείγματος τὸ ἀκόλουθον θεώρημα: «ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ ὀκταγώνου ἔχει λόγον πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου ἴσον κατὰ προσέγγισιν πρὸς 7/8». Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ἐμβαδοῦ πολυγώνου μὴ κανονικοῦ εἰσηγεῖται τὴν ἀνάλυσιν αὐτοῦ εἰς τρίγωνα, ἐνῷ διὰ τὸν ὑπολογισμόν τοῦ ἐμβαδοῦ ἑνὸς κύκλου στηρίζεται εἰς τὰ ἐξαγόμενα τοῦ Ἀρχιμήδους. Εἰς αὐτὸν καταφεύγει ἐπίσης, ὅταν θέλῃ νὰ εὕρῃ τὴν ἀκτῖνα κύκλου ἔχοντος δοθὲν ἐμβαδόν, νὰ ὑπολογίσῃ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κυκλικοῦ τμήματος ἢ δακτυλίου ἢ μιᾶς ἐλλείψεως, κωνικῆς ἐπιφανείας, σφαιρικῆς ζώνης.

Εἰς τὸ Βιβλίον II τῶν Μετρικῶν ὁ Ἥρων ἐκθέτει τόν τρόπον τῆς μετρήσεως ἑνὸς πλήθους στερεῶν, μερικὰ τῶν ὁποίων (ὅπως π.χ. τὰ κανονικὰ πολύεδρα) ἀπαντῶνται εἰς τὴν κλασσικὴν γεωμετρίαν, ἐνῷ ἄλλα (ὅπως π.χ. οἱ σωροὶ τῆς ἄμμου) ὑπαγορεύονται ἐκ τῶν ἀναγκῶν τῆς πράξεως· καὶ ἄλλα ἀκόμη ἀνήκουν εἰς ὑψηλοτέρας περιοχὰς τῆς ἐπιστήμης τοῦ διαστήματος. Σημειοῦμεν μεταξὺ τούτων, πρὸ πάντων, τὴν σπεῖραν ἢ δακτύλιον, τοῦ ὁποίου ὁ ὄγκος ὑπολογίζεται μὲ τὸν τύπον ποὺ εἴδομεν ἤδη ἐφαρμοζόμενον ἀπὸ τὸν Διονυσόδωρον (§ 54) καὶ τὸν ὁποῖον ὁ Ἥρων δικαιολογεῖ μετασχηματίζων τὸ στερεὸν εἰς κύλινδρον μὲ βάσιν τὸν γεννήτορα κύκλον καὶ ὕψος τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τῆς γραφομένης ὑπὸ τοῦ κέντρου του κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς παραγούσης τὴν σπεῖραν περιστροφικῆς κινήσεως. Εἶναι ὁ ἴδιος συλλογισμός, τὸν ὁποῖον ἐχρησιμοποίησε βραδύτερον ὁ Kepler διὰ τὸν αὐτὸν σκοπόν, ὡς θὰ ἴδωμεν ἐν καιρῷ. Ἄλλα στερεά, τὰ ὁποῖα ὑπολογίζει ὁ Ἥρων, εἶναι τὰ ἀπαντώμενα εἰς τὴν «Ἔφοδον» τοῦ Ἀρχιμήδους (§ 43).

Τὸ τελευταῖον βιβλίον τοῦ ἔργου πραγματεύεται ὄχι πλέον ζητήματα μετρήσεως, ἀλλὰ ζητήματα διαιρέσεως τῶν σχημάτων εἰς μέρη ἔχοντα μεταξύ των ἢ πρὸς τὸ ὅλον προκαθωρισμένας σχέσεις. Πρόκειται περὶ θέματος, τὸ ὁποῖον, ὅπως γνωρίζομεν (§ 38), ἐπραγματεύθη ἤδη ὁ Εὐκλείδης εἰς ἕνα ἀπολεσθὲν ἔργον, τοῦ ὁποίου ἡ ἀπώλεια καθίσταται αὐτὴν τὴν στιγμὴν ἰδιαιτέρως λυπηρά, διότι δὲν μᾶς εἶναι δυνατὸν νὰ προσδιορίσωμεν ὁποῖαι τροποποιήσεις καὶ προσθῆκαι ἐπηνέχθησαν ἀπὸ τὸν ἀλεξανδρινὸν γεωδαίτην. Ἱκανὴ ὅμως ἀποζημίωσις εἶναι ἡ χαρὰ ἐκ τῆς ἀνευρέσεως τῶν Μετρικῶν, διότι τὸ τελευταῖον μέρος τοῦ ἔργου τούτου μᾶς ἐπιτρέπει νὰ σχηματίσωμεν μίαν ἰδέαν περὶ τοῦ πῶς οἱ Ἕλληνες συνέλαβον καὶ ἐπραγματεύθησαν τὸ πρόβλημα τῆς διαιρέσεως τῶν ἐπιφανειῶν. Αἱ τελευταῖαι αὐταὶ σελίδες τοῦ ἔργου τοῦ Ἥρωνος, εἰδικῶς μάλιστα αἱ ἀφορῶσαι τὴν ἐπιπεδομετρίαν, ἔχουν γραφῆ ὑπὸ μορφὴν καθαρῶς εὐκλειδείου τύπου καί, χάρις εἰς τὴν σπουδαιότητα τῶν μεθόδων

καὶ τῶν ἀποτελεσμάτων, θὰ ἠδύναντο καὶ σήμερον ν' ἀποτελέσουν πολύτιμον συμπλήρωμα εἰς τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου.

Εἰς τὰ στερεομετρικὰ προβλήματα ἐπανεμφανίζονται οἱ ἀριθμοί. Μεταξὺ τῶν προβλημάτων τούτων, ἄξιον σημειώσεως τυγχάνει τὸ δύσκολον θέμα τῆς διαιρέσεως κολούρου ὀρθοῦ κώνου μὲ ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὰς βάσεις εἰς δύο τμήματα, τῶν ὁποίων οἱ ὄγκοι νὰ ἔχουν μεταξύ των δοθέντα λόγον. Ἀπαντᾶται ἐπίσης ἐδάφιον, δυστυχῶς πάρα πολὺ περιληπτικόν, γύρω ἀπὸ τὸ ἀρχιμήδειον πρόβλημα τῆς διαιρέσεως ὑπὸ ἐπιπέδου μιᾶς σφαίρας εἰς δύο μέρη, τῶν ὁποίων οἱ ὄγκοι νὰ ἔχουν μεταξύ των δοθέντα λόγον. Ἀξίζει τέλος νὰ σημειωθῇ, ὅτι τὰ Μετρικὰ ἀποτελοῦν τὸ μοναδικὸν τεκμήριον, τὸ δυνάμενον νὰ ρίψῃ ὀλίγον φῶς ἐπὶ τῆς μεθόδου, τὴν ὁποίαν ἠκολούθουν οἱ ἀρχαῖοι πρὸς εὕρεσιν τῶν κυβικῶν ριζῶν τῶν ἀριθμῶν.

Αἱ ἐνοχλητικαὶ ἀνομοιομορφίαι, αἱ ὁποῖαι ἐμφανίζονται σποραδικῶς εἰς τὴν μορφὴν τῆς ἐκθέσεως τῶν Μετρικῶν, δὲν πρέπει πιθανῶς ν' ἀποδοθοῦν εἰς τὸν Ἥρωνα, ἀλλὰ εἰς τοὺς μεταγενεστέρους ἐρανιστὰς καὶ ἀντιγραφεῖς, ἀλλ' οὔτε καὶ εἶναι ἱκαναὶ ν' ἀμαυρώσουν τὴν ἀξίαν ἑνὸς ὑπερόχου ἔργου, τὸ ὁποῖον καὶ ἂν ἀκόμη δὲν δύναται ν' ἀντιπαραβληθῇ πρὸς τὰ λοιπὰ ἀριστουργήματα τῆς ἀρχαίας γεωμετρίας, δικαιολογεῖ πλήρως τὴν ὑψηλὴν ἐκτίμησιν, τῆς ὁποίας ἔχαιρεν ὁ συγγραφεὺς μεταξὺ τῶν συγχρόνων καὶ τῶν ἀμέσως μεταγενεστέρων του.

Εἰς τὴν διαμόρφωσιν καὶ διάρκειαν τοῦ αἰσθήματος τούτου συνέβαλον χωρὶς ἀμφιβολίαν καὶ τὰ ἄλλα φυσικομαθηματικὰ ἔργα τοῦ Ἥρωνος, περὶ τῶν ὁποίων δὲν δυνάμεθα ἐδῶ νὰ ὁμιλήσωμεν, τὰ ὁποῖα ὅμως ἀνέδειξαν τὸν συγγραφέα ἐπιστημονικὸν πολυεδρικὸν πνεῦμα ἱκανώτατον τόσον δι' ἐρεύνας καθαρῶς θεωρητικοῦ χαρακτῆρος, ὅσον καὶ διὰ ποικίλας πρακτικὰς ἐφαρμογάς. Πνεύματα αὐτοῦ τοῦ εἴδους ἀνέδειξε καὶ ἡ Ἰταλία κατὰ τὴν Ἀναγέννησιν, ὅπως εἶναι π.χ. ἡ περίπτωσις τοῦ δαιμονίου Leonardo da Vinci καὶ τοῦ L. B. Alberti.

76. Ὁ Πτολεμαῖος καὶ ὁ Ἥρων, οἱ ἐξοχώτεροι ἐργάται τῶν ἐφηρμοσμένων μαθηματικῶν, τοὺς ὁποίους παρήγαγεν ἡ Ἑλλὰς καὶ τῶν ὁποίων τὰ ἔργα διέφυγον τὴν καταστρεπτικὴν μανίαν τοῦ χρόνου καὶ τῶν βαρβάρων, ἀποτελοῦν τὰς τελευταίας ἐξεχούσας προσωπικότητας τῆς ἀρχαίας γεωμετρικῆς γραμματείας. Μὲ τὴν ἐξαφάνισιν τῶν ἀνδρῶν τούτων ἀρχίζει ἡ περίοδος ἐκείνη τῆς παρακμῆς, ἡ ὁποία χαρακτηρίζεται ἀπὸ ἀναιμικοὺς μόνον σχολιαστὰς (§ 61 - 63).

Ὁ προνομιοῦχος λαὸς τῆς φύσεως, ὁ ὁποῖος ἐξεδήλωσε πρωτοτυπίαν ἀνυπέρβλητον μέχρι σήμερον εἰς τὴν ποίησιν καὶ τὴν ρητορικήν, εἰς τὴν γλυπτικὴν καὶ τὴν ἀρχιτεκτονικήν, εἰς τὴν φιλοσοφίαν καὶ ὅλας τὰς ἐπι-

στήμης τῆς καθαρᾶς διανοήσεως, ἀποβαίνει ἤδη βαθμηδὸν ὀλιγώτερον γόνιμος εἰς παραγωγὴν ἔργων διαρκοῦς ἀξίας, κατερχόμενος ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον τὴν μοιραίαν κατωφέρειαν, ἡ ὁποία θὰ τὸν φέρῃ τελικῶς εἰς τὴν διανοητικὴν κατάστασιν τῶν βαρβάρων ἐκείνων λαῶν, τοὺς ὁποίους, εἰς τὴν περίοδον τῆς ἀκμῆς του, ἐκάλυπτε μὲ δικαιολογημένην περιφρόνησιν.

Εἶναι μάταιον, κατὰ τὴν γνώμην μας, ν' ἀναζητήσωμεν μίαν καὶ μόνην αἰτίαν εἰς τὴν ἀξιοθρήνητον αὐτὴν τροπὴν τῆς μοίρας, ἔστω καὶ περιορίζοντες τὴν ἔρευναν μόνον εἰς τὸν τομέα τῶν ἐπιστημῶν, μὲ τὰς ὁποίας ἀσχολούμεθα. Ἀσφαλῶς ἡ αἰτία δὲν ἔγκειται εἰς τὸ ὅτι οἱ γεωμέτραι τῆς χρυσῆς περιόδου ἐξήντλησαν τὰ πεδία τῆς ἐρεύνης, τὰ ὁποῖα οὗτοι εἶχον ἀνοίξει καὶ καλλιεργήσει. Ἡ γεωμετρία πράγματι ἀνέμενεν ἀκόμη ἀνυπομόνως βελτιώσεις εἰς τὰς βάσεις της καὶ συμπληρώσεις εἰς τὴν κορυφήν. Εἰς τὴν θεωρίαν τῶν καμπύλων καὶ τῶν ἐπιφανειῶν μόνον σποραδικὰ καὶ ἐλλιπῆ ἐπιτεύγματα ἐγένοντο. Τέλος αἱ λαμπρόταται ἐφαρμογαί, ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους κυρίως, τῶν ἀπειροστικῶν μεθόδων τῆς ἐποχῆς, ἔπρεπε νὰ εἶχον χρησιμεύσει ὡς κίνητρον καὶ ὁδηγὸς εἰς τοὺς δυναμικωτέρους ἐκ τῶν μεταγενεστέρων μαθηματικῶν.

Οὔτε πρέπει νὰ νομίσωμεν, ὅτι αἱ τότε χρησιμοποιούμεναι μέθοδοι πρὸς ἀναζήτησιν τῆς ἀληθείας, μολονότι οὐχὶ ἀμέτοχοι ἀτελειῶν, ἀπέβαλον τὴν γονιμοποιὸν αὐτῶν δύναμιν, διότι θὰ ἴδωμεν περαιτέρω εἰς τὴν παροῦσαν ἱστορίαν ὅτι ὅταν, μετὰ πάροδον πολλῶν αἰώνων πνευματικῆς ναρκώσεως, ἀνέβλυσαν μετὰ δυνάμεως εἰς τοὺς ἀνθρώπους τόσον ἡ ἐπιθυμία αὐξήσεως τοῦ μαθηματικοῦ θησαυροῦ, ὅσον καὶ ἡ ἐνέργεια πρὸς ἐπιτυχίαν τοῦ σκοποῦ, αἱ αὐταὶ ἀκριβῶς μέθοδοι ἔδωσαν καρποὺς τόσον πολλοὺς καὶ οὐσιαστικούς, ὥστε ἐνεφάνισαν τὸ ἀρχαῖον δένδρον θαυματουργικῶς ζωογονούμενον καὶ ἀναβλαστάνον ἐκ βαθυτάτων ριζῶν.

Εἶναι πιθανόν, εἰς τὴν παρακμὴν καὶ τὸν θάνατον τῆς ἑλληνικῆς παραγωγικότητος νὰ συνετέλεσεν ἕνα αἴσθημα κοπώσεως ἢ ἀνίας ὅμοιον ἐκείνου ποὺ καταλαμβάνει ἕνα ἄτομον ἐπὶ μακρὸν ἀσχοληθὲν μὲ ἕνα καὶ τὸ αὐτὸ ἀντικείμενον, ἴσως ἀκόμη καὶ ἡ συνήθεια (μόδα), ἴσως τέλος αἱ πολιτικαὶ συνθῆκαι, ὑπὸ τὰς ὁποίας εὑρέθη ἡ Ἑλλὰς μετὰ τὸν θρίαμβον τῶν λατινικῶν ἀετῶν. Παρὰ ταῦτα δὲν πρέπει νὰ λησμονεῖται (εἰδικῶς μάλιστα ἀπὸ τὸ ἰταλικὸν ἔθνος) αὐτὸ ποὺ διδάσκει ἡ ἱστορία, ὅτι δηλαδὴ λαοὶ εἰς κατάστασιν δουλείας, διῃρημένοι καὶ διεσπαρμένοι, ἠδυνήθησαν ν' ἀντισταθοῦν νικηφόρως εἰς τὴν σκοταδιστικὴν ἐπίδρασιν ἀγροίκων καὶ ἀμορφώτων δεσποτῶν, και ν' ἀναπτύξουν περαιτέρω, ἀκριβῶς εἰς τὰς ἐρεύνας τὰς πλέον μεμακρυσμένας ἀπὸ τὴν ἐπαφὴν μὲ τὴν πραγματικότητα, τὴν ἀνεξίτηλον εὐφυΐαν των ὡς καὶ τὴν ἀκατάλυτον ἐθνικήν των ἑνότητα.

Ἐάν, μ' ὅλα ταῦτα, καμμία ἐκ τῶν περιστάσεων τούτων δὲν εἶναι ἐπαρκὴς διὰ νὰ ἐξηγήσῃ τὴν μοιραίαν ἐπέμβασιν τοῦ διαβρωτικοῦ σκώ-

ληκος εἰς τὴν μαθηματικὴν ἰδιοφυΐαν τῶν Ἑλλήνων, δὲν εἶναι ὅμως ἐξ ἄλλου δυνατὸν ν' ἀποκλεισθῇ a priori καμμία ἐξ αὐτῶν ἀπὸ τὸν κατάλογον τῶν πιθανῶν ἀποκρύφων αἰτιῶν ἑνὸς φαινομένου, τὸ ὁποῖον οὐδέποτε θὰ παύσῃ νὰ προκαλῇ ἄφατον θλῖψιν, τῆς ἐξαφανίσεως δηλαδὴ τοῦ ἑλληνικοῦ λαοῦ ἀπὸ τὸν κατάλογον τῶν φυλῶν, αἱ ὁποῖαι συνεχίζουν τὴν ἔρευναν τῆς ἀληθείας εἰς τὰ πεδία ἐκεῖνα καὶ μὲ τὰς μεθόδους ἐκείνας, διὰ τῶν ὁποίων ἐδοξάσθησαν ὁ Εὐκλείδης καὶ ὁ Ἀρχιμήδης, ὁ Ἀπολλώνιος καὶ ὁ Πάππος, ὁ Πτολεμαῖος καὶ ὁ Ἥρων.

Ἐν πάσῃ περιπτώσει, τὰ σπέρματα ποὺ ἔρριψαν οἱ κορυφαῖοι ἐκεῖνοι ἐπιστημονικοί μας προπάτορες, ταφέντα ὑπὸ τὴν παχεῖαν τέφραν τόσων αἰώνων, δὲν ἔχασαν οὔτε πολλοστημόριον τῆς γονιμοποιοῦ των δυνάμεως, ἀλλά, ὅπως θὰ μᾶς δοθῇ ἡ εὐκαιρία νὰ ἴδωμεν εἰς τὴν συνέχειαν τῆς ἱστορίας μας, ἐκεῖνο ποὺ ἐπὶ μίαν περίπου χιλιετηρίδα ἔδιδε τὴν ἐντύπωσιν ἑνὸς ἀποσκληρυνθέντος πτώματος, ἦτο προωρισμένον νὰ δώσῃ ζωὴν εἰς νέα ὄντα πλήρη σφρίγους, εἰς ἐπιβεβαίωσιν τοῦ αἰωνίου φυσικοῦ νόμου, κατὰ τὸν ὁποῖον ἐκ τοῦ θανάτου ἕλκει τὴν προέλευσίν της ἡ ζωή.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI

Η ΤΕΧΝΗ ΤΟΥ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΚΑΙ Η ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΤΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ ΕΙΣ ΤΟΥΣ ΕΛΛΗΝΑΣ

77. Ἕκαστον στερεὸν σῶμα, ἀνεξαρτήτως τῶν ἄλλων φυσικῶν του ἰδιοτήτων, κατέχει ἕνα ὡρισμένον σ χ ῆ μ α, τὸ ὁποῖον, ὅταν δὲν παρέμβουν εἰδικὰ αἴτια, παραμένει ἀναλλοίωτον καὶ διὰ τοῦτο ἀποτελεῖ χαρακτηριστικὸν γνώρισμα τοῦ σώματος. Ἐξ ἄλλου, ἂν θεωρήσωμεν μίαν τυχοῦσαν συλλογὴν διακεκριμένων ἀντικειμένων, ἀκόμη καὶ διαφόρου φύσεως μεταξύ των, καὶ ἀφαιρέσωμεν νοερῶς ὅλας τὰς φυσικὰς ἰδιότητας ἑκάστου, παραμένει τελικῶς εἰδικόν «τι», τὸ ὁποῖον ὀνομάζεται ἀ ρ ι θ μ ὸ ς τῶν ἀντικειμένων τῆς συλλογῆς.

Ἐκ τῶν δύο τούτων ἁπλῶν παρατηρήσεων ἀπορρέουν ὅλαι αἱ ἔννοιαι, τὰς ὁποίας ἀπαντῶμεν εἰς τὰ μαθηματικά. Εἰς τὴν ἔννοιαν τοῦ σχήματος, ἔπειτα ἀπὸ λογικὴν ἐπεξεργασίαν, ὀφείλει τὴν ὕπαρξίν της ἡ γ ε ω μ ε τ ρ ί α, ἐνῷ ἡ ἰδέα τοῦ ἀριθμοῦ ἀποτελεῖ τὸ σπέρμα, ἐκ τοῦ ὁποίου ἀνεβλάστησεν ἡ ἀ ρ ι θ μ η τ ι κ ή. Καὶ τὰς δύο αὐτὰς ἐπιστήμας ἐμελέτησε λίαν εὐδοκίμως ὁ ἑλληνικὸς λαός. Τὰ τέσσαρα πρῶτα κεφάλαια τῆς ἱστορίας μας ἀφιερώθησαν εἰς τοὺς Ἕλληνας ἐκείνους, οἱ ὁποῖοι ἐκαλλιέργησαν μὲ ἰδιαιτέραν ἐπιτυχίαν τὴν ἐπιστήμην τοῦ διαστήματος.

Πρέπει τώρα ν' ἀναλάβωμεν ἀνάλογον ἔρευναν ἀναφορικῶς πρὸς τὴν τέχνην τοῦ ἀριθμητικοῦ λογισμοῦ καὶ τὴν ἐπιστήμην τῶν ἀριθμῶν. Τοῦτο, ἐκτὸς τῶν ἄλλων, θὰ μᾶς δώσῃ τὴν εὐκαιρίαν νὰ καταστήσωμεν περισσότερον σύμφωνον πρὸς τὴν ἀλήθειαν τὴν εἰκόνα ποὺ ἐδώσαμεν ἤδη διὰ μερικοὺς ἐξέχοντας ἐπιστήμονας, τῶν ὁποίων ἐξητάσαμεν προηγουμένως τὴν ἐκπληκτικὴν δημιουργίαν εἰς τὸν τομέα τῆς γεωμετρίας.

Ἀλλ' ὅπως εἰς μίαν φιλολογικὴν ἱστορίαν οἱουδήποτε λαοῦ, χρειάζεται νὰ τεθοῦν προηγουμένως, ὡς βάσις, ἀκριβεῖς πληροφορίαι γύρω ἀπὸ τὸ ἀλφάβητον καὶ τὴν γλῶσσαν τοῦ λαοῦ τούτου, τοιουτοτρόπως καὶ ἐδῶ, προκειμένου νὰ ἐκθέσωμεν τὴν ἀριθμητικὴν δημιουργίαν τῶν Ἑλλήνων, θὰ χρειασθῇ νὰ ἐξετάσωμεν προηγουμένως τοὺς τρόπους τοὺς ὁποίους ἐχρησιμοποίησαν οὗτοι, διὰ νὰ παραστήσουν προφορικῶς ἢ γρα-

πτῶς τοὺς ἀριθμοὺς τῆς φυσικῆς σειρᾶς καὶ νὰ ἐκτελέσουν ἀριθμητικοὺς ὑπολογισμοὺς βαθμηδὸν ἀναγκαιοτέρους καὶ πολυπλοκωτέρους, ὅσον αἱ δραστηριότητες τοῦ κοινωνικοῦ βίου εἰς τὸ ἐμπόριον, τὰς τέχνας, τὰς ἐπιστήμας κλπ. ἀπέβαινον ἀνώτεραι εἰς βάθος καὶ ἔκτασιν.

Τὸ ἀλφάβητον τῆς ἀριθμητικῆς διαλέκτου τῶν Ἑλλήνων

78. Ἡ προφορικὴ καὶ γραπτὴ ἀρίθμησις ἀποτελοῦν τὰ δύο βασικὰ μέσα ἐκφράσεως εἰς τὸν τομέα τῆς ἀριθμητικῆς.

Οἱ Ἕλληνες, ἐφαρμόζοντες μίαν γενικὴν ἰδέαν, περὶ τῆς ὁποίας ὡμιλήσαμεν (§ 2), ἐχρησιμοποίησαν ἕνα σύστημα ἀριθμήσεως ἔχον ὡς «βάσιν» τὸν ἀριθμὸν 10, εἰς τὸν ὁποῖον μάλιστα, καθὼς καὶ εἰς τὸν ἀριθμὸν 20, ἔδωσαν διακεκριμένην θέσιν. Πράγματι οἱ πρῶτοι δέκα ἀριθμοὶ εἶχον εἰδικὰ ὀνόματα, μὲ τὴν βοήθειαν τῶν ὁποίων, κατὰ παράθεσιν, ἐσχηματίζοντο τὰ ὀνόματα τῶν ἀριθμῶν 11, 12, . . . , 19. Ἀλλὰ διὰ τὸν ἀριθμὸν 20 ἔδωσαν νέον ὄνομα, μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ ὁποίου κατεσκεύασαν φυσικώτερα τὰ ὀνόματα τῶν ἀριθμῶν 21, 22, . . . , 29. Δοθέντος νέου ὀνόματος εἰς τὸ 30, προώθησαν ἐντελῶς ἀναλόγως τὰ ὀνόματα τῶν ἀριθμῶν 40, 50, 60,.. μέχρι τοῦ 99. Ἀφοῦ κατεσκεύασαν ἔπειτα ὀνόματα διὰ τοὺς ἀριθμοὺς 100, 1000, 10000, ἠδυνήθησαν νὰ ὀνομάσουν ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς κάτω τῆς μυριάδος. Εἰς τὸ ὅριον τοῦτο φαίνεται, ὅτι οἱ Ἕλληνες εἶχον ἐπὶ μακρὸν χρόνον σταματήσει, μὴ πιεζόμενοι ἐκ πρακτικῆς ἀνάγκης νὰ τὸ ὑπερβοῦν.

Ἀφοῦ ἔδωσαν ὀνόματα εἰς ὅλα τὰ ἄτομα ποὺ ἀπετέλουν τὸν ἀριθμητικὸν πληθυσμὸν τῆς μυριάδος, ἠδυνήθησαν οἱ Ἕλληνες νὰ κάμουν τὰς πρώτας ἀριθμητικὰς πράξεις (πρόσθεσιν, ἀφαίρεσιν, πολλαπλασιασμὸν) εἰς τὰς ἁπλουστέρας περιπτώσεις ἀπὸ μνήμης, εἰς δὲ τὰς πολυπλοκωτέρας βοηθούμενοι ἀπὸ τὰ δάκτυλα, ἀπὸ πεσσοὺς ἢ χάλικας (calcoli διὰ τοὺς Λατίνους, ἐξ οὗ καὶ ἡ λατινικὴ λέξις calcolare = ὑπολογίζω) ἢ τέλος χρησιμοποιοῦντες ἕνα «ἄβακα», δηλαδὴ πινακίδα καλυπτομένην μὲ κόνιν, τοῦ ὁποίου τὴν χρῆσιν, ὡς λέγεται, διέδωσεν ὁ Πυθαγόρας εἰς τοὺς ὁμοεθνεῖς του. Ἂς σημειωθῇ ὅτι, ἐνῷ εὑρισκόμεθα εἰς τὸ σκότος ὅσον ἀφορᾷ τὰ ἀριθμητικὰ ὄργανα τῶν Ἑλλήνων, ὁ Νικόλας Ἀρταβάσδος ἢ Ραβδᾶς, καταγόμενος ἐκ Σμύρνης καὶ ζήσας ἐν Κωνσταντινουπόλει κατὰ τὸ 1340 μ.Χ., εἰς δύο ἐπιστολάς του, περὶ τῶν ὁποίων θὰ ὁμιλήσωμεν ἐκτενέστερον (§ 97), κατέλιπεν ἐξαντλητικὰς πληροφορίας γύρω ἀπὸ τὴν χρῆσιν τῶν δακτύλων εἰς τὴν ἐκτέλεσιν ἀριθμητικῶν πράξεων.

79. Ἀλλὰ τὸ ἰσχυρότερον βοηθητικὸν μέσον, διὰ τὸν εὑρισκόμενον εἰς τὴν ἀνάγκην νὰ ἐκτελῇ ὑπολογισμούς, ὑπῆρξεν εἰς κάθε τόπον καὶ

πτῶς τοὺς ἀριθμοὺς τῆς φυσικῆς σειρᾶς καὶ νὰ ἐκτελέσουν ἀριθμητικοὺς ὑπολογισμοὺς βαθμηδὸν ἀναγκαιοτέρους καὶ πολυπλοκωτέρους, ὅσον αἱ δραστηριότητες τοῦ κοινωνικοῦ βίου εἰς τὸ ἐμπόριον, τὰς τέχνας, τὰς ἐπιστήμας κλπ. ἀπέβαινον ἀνώτεραι εἰς βάθος καὶ ἔκτασιν.

Τὸ ἀλφάβητον τῆς ἀριθμητικῆς διαλέκτου τῶν Ἑλλήνων

78. Ἡ προφορικὴ καὶ γραπτὴ ἀρίθμησις ἀποτελοῦν τὰ δύο βασικὰ μέσα ἐκφράσεως εἰς τὸν τομέα τῆς ἀριθμητικῆς.

Οἱ Ἕλληνες, ἐφαρμόζοντες μίαν γενικὴν ἰδέαν, περὶ τῆς ὁποίας ὡμιλήσαμεν (§ 2), ἐχρησιμοποίησαν ἕνα σύστημα ἀριθμήσεως ἔχον ὡς «βάσιν» τὸν ἀριθμὸν 10, εἰς τὸν ὁποῖον μάλιστα, καθὼς καὶ εἰς τὸν ἀριθμὸν 20, ἔδωσαν διακεκριμένην θέσιν. Πράγματι οἱ πρῶτοι δέκα ἀριθμοὶ εἶχον εἰδικὰ ὀνόματα, μὲ τὴν βοήθειαν τῶν ὁποίων, κατὰ παράθεσιν, ἐσχηματίζοντο τὰ ὀνόματα τῶν ἀριθμῶν 11, 12, . . . , 19. Ἀλλὰ διὰ τὸν ἀριθμὸν 20 ἔδωσαν νέον ὄνομα, μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ ὁποίου κατεσκεύασαν φυσικώτερα τὰ ὀνόματα τῶν ἀριθμῶν 21, 22, . . . , 29. Δοθέντος νέου ὀνόματος εἰς τὸ 30, προώθησαν ἐντελῶς ἀναλόγως τὰ ὀνόματα τῶν ἀριθμῶν 40, 50, 60,.. μέχρι τοῦ 99. Ἀφοῦ κατεσκεύασαν ἔπειτα ὀνόματα διὰ τοὺς ἀριθμοὺς 100, 1000, 10000, ἠδυνήθησαν νὰ ὀνομάσουν ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς κάτω τῆς μ υ ρ ι ά δ ο ς. Εἰς τὸ ὅριον τοῦτο φαίνεται, ὅτι οἱ Ἕλληνες εἶχον ἐπὶ μακρὸν χρόνον σταματήσει, μὴ πιεζόμενοι ἐκ πρακτικῆς ἀνάγκης νὰ τὸ ὑπερβοῦν.

Ἀφοῦ ἔδωσαν ὀνόματα εἰς ὅλα τὰ ἄτομα ποὺ ἀπετέλουν τὸν ἀριθμητικὸν πληθυσμὸν τῆς μυριάδος, ἠδυνήθησαν οἱ Ἕλληνες νὰ κάμουν τὰς πρώτας ἀριθμητικὰς πράξεις (πρόσθεσιν, ἀφαίρεσιν, πολλαπλασιασμὸν) εἰς τὰς ἁπλουστέρας περιπτώσεις ἀπὸ μνήμης, εἰς δὲ τὰς πολυπλοκωτέρας βοηθούμενοι ἀπὸ τὰ δάκτυλα, ἀπὸ πεσσοὺς ἢ χάλικας (calcoli διὰ τοὺς Λατίνους, ἐξ οὗ καὶ ἡ λατινικὴ λέξις calcolare = ὑπολογίζω) ἢ τέλος χρησιμοποιοῦντες ἕνα «ἄβακα», δηλαδὴ πινακίδα καλυπτομένην μὲ κόνιν, τοῦ ὁποίου τὴν χρῆσιν, ὡς λέγεται, διέδωσεν ὁ Πυθαγόρας εἰς τοὺς ὁμοεθνεῖς του. Ἂς σημειωθῇ ὅτι, ἐνῷ εὑρισκόμεθα εἰς τὸ σκότος ὅσον ἀφορᾷ τὰ ἀριθμητικὰ ὄργανα τῶν Ἑλλήνων, ὁ Νικόλας Ἀρταβάσδος ἢ Ραβδᾶς, καταγόμενος ἐκ Σμύρνης καὶ ζήσας ἐν Κωνσταντινουπόλει κατὰ τὸ 1340 μ.Χ., εἰς δύο ἐπιστολάς του, περὶ τῶν ὁποίων θὰ ὁμιλήσωμεν ἐκτενέστερον (§ 97), κατέλιπεν ἐξαντλητικὰς πληροφορίας γύρω ἀπὸ τὴν χρῆσιν τῶν δακτύλων εἰς τὴν ἐκτέλεσιν ἀριθμητικῶν πράξεων.

79. Ἀλλὰ τὸ ἰσχυρότερον βοηθητικὸν μέσον, διὰ τὸν εὑρισκόμενον εἰς τὴν ἀνάγκην νὰ ἐκτελῇ ὑπολογισμούς, ὑπῆρξεν εἰς κάθε τόπον καὶ

χρόνον ἡ γραφή. Ὁ ἁπλούστερος καὶ φυσικώτερος τρόπος διὰ νὰ παραστήσωμεν ἕνα ἀριθμὸν γραφικῶς συνίσταται προφανῶς εἰς τὴν ἐπανάληψιν ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ συμβόλου τόσας φορὰς ὅσαι αἱ μονάδες, τὰς ὁποίας περιέχει. Αὐτὴ ἡ μέθοδος θὰ πρέπει νὰ ἦλθεν αὐτομάτως εἰς τὸν νοῦν τῶν Ἑλλήνων, ἀφ' ἧς ἡμέρας ὁ Θαλῆς ἐδίδαξεν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς δὲν εἶναι τίποτε ἄλλο ἀπὸ μία συλλογὴ μονάδων. Καὶ πράγματι, μία ἐπιγραφή, ἡ ὁποία ἀνάγεται εἰς τὸ 391 π.Χ., ἀποδεικνύει ὅτι μία τοιαύτη μέθοδος γραφῆς τῶν ἀριθμῶν ἦτο ἐν χρήσει εἰς τοὺς Ἕλληνας τῆς ἐποχῆς ταύτης.

Ἀλλ' εἶναι βεβαίως προφανές, ὅτι ἡ μέθοδος αὕτη δύναται νὰ χρησιμεύσῃ μόνον δι' ἀριθμοὺς μικρούς, διότι ὅταν πρόκειται περὶ ἀριθμοῦ περιέχοντος μέγα πλῆθος μονάδων, καταντᾷ δύσχρηστος εἰς τὸν γράφοντα καὶ δυσανάγνωστος εἰς ἐκεῖνον, ὁ ὁποῖος ἐπιθυμεῖ ν' ἀναγνωρίσῃ τὸ ἀποτέλεσμα. Κατὰ ποίαν ἐποχὴν οἱ Ἕλληνες ἔλαβον συνείδησιν τῶν ἐλαττωμάτων τοῦ συστήματος τούτου εἶναι ἄγνωστον. Γνωρίζομεν μόνον ὅτι τὸ ἐγκατέλειψαν διὰ νὰ ἐφαρμόσουν ἕν' ἄλλο, τοῦ ὁποίου ἔδωσεν ἀκριβῆ περιγραφὴν ὁ Ἕλλην γραμματικὸς Ἡρωδιανὸς (170 - 240 μ.Χ.), τοῦ ὁποίου καὶ φέρει ἀκόμη σήμερον τὸ ὄνομα.

Κατὰ τὸ σύστημα τοῦτο αἱ ἀριθμοί:

1 5 10 100 1000 10000

παριστάνονται ἀντιστοίχως μὲ τὰ γράμματα:

Ι Π Δ Η Χ Μ

Τοποθετοῦντες κατόπιν ἕνα τῶν γραμμάτων

Δ Η Χ Μ

μεταξὺ τῶν σκελῶν τοῦ γράμματος Π, ἔδωσαν σύμβολα διὰ τοὺς ἀριθμούς:

50 500 5000 50000

Οἱ ἐνδιάμεσοι ἀκέραιοι ἠδύναντο πλέον νὰ παρασταθοῦν διὰ παραθέσεως καὶ ἐπαναλήψεως μερικῶν ἐκ τῶν συμβόλων τούτων καταλλήλως ἐκλεγομένων.

Μὲ τὴν πάροδον τοῦ χρόνου ἀπεκαλύπτετο ἡ ἀνεπάρκεια καὶ τοῦ συστήματος τούτου, τοῦ ὁποίου τελικῶς παρέμεινεν ἡ χρῆσις μόνον εἰς τὰς ἐπιγραφάς, ὅπως ἔγινε τὸ ἀνάλογον μὲ ἡμᾶς σήμερον σχετικῶς πρὸς τὰ σύμβολα τῶν λατινικῶν ἀριθμῶν.

Διὰ τὰς καθημερινὰς ἀνάγκας, ἐπὶ βασιλείας Πτολεμαίου τοῦ Φιλαδέλφου (ΙΙΙ αἰὼν π.Χ.), ἤρχισε νὰ γίνεται χρῆσις μιᾶς ἄλλης γραπτῆς ἀριθμήσεως, εἰς τὴν ὁποίαν τὰ 21 γράμματα τοῦ ἰωνικοῦ ἀλφαβήτου, ἐμπλουτισθέντα μὲ 3 ἄλλα σύμβολα (τὸ στίγμα ς' = 6, τὸ κόππα ϟ' = 90, τὸ σαμπῖ ϡ = 900) προερχόμενα ἀπὸ ἀρχαιότερον ἐγκατα-

λειφθὲν ἀλφάβητον, ἐχρησιμοποιοῦντο διὰ τὴν γραφὴν τῶν ἀριθμῶν:

1, 2 . . ., 9, 10, 20, 90, 100, 200, . . ., 900.

Διὰ παραθέσεως τῶν μονάδων εἰς τὰς δεκάδας καὶ τῶν δεκάδων εἰς τὰς ἑκατοντάδας παρήγοντο ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ κάτω τοῦ 1000, κατ' ἐφαρμογὴν τοῦ «νόμου τοῦ Hankel» (§ 2). Θέτοντες τώρα μίαν κεραίαν πρὸς τὰ κάτω καὶ ἀριστερὰ εἰς τὰ ἀνωτέρω σύμβολα, ὑπενόουν τὰς χιλιάδας (͵α = 1000, ͵β = 2000, κλπ.). Τοιουτοτρόπως χωρὶς νὰ ἐγκαταλείψουν τὴν γενικὴν ἀρχὴν τοῦ συστήματος, ἐπέτυχον μὲ τὸ ἴδιον ὄχημα νὰ διατρέξουν ἀκόμη εὐρύτερον ἀριθμητικὸν διάστημα (μέχρι τοῦ ἑκατομμυρίου). Εἶναι σκόπιμον νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ τοῦ τύπου $a \cdot 10^r$, ὅπου a ἀριθμὸς τῆς πρώτης δεκάδος, ἐνῷ r οἱοσδήποτε ἀκέραιος, ἔχουν μερικὰς κοινὰς ἰδιότητας, τὰς ὁποίας καθιστᾷ ἀμέσως φανερὰς τὸ ἰδικόν μας σύστημα ἀριθμήσεως. Αὗται ὅμως εἶναι πολὺ δυσδιάκριτοι εἰς ἐκεῖνον ὁ ὁποῖος χρησιμοποιεῖ τὴν γραπτὴν ἀρίθμησιν τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων. Διὰ νὰ θεραπεύσουν τὸ μειονέκτημα τοῦτο οἱ ἀρχαῖοι εἰσήγαγον τὴν ἔννοιαν τοῦ «πυθμένος» ἑνὸς ἀριθμοῦ πολλαπλασίου τοῦ 10, καλοῦντες οὕτω αὐτὸ ποὺ ὀνομάζομεν σήμερον «ψηφίον» καὶ περιέλαβον εἰς ὅλα τὰ ἐγχειρίδια ἀριθμητικῆς ἕνα πίνακα περιέχοντα τοὺς πυθμένας τῶν ἀριθμῶν τούτων.

Τὴν ἀναμφισβήτητον πρακτικὴν χρησιμότητα αὐτῆς τῆς ἰδέας ἐξήγησεν ἐπαρκῶς ὁ Ἀπολλώνιος ὁ Περγαῖος εἰς ἀπολεσθὲν ἔργον του, τὸ ὁποῖον ἐσχολίασεν ὁ Πάππος εἰς τὸ Βιβλίον ΙΙ τῆς Μαθηματικῆς Συναγωγῆς, ὡς προκύπτει ἀπὸ τὸ περισωθὲν ἀπόσπασμα τούτου.

Τὸ τελευταῖον σύστημα γραπτῆς ἀριθμήσεως τῶν Ἑλλήνων παρουσιάζει μεγάλην ὁμοιότητα πρὸς ἐκεῖνο ποὺ ἐφηρμόζετο εἰς γραπτὰ τῶν Ἑβραίων. Ἐπὶ πολὺν χρόνον ἐθεωρεῖτο, ἄνευ συζητήσεως, ὅτι οἱ Ἑβραῖοι εἶχον διδάξει τοῦτο εἰς τοὺς Ἕλληνας, οἱ ὁποῖοι καὶ ἐγκατέλειψαν τὸ Ἡρωδιανὸν σύστημα. Προσφάτως ὅμως εὑρέθησαν ἄριστα δοκουμέντα πείθοντα ὅτι οἱ Ἕλληνες ἐδίδαξαν εἰς τοὺς Ἑβραίους τὴν χρῆσιν τῶν γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου πρὸς παράστασιν τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν. Εἰς ἀπόδειξιν τούτου συμβάλλει τὸ γεγονός, ὅτι τοιαύτη χρῆσις — τοὐλάχιστον ἐξ ὅσων μανθάνομεν ἐκ τῶν ὑφισταμένων πηγῶν — δὲν παρατηρεῖται εἰς τοὺς ἀπογόνους τοῦ Μωϋσέως πέραν τοῦ ΙΙ αἰῶνος π.Χ.

80. Ἐνῷ ἀπόκειται εἰς τοὺς εἰδικοὺς ἑρμηνευτὰς τῆς Βίβλου καὶ τῆς ἑλληνικῆς φιλολογίας ἡ ἔκδοσις ὁριστικῆς ἀποφάσεως ἐπὶ τοῦ τελευταίου τούτου ἐνδιαφέροντος ἱστορικοῦ ζητήματος, ἐγείρεται ἕν' ἄλλο καθαρῶς ἐπιστημονικὸν ζήτημα ἐν σχέσει πρὸς τὸ ἀριθμητικὸν σύστημα τῶν Ἑλλήνων, νὰ προσδιορισθοῦν δηλαδὴ τὰ ὅρια τῆς ἀριθμητικῆς περιοχῆς τὴν ὁποίαν διέπει τὸ σύστημα τοῦτο. Τὸ πρόβλημα ἀνέκυψε πολὺ ἐνωρὶς καὶ μάλιστα μὲ τόσην θεμελιώδη σημασίαν, ὥστε ὁ Ἀρχιμήδης δὲν ἐθεώ-

ρησεν ἀσχολίαν ἀναξίαν λόγου νὰ γράψῃ εἰδικὸν σύγγραμμα, ἀπευθυνόμενον πρὸς τὸν Ζεύξιππον, ὑπὸ τὸν τίτλον Ἀ ρ χ α ί, τὸ ὁποῖον ὅμως, ἀτυχῶς δι' ἡμᾶς, δὲν περιεσώθη.

Ἀλλ' εὐτυχῶς ἡ πεμπτουσία τῆς ἐργασίας αὐτῆς περιέχεται εἰς ἓν' ἄλλο μικρὸν ἔργον του, περισωθέν, τὸ ὁποῖον ὁ ἴδιος εἶχεν ἀφιερώσει εἰς τὸν βασιλέα Γέλωνα. Τὸ ἔργον αὐτὸ φέρεται εἰς τὴν ἑλληνικὴν ὑπὸ τὸν τίτλον Ψ α μ μ ί τ η ς, εἰς δὲ τὰς πρώτας λατινικὰς μεταφράσεις ἀπεδόθη μὲ τὸν τίτλον De numero arenae ἢ Arenarius.

Ἡ αἰτιολογία τοῦ περιέργου αὐτοῦ τίτλου ἔγκειται εἰς τὸ γεγονός, ὅτι εἰς τὸ ἔργον, περὶ τοῦ ὁποίου πρόκειται, ὁ μέγας Συρακούσιος ἔθεσεν ὡς σκοπὸν ν' ἀποδείξῃ ἀβάσιμον τὸν ἰσχυρισμὸν (περὶ τοῦ ὁποίου κάποιο ἴχνος ὑπὸ ποιητικὸν ἔνδυμα ἀπαντᾶται εἰς τὴν Βίβλον), ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν κόκκων τῆς ἄμμου, ποὺ ὑφίστανται εἰς τὸν κόσμον, ὡς ἄπειρος, δὲν δύναται νὰ ἐκφρασθῇ μὲ τὰ ἐν χρήσει ἀριθμητικὰ σημεῖα. Διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὸν σκοπὸν ὁ Ἀρχιμήδης ἀναλαμβάνει ν' ἀποδείξῃ ὅτι, ἀντιθέτως, εἶναι δυνατὸν νὰ παρασταθῇ γραφικῶς ὁ ἀριθμὸς τῶν κόκκων τῆς ἄμμου, ἡ ὁποία πληροῖ μίαν σφαῖραν ὁμόκεντρον τῆς γῆς καὶ φθάνουσαν μέχρι τῶν ἀπλανῶν ἀστέρων, σφαῖραν ἡ ὁποία (ὅπως ἀποδεικνύει) ἔχει διάμετρον μὴ ὑπερβαίνουσαν τὰ 10^{10} στάδια.

Ἀφοῦ θέσει προηγουμένως μερικὰς ἐννοίας καὶ ἰδέας ἀστρονομικοῦ χαρακτῆρος, προβαίνει κατόπιν εἰς τὴν παρατήρησιν ὅτι ἐδόθησαν ὀνόματα εἰς τοὺς ἀριθμοὺς τοὺς μὴ ὑπερβαίνοντας τὴν μυριάδα καὶ ὅτι δι' ἀριθμοὺς μεγαλυτέρους δὲν γίνεται τίποτε ἄλλο παρὰ νὰ ἐπαναλαμβάνεται μία μυριὰς μέχρι μυρίων μυριάδων. Ἂς ὀνομασθοῦν λοιπὸν «πρῶτοι ἀριθμοὶ» ὅλοι οἱ οὕτω προκύπτοντες $\leqslant 10^8 = 100.000.000$, καὶ «μονὰς τῶν δευτέρων ἀριθμῶν» ἡ μυριὰς μυριάδων τοῦ μεγίστου πρώτου ἀριθμοῦ. Μὲ τὴν νέαν αὐτὴν μονάδα ἂς ἀριθμήσωμεν κατὰ δεκάδας, ἑκατοντάδας, χιλιάδας καὶ μυριάδας μέχρι μιᾶς μυριάδος μυριάδων (10^8). Μία μυριὰς μυριάδων μονάδων δευτέρων ἀριθμῶν ἤτοι ὁ ἀριθμὸς $10^{8.2}$, ἔστω «μονὰς τῶν τρίτων ἀριθμῶν». Καὶ μὲ τὴν ἰδίαν μέθοδον προχωροῦμεν μέχρις ὅτου φθάσωμεν τὸν ἀριθμὸν $10^{8.10^8}$, δηλαδὴ τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος ἐκφράζεται γραπτῶς ὑπὸ τῆς μονάδος ἀκολουθουμένης ὑπὸ 800 ἑκατομμυρίων μηδενικῶν.

Ἐξακολουθεῖ ὁ Ἀρχιμήδης παρατηρῶν ὅτι, ἂν καὶ τὸ πλῆθος τῶν ἀριθμῶν τούτων εἶναι πλουσιώτατα ἐπαρκὲς διὰ νὰ ἐπιτύχῃ τὸν προταθέντα σκοπόν, εἶναι μολοντοῦτο εὔκολον νὰ προχωρήσωμεν ἀναλόγως, πολὺ περισσότερον. Πράγματι ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ ποὺ δὲν ὑπερβαίνουν τὸν $10^{8.10^8}$ ἂς ὀνομασθοῦν «ἀριθμοὶ πρώτης περιόδου» καὶ εἰς τὸν τελευταῖον τῆς περιόδου ταύτης ἂς δοθῇ τὸ ὄνομα «μονὰς τῶν πρώτων ἀριθμῶν τῆς

δευτέρας περιόδου». Ἀριθμοῦμεν τώρα μὲ αὐτοὺς μέχρις ὅτου φθάσωμεν τὸν ἀριθμὸν

$$10^8 \cdot 10^{8 \cdot 10^8} = 10^{8(10^8+1)}$$

καὶ ἂς κληθῇ οὗτος «μονὰς τῶν δευτέρων ἀριθμῶν τῆς δευτέρας περιόδου». Προχωροῦμεν ἀναλόγως φθάνοντες διαδοχικῶς τὰς μονάδας

$$10^{8(10^8+2)},\ 10^{8(10^8+3)}, \ldots,$$

μέχρι τοῦ ἀριθμοῦ $10^{2 \cdot 8 \cdot 10^8}$. Τοιουτοτρόπως θὰ ἔχουν ληφθῆ ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ τῆς β' περιόδου. Ὁ τελευταῖος τούτων θὰ ἐκφράζεται ὑπὸ τῆς μονάδος ἀκολουθουμένης ὑπὸ 1600 ἑκατομμυρίων μηδενικῶν.

Εἶναι δυσκολώτατον νὰ λάβωμεν ἐμπειρικὴν εἰκόνα τοῦ μεγέθους τοιούτου ἀριθμοῦ. Διὰ νὰ σχηματίσωμεν κάπως μίαν ἰδέαν, θὰ ἦτο ἴσως σκόπιμον νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὰς ἀκολούθους σκέψεις.

α) Ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι ἕνα ψηφίον κατέχει γραμμικῶς εἰς τὸν χάρτην διάστημα 2 mm, διὰ νὰ γράψωμεν 1600 ἑκ. μηδενικά, τὸ ἕνα κατόπιν τοῦ ἄλλου, χρειάζεται μία ταινία μήκους 3.200.000 μέτρων ἢ 3.200 χιλιομέτρων, ἡ ὁποία ἀντιπροσωπεύει διάστημα διανυόμενον ἀπὸ ταχύτατον συρμὸν εἰς 32 ὥρας.

β) Ἂν, διὰ ν' ἀποφύγωμεν τὴν χρῆσιν μιᾶς τόσον δυσχρήστου ταινίας, προτιμήσωμεν νὰ καταχωρήσωμεν τὸν ἀριθμὸν εἰς βιβλίον, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι οἱ συνήθεις πίνακες λογαρίθμων περιέχουν εἰς ἑκάστην σελίδα 50 γραμμάς, ἑκάστη τῶν ὁποίων περιέχει 50 ψηφία, ὅθεν εἰς ἑκάστην σελίδα εἰσέρχονται 2500 ψηφία. Διὰ νὰ γράψωμεν λοιπὸν τὸν ἀριθμὸν περὶ οὗ πρόκειται χρειάζονται 640.000 σελίδες, δηλαδὴ 1280 τόμοι τῶν 500 σελίδων ἕκαστος· μία ὁλόκληρος βιβλιοθήκη!

γ) Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν, ὅτι διὰ νὰ γράψωμεν ἕνα ψηφίον χρειαζόμεθα κάτι ὀλιγώτερον τοῦ ἑνὸς δευτερολέπτου, εἰς μίαν ὥραν (3600 sec) θὰ ἠμπορέσωμεν νὰ γράψωμεν περίπου 4000 ψηφία καὶ 40000 εἰς μίαν ἡμέραν δεκαώρου συνεχοῦς ἐργασίας. Ὅθεν διὰ νὰ γράψωμεν τὸν περὶ οὗ ὁ λόγος ἀριθμὸν θὰ χρειασθῶμεν 40000 ἡμέρας, περισσοτέρας δηλαδὴ μιᾶς ζωῆς πλήρους δραστηριότητος!

81. Ὁ Ἀρχιμήδης σταματᾷ εἰς τὸν τελευταῖον ἀριθμὸν τῆς δευτέρας περιόδου, χωρὶς νὰ παραλείψῃ τὴν παρατήρησιν, ὅτι ἡ ὑπ' αὐτοῦ ὑποδεικνυομένη μέθοδος γενέσεως ἀριθμῶν ὁλονὲν μεγαλυτέρων δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ ἀπεριορίστως, ὅπως εἶναι εὔκολον νὰ πεισθῇ οἱοσδήποτε. Πρὸς διευκόλυνσιν τοῦ ὑπολογισμοῦ μὲ τὰς νέας ἀριθμητικὰς ὀντότητας τοῦ Ἀρχιμήδους, οὗτος ἀποκαθιστᾷ τὸ θεώρημα, τὸ ὁποῖον ἐκφράζομεν σήμερον διὰ τοῦ τύπου:

$$10^m \cdot 10^n = 10^{m+n}$$

ὅπου m, n φυσικοὶ ἀριθμοί. Μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ θεωρήματος τούτου καὶ ὅλων τῶν ἄλλων ἀστρονομικῶν καὶ ἀριθμητικῶν ἀρχῶν, τὰς ὁποίας προτάσσει, ὁ μέγας μαθηματικὸς φθάνει εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι ὑφίσταται ἕνας ἀριθμός, οὐχὶ μεγαλύτερος τοῦ 10^{63}, ἱκανὸς νὰ παραστήσῃ τὸ πλῆθος τῶν κόκκων τῆς ἄμμου, ποὺ θὰ ἠδύναντο νὰ καταλάβουν τὸν χῶρον μιᾶς σφαίρας ὁμοκέντρου πρὸς τὴν γῆν, ἐκτεινομένης μέχρι τῶν ἀπλανῶν ἀστέρων.

Καὶ πράγματι ἐκεῖνος ὁ ὁποῖος θὰ διεξέλθῃ τὸ πρωτοτυπώτατον αὐτὸ ἔργον τοῦ Ἀρχιμήδους δὲν θὰ δυνηθῇ ν' ἀρνηθῇ ὅτι οὗτος ἐπέτυχε τὸν προκαθορισθέντα μακρυνὸν στόχον. Ἀλλὰ συγχρόνως ἐπέτυχε κάτι πολὺ περισσότερον τούτου καὶ καλύτερον. Μὲ τὸ εὐφυέστατον αὐτὸ ἔργον ἔδειξεν εἰς τοὺς ὁμοεθνεῖς του, οἱ ὁποῖοι ἐκυριαρχοῦντο ἀπὸ ἀκατανίκητον προκατάληψιν πρὸς τοὺς μεγάλους ἀριθμούς, ὅτι καὶ οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ δύνανται νὰ ὑποβληθοῦν εἰς τοὺς ἰδίους χειρισμούς, ὅπως καὶ οἱ λοιποὶ τῆς φυσικῆς σειρᾶς. Ἐπέτυχε δὲ τοιουτοτρόπως νὰ στρέψῃ τὴν προσοχὴν τῶν συγχρόνων του πρὸς τὴν ἀριθμητικὴν ἀντίληψιν τοῦ ἀπείρως μεγάλου, ὅπως ἀκριβῶς μὲ τὴν «μέθοδον τῆς ἐξαντλήσεως» ἐπέτυχε νὰ διαλύσῃ τὰς προκαταλήψεις των ἐναντίον τοῦ ἀπείρως μικροῦ.

Ὁ Ψ α μ μ ί τ η ς εἶναι ἔργον τόσον στερεᾶς δομῆς καὶ τοιαύτης δυνάμεως, ὥστε σχεδὸν δὲν ἀφίνει τίποτε νὰ ἐπιθυμήσῃ κανείς. Ἀκόμη καὶ ἐκεῖνοι, οἱ ὁποῖοι θὰ ἐπεχείρουν νὰ σταχυολογήσουν εἰς τὸν ἀγρὸν τὸν ὁποῖον ἐθέρισεν ὁ Ἀρχιμήδης, θὰ ἐπείθοντο πολὺ γρήγορα ὅτι οἱ κόποι των ματαίως ἔπρεπε ν' ἀναμένουν τὴν παραμικρὰν ἀνταπόδοσιν.

Ἐν πάσῃ περιπτώσει, τὸ Βιβλίον ΙΙ τῆς Μ α θ η μ α τ ι κ ῆ ς Σ υ ν α γ ω γ ῆ ς, εἰς τὸ περισωθὲν ἀπόσπασμα, ἀναφέρει τὴν ὕπαρξιν ἑνὸς ἔργου τοῦ Ἀπολλωνίου τοῦ Περγαίου — περὶ τοῦ ὁποίου ὡμιλήσαμεν ἤδη ἐν παρόδῳ (§ 79) —, ὅπου, διὰ νὰ καταστήσῃ ὁ συγγραφεὺς ἀπεριόριστον τὴν δύναμιν τοῦ ἀριθμητικοῦ συστήματος τῶν Ἑλλήνων, ἐπρότεινε μίαν ἁπλουστευτικὴν τροποποίησιν τῶν ἰδεῶν τοῦ Συρακουσίου, ἀντικαθιστῶν τὰς «ὀκτάδας» ἐκείνου ὑπὸ περιόδων μικροτέρων, τῶν καλουμένων «τετράδων». Σημειωτέον ὅτι, ἐνῷ εἰς τὸ Ἀρχιμήδειον σύστημα ὁ ἀριθμὸς 10^8 παίζει τὸν πρωτεύοντα ρόλον, εἰς τὸ σύστημα τοῦ Περγαίου ὁ ρόλος οὗτος ἀνατίθεται εἰς τὸν ἀριθμὸν 10^4. Συνεπῶς πᾶς ἀριθμὸς παρίσταται ὑπὸ τὴν μορφήν :

$$\sum_r A_r \cdot 10000^r ,$$

ὅπου A_r ἀριθμὸς μικρότερος τῆς μυριάδος. Τὸ προκῦπτον σύστημα ἐκρίθη πρακτικώτερον τοῦ προηγουμένου, διὸ καὶ φαίνεται ὅτι τελικῶς ἐπεκράτησεν εἰς τὴν Ἑλλάδα.

82. Αἱ συχνόταται περιπτώσεις τόσον εἰς τὴν θεωρίαν ὅσον καὶ εἰς

τὴν πρᾶξιν, κατὰ τὰς ὁποίας πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸ πηλῖκον δύο ἀριθμῶν, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ μεγαλύτερος δὲν εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ μικροτέρου, ὡδήγησαν εἰς διεύρυνσιν τῆς ἀρχικῆς ἐννοίας τοῦ ἀριθμοῦ, διὰ τῆς προσαρτήσεως τῶν κλασμάτων. Ἐντεῦθεν ἐγεννήθη συγχρόνως καὶ ἡ ἀνάγκη τῆς γραπτῆς παραστάσεως τῶν νέων αὐτῶν ἀριθμητικῶν ὀντοτήτων. Οἱ Ἕλληνες ἐθεώρησαν τρία εἴδη κλασμάτων, ἤτοι:

1) Τὰ θεμελιώδη κλάσματα, τὰ ὁποῖα χωρὶς ἀμφιβολίαν παρέλαβον ἀπὸ τοὺς Αἰγυπτίους. Τὰ κλάσματα αὐτὰ παριστάνοντο μὲ τοὺς χαρακτῆρας τοὺς δηλοῦντας τὸν παρανομαστήν, φέροντας δηλωτικὸν σημεῖον. Διὰ τὸ κλάσμα 2/3 ἐχρησιμοποίουν, ὅπως καὶ οἱ Αἰγύπτιοι, εἰδικὸν σύμβολον, ἐνῷ διὰ τὰ λοιπὰ κλάσματα διετήρουν τὴν συνήθειαν τῆς ἀναλύσεως αὐτῶν εἰς ἀκεραίους καὶ ἀριθμὸν θεμελιωδῶν κλασμάτων. Ὁ ἐπιθυμῶν νὰ εὕρῃ ἐφαρμογὰς τούτων δύναται ν' ἀνατρέξῃ εἰς τὰ ἔργα τοῦ Ἥρωνος, εἰς τὰς ἐπιστολὰς τοῦ Ραβδᾶ, τὰς ὁποίας ἐμνημονεύσαμεν ἤδη παρεμπιπτόντως καὶ τὰς ὁποίας θ' ἀναλύσωμεν εἰς τὸ τέλος τοῦ παρόντος κεφαλαίου, ἔτι δὲ μᾶλλον εἰς ἕνα μαθηματικὸν πάπυρον, ὁ ὁποῖος φέρει συνήθως τὸ ὄνομα τοῦ Akhmim, εἰς μνήμην τῆς αἰγυπτιακῆς τοποθεσίας ὅπου ἀνεκαλύφθη ὁ ἐν λόγῳ πάπυρος. Τὸ κείμενον εἶναι εἰς τὴν ἑλληνικὴν καὶ ἀνάγεται εἰς τὸν VII ἢ VIII αἰῶνα μ.Χ. Ὀφείλεται εἰς τὴν χεῖρα κάποιου χριστιανοῦ, εἶναι ὅμως πιθανῶς ἀντίγραφον ἀρχαιοτέρου κειμένου. Ἐν σχέσει πρὸς τὸ περιεχόμενον δύναται, κατὰ μέγα μέρος, νὰ θεωρηθῇ τοῦτο ὡς ἡ συνέχεια τοῦ παπύρου τοῦ Rhind, διότι περιέχει ἐκτεταμένους πίνακας ἀναλύσεως δυναμένης νὰ ληφθῇ ἀμέσως δι' ἐφαρμογῆς τῶν σκέψεων, τὰς ὁποίας ἀνεπτύξαμεν ὁμιλοῦντες διὰ τὸ ἀρχαιότερον κείμενον αἰγυπτιακοῦ ἀριθμητικοῦ λογισμοῦ (§ 12). Δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν ὅτι τὰ ἀριθμητικὰ προβλήματα, τὰ ὁποῖα πραγματεύεται ὁ πάπυρος, εἶναι τῆς αὐτῆς φύσεως καὶ δυσκολίας μὲ ἐκεῖνα τοῦ Rhind, πρᾶγμα μαρτυροῦν τὴν διατήρησιν τῶν ἀριθμητικῶν μεθόδων, αἱ ὁποῖαι διεμορφώθησαν εἰς τὰς ὄχθας τοῦ Νείλου.

2) Μολονότι τὸ σύστημα τοῦτο ἀντέσχεν ἐπὶ μακροὺς αἰῶνας (ὥστε νὰ εὑρίσκωνται ἴχνη τούτου ἀκόμη καὶ τὸν XIV), δὲν ἠγνόουν οἱ Ἕλληνες (τοὐλάχιστον ἀρχῆς γενομένης ἀπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους) τὸν τρόπον χρήσεως κλασμάτων μὲ ἀριθμητὴν οἱονδήποτε, οὔτε τὸν τρόπον παραστάσεως αὐτῶν μὲ τὸν σημερινὸν συμβολισμόν. Θεωροῦμεν ὅμως σκόπιμον νὰ μὴ εἰσέλθωμεν εἰς λεπτομερείας ἐπ' αὐτοῦ, καθ' ὅσον εὑρισκόμεθα εἰς ἀδυναμίαν νὰ κρίνωμεν κατὰ πόσον τὰ σύμβολα τὰ ἀπαντώμενα εἰς τὰ χειρόγραφα ἀνήκουν εἰς τοὺς συγγραφεῖς ἢ εἰς τοὺς μεταγενεστέρους ἀντιγραφεῖς.

3) Τέλος, εἰδικῶς εἰς τὴν μετρικὴν ἀστρονομίαν, οἱ Ἕλληνες ἀκολουθοῦντες τὰς ἐννοίας τῶν Βαβυλωνίων, ἐχρησιμοποίησαν τὰ «ἑξηκον-

ταδικά» ἢ «ἀστρονομικά» κλάσματα, τουτέστι παρίστανον οἱονδήποτε ἀριθμὸν ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$a_0 + \frac{a_1}{60} + \frac{a_2}{60^2} + \ldots$$

ὅπου a_0 εἶναι ἀκέραιος αὐθαίρετος, ἐνῷ a_1, $a_2, \ldots$ εἶναι ἀριθμοὶ ἐπίσης ἀκέραιοι, ἀλλὰ μικρότεροι τοῦ 60. Πρόκειται περὶ ἑνὸς συστήματος, τοῦ ὁποίου, ὡς εἶναι παγκοίνως γνωστόν, τὰ ἴχνη ὑφίστανται εἰς τὰ σημερινὰ μαθηματικὰ καὶ εὑρίσκονται εἰς κοινὴν χρῆσιν.

Ἑλληνικὴ Λογιστικὴ

83. Τὸ σύνολον τῶν κανόνων διὰ τὴν ἐκτέλεσιν πρακτικῶν ὑπολογισμῶν μὲ ἀριθμούς, μέχρι τῶν χρόνων τοῦ Ἀριστοτέλους, ἐθεωρεῖτο ἀπὸ τοὺς Ἕλληνας ὡς ἀπαρτίζον ἰδιαίτερον κλάδον, ὁ ὁποῖος ἐκαλεῖτο Λογιστικὴ καὶ ὁ ὁποῖος εἰς τὴν ἱεραρχίαν τῶν μαθηματικῶν κλάδων, κατεῖχε μίαν θέσιν πολὺ κατωτέραν τῆς ἀποδιδομένης εἰς τὴν κυρίως εἰπεῖν Ἀριθμητικήν, κλάδον ἀποκλειστικῶς ἀσχολούμενον μὲ τὴν μελέτην τῶν ἰδιοτήτων τῶν ἀριθμῶν. Ἴσως μάλιστα νὰ εἶναι αὐτὸς ὁ λόγος διὰ τὸν ὁποῖον οἱ Ἕλληνες δὲν μᾶς μετέδωσαν κάποιαν συστηματικὴν ἔκθεσιν τῆς Λογιστικῆς των, δὲν ἀποκλείεται μάλιστα καὶ νὰ μὴ διεμόρφωσαν ποτὲ τοιαύτην, θεωροῦντες τὴν ἀσχολίαν αὐτὴν ὡς ἀποκλειστικὸν ἀντικείμενον προφορικῆς ἐκμαθήσεως.

Συνεπῶς διὰ νὰ λάβωμεν ἰδέαν τοῦ τρόπου, μὲ τὸν ὁποῖον οὗτοι ἐξετέλουν τοὺς ἀριθμητικούς των ὑπολογισμοὺς δὲν μένει τίποτε ἄλλο παρὰ νὰ ἐρευνήσωμεν πῶς ἔπραττον εἰς ἑκάστην ἰδιαιτέραν περίπτωσιν. Τὰ σχόλια τοῦ Εὐτοκίου, τοῦ Πάππου καὶ τοῦ Θέωνος τοῦ Ἀλεξανδρέως, αἱ ἐπιστολαὶ τοῦ Ραβδᾶ, περὶ τῶν ὁποίων ὡμιλήσαμεν ἤδη, θὰ κάμωμεν ὅμως εἰδικώτερον λόγον μετ' ὀλίγον (§ 97), ὡς καὶ μερικὰ ἀκόμη διεσπαρμένα ἀνώνυμα σχόλια ἀποτελοῦν τὰ μοναδικὰ βοηθήματα, εἰς τὰ ὁποῖα δυνάμεθα ν' ἀνατρέξωμεν προκειμένου νὰ ρίψωμεν φῶς εἰς τὸ ἐνδιαφέρον τοῦτο ζήτημα *.

Δυνάμεθα νὰ πεισθῶμεν τοιουτοτρόπως ὅτι ἡ πρόσθεσις, ἡ ἀφαίρεσις καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς ἐξετελοῦντο «ἀρχαιόθεν» μὲ τρόπους καθ' ὅλα ὁμοίους πρὸς τοὺς σημερινούς. Ἐν τούτοις, διὰ τὸν πολλαπλασιασμόν,

---

* Εἰς αὐτὰ πρέπει νὰ προστεθοῦν δύο μαρμάριναι ἐγχάρακτοι πινακίδες, μία τῶν ὁποίων εὑρεθεῖσα τὸ 1864 εἰς τὴν νῆσον Σαλαμῖνα φέρει συνήθως τὸ ὄνομα τοῦτο. Μὴ δυνάμενοι νὰ εἰσέλθωμεν εἰς λεπτομερείας παραπέμπομεν τὸν ἀναγνώστην εἰς ἕνα ὑπόμνημα τοῦ A. Nagl (Abh. zur Gesch. der Mathematik, t. IX, 1899) ἔνθα εὑρίσκεται ὑπὸ λιθογραφικὴν ἀναπαραγωγὴν ἡ πινακὶς τῆς Σαλαμῖνος.

ταδικὰ» ἢ «ἀστρονομικὰ» κλάσματα, τουτέστι παρίστανον οἱονδήποτε ἀριθμὸν ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$a_0 + \frac{a_1}{60} + \frac{a_2}{60^2} + \dots$$

ὅπου a_0 εἶναι ἀκέραιος αὐθαίρετος, ἐνῷ a_1, $a_2, \dots$ εἶναι ἀριθμοὶ ἐπίσης ἀκέραιοι, ἀλλὰ μικρότεροι τοῦ 60. Πρόκειται περὶ ἑνὸς συστήματος, τοῦ ὁποίου, ὡς εἶναι παγκοίνως γνωστόν, τὰ ἴχνη ὑφίστανται εἰς τὰ σημερινὰ μαθηματικὰ καὶ εὑρίσκονται εἰς κοινὴν χρῆσιν.

Ἑλληνικὴ Λογιστική

83. Τὸ σύνολον τῶν κανόνων διὰ τὴν ἐκτέλεσιν πρακτικῶν ὑπολογισμῶν μὲ ἀριθμούς, μέχρι τῶν χρόνων τοῦ Ἀριστοτέλους, ἐθεωρεῖτο ἀπὸ τοὺς Ἕλληνας ὡς ἀπαρτίζον ἰδιαίτερον κλάδον, ὁ ὁποῖος ἐκαλεῖτο Λογιστικὴ καὶ ὁ ὁποῖος εἰς τὴν ἱεραρχίαν τῶν μαθηματικῶν κλάδων, κατεῖχε μίαν θέσιν πολὺ κατωτέραν τῆς ἀποδιδομένης εἰς τὴν κυρίως εἰπεῖν Ἀριθμητικήν, κλάδον ἀποκλειστικῶς ἀσχολούμενον μὲ τὴν μελέτην τῶν ἰδιοτήτων τῶν ἀριθμῶν. Ἴσως μάλιστα νὰ εἶναι αὐτὸς ὁ λόγος διὰ τὸν ὁποῖον οἱ Ἕλληνες δὲν μᾶς μετέδωσαν κάποιαν συστηματικὴν ἔκθεσιν τῆς Λογιστικῆς των, δὲν ἀποκλείεται μάλιστα καὶ νὰ μὴ διεμόρφωσαν ποτὲ τοιαύτην, θεωροῦντες τὴν ἀσχολίαν αὐτὴν ὡς ἀποκλειστικὸν ἀντικείμενον προφορικῆς ἐκμαθήσεως.

Συνεπῶς διὰ νὰ λάβωμεν ἰδέαν τοῦ τρόπου, μὲ τὸν ὁποῖον οὗτοι ἐξετέλουν τοὺς ἀριθμητικούς των ὑπολογισμοὺς δὲν μένει τίποτε ἄλλο παρὰ νὰ ἐρευνήσωμεν πῶς ἔπραττον εἰς ἑκάστην ἰδιαιτέραν περίπτωσιν. Τὰ σχόλια τοῦ Εὐτοκίου, τοῦ Πάππου καὶ τοῦ Θέωνος τοῦ Ἀλεξανδρέως, αἱ ἐπιστολαὶ τοῦ Ραβδᾶ, περὶ τῶν ὁποίων ὡμιλήσαμεν ἤδη, θὰ κάμωμεν ὅμως εἰδικώτερον λόγον μετ' ὀλίγον (§ 97), ὡς καὶ μερικὰ ἀκόμη διεσπαρμένα ἀνώνυμα σχόλια ἀποτελοῦν τὰ μοναδικὰ βοηθήματα, εἰς τὰ ὁποῖα δυνάμεθα ν' ἀνατρέξωμεν προκειμένου νὰ ρίψωμεν φῶς εἰς τὸ ἐνδιαφέρον τοῦτο ζήτημα *.

Δυνάμεθα νὰ πεισθῶμεν τοιουτοτρόπως ὅτι ἡ πρόσθεσις, ἡ ἀφαίρεσις καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς ἐξετελοῦντο «ἀρχαιόθεν» μὲ τρόπους καθ' ὅλα ὁμοίους πρὸς τοὺς σημερινούς. Ἐν τούτοις, διὰ τὸν πολλαπλασιασμόν,

---

* Εἰς αὐτὰ πρέπει νὰ προστεθοῦν δύο μαρμάριναι ἐγχάρακτοι πινακίδες, μία τῶν ὁποίων εὑρεθεῖσα τὸ 1864 εἰς τὴν νῆσον Σαλαμῖνα φέρει συνήθως τὸ ὄνομα τοῦτο. Μὴ δυνάμενοι νὰ εἰσέλθωμεν εἰς λεπτομερείας παραπέμπομεν τὸν ἀναγνώστην εἰς ἕνα ὑπόμνημα τοῦ A. Nagl (Abh. zur Gesch. der Mathematik, t. IX, 1899) ἔνθα εὑρίσκεται ὑπὸ λιθογραφικὴν ἀναπαραγωγὴν ἡ πινακὶς τῆς Σαλαμῖνος.

κατέφευγον συχνὰ εἰς τὴν μέθοδον τῶν διαδοχικῶν διπλασιασμῶν, τὴν ὁποίαν, ὡς εἴδομεν (§ 10), ἐχρησιμοποίουν οἱ Αἰγύπτιοι. Ἐπὶ πλέον διὰ νὰ καταστήσουν εὐκολώτερον, ἀσφαλέστερον καὶ ταχύτερον τὸν πολλαπλασιασμὸν δύο ἀκεραίων εἶχον κατασκευάσει πίνακας πολλαπλασιασμοῦ (τοὺς ὁποίους δὲν ἀπέδιδον εἰς τὸν Πυθαγόραν, ὡς συνηθίζεται σήμερον). Ἀληθὲς εἶναι ὅτι οἱ μόνοι ὑφιστάμενοι σήμερον ἀνήκουν εἰς νεωτέραν σχετικῶς ἐποχὴν (διότι ἀναφέρονται εἰς τὰς ἐπιστολὰς τοῦ Ραβδᾶ). Ἀλλὰ ἐπειδὴ χαρακτηρίζονται ὡς «ἐπινόησις τοῦ Παλαμήδους», πρᾶγμα σημαῖνον κατὰ τοὺς ἕλληνας φιλολόγους τὴν προέλευσιν αὐτῶν ἐκ τῆς ἀρχαίας παραδόσεως, πρέπει νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι πρόκειται περὶ βοηθητικοῦ μέσου ἀναγομένου εἰς τὰς πρώτας καὶ ἀρχαιοτάτας ἐκδηλώσεις τοῦ ἑλληνικοῦ πολιτισμοῦ.

Ἀπὸ ἄλλα ἔργα ἀστρονομικοῦ περιεχομένου μανθάνομεν ἐπίσης λεπτομερείας ἐκτελέσεως τῶν ἰδίων πράξεων μὲ ἀριθμοὺς καὶ κλάσματα τοῦ ἑξηκονταδικοῦ συστήματος. Ὅσον ἀφορᾷ τὴν ἐξαγωγὴν τῆς τετραγωνικῆς ρίζης, τὰ διαθέσιμα παραδείγματα ἀποδεικνύουν ὅτι οἱ Ἕλληνες, ὅταν ἐχρησιμοποίουν κλάσματα τοῦ εἴδους τούτου, ἐφήρμοζον μίαν μέθοδον, ἡ ὁποία οὐσιαστικῶς συμπίπτει πρὸς αὐτὴν ποὺ ἐφαρμόζομεν σήμερον. Ὅταν ὅμως ἐχρησιμοποίουν κοινὰ κλάσματα, ἐφήρμοζον ἕνα τέχνασμα τὸ ὁποῖον, εἰς ἀλγεβρικὴν γλῶσσαν, θὰ ἠδύνατο νὰ διατυπωθῇ ὡς ἑξῆς:

Ἐὰν $A = a^2 + b$, ὅπου a^2 τὸ μέγιστον τετράγωνον ποὺ περιέχεται εἰς τὸν ἀριθμὸν A, τότε ἡ $\sqrt{A}$ ἐκφράζεται μὲ τὴν ἀκόλουθον σειρὰν τιμῶν κατ' αὔξουσαν προσέγγισιν:

$$r = \frac{1}{2}\left(a + \frac{A}{a}\right), \quad r' = \frac{1}{2}\left(r + \frac{A}{r}\right) \quad r'' = \frac{1}{2}\left(r' + \frac{A}{r'}\right), \ldots$$

Ἡ ἀνωτέρα ἐκ τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων ἦτο ἡ ἐξαγωγὴ τῆς κυβικῆς ρίζης τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν. Μολονότι περὶ αὐτῆς γνωρίζομεν ἕνα μόνον παράδειγμα, ἀνακαλυφθὲν προσφάτως εἰς τὰ ἔργα τοῦ Ἥρωνος τοῦ Ἀλεξανδρέως, ἐκ τοῦ ὁποίου δὲν εἶναι εὔκολον νὰ συναγάγωμεν γενικὸν κανόνα, ἐν τούτοις φαίνεται ἀρκετὰ πιθανὸν ὅτι ἐχρησιμοποίουν ἕνα εἰδικὸν τύπον τῆς μεθόδου τῆς αὐθαιρέτου ἀφετηρίας (Positio falsa ἢ Regula Falsi).

Αὐτὰ εἶναι τὰ ὅσα δυνάμεθα ν' ἀντλήσωμεν ἀπὸ τὰς πλέον ἀξιοπίστους πηγὰς ἐν σχέσει πρὸς τὴν πρακτικὴν ἀριθμητικὴν τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων.

Ἡ Ἀριθμητικὴ εἰς τὰ ἔργα τοῦ Πυθαγόρου, τοῦ Πλάτωνος καὶ τῶν μαθητῶν των

84. Στρεφόμενοι τώρα πρὸς τὴν ὑψηλοτέραν περιοχὴν τῆς ἐπιστήμης τῶν ἀριθμῶν, διὰ ν' ἀναζητήσωμεν τὰ ἐπιτεύγματα τῶν Ἑλλήνων εἰς τὸν τομέα τοῦτον, πρέπει κατ' ἀρχὴν νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι, ἐνῷ αἱ διάφοροι φάσεις ἐξελίξεως τῆς ἀρχαίας γεωμετρίας παρουσιάζουν μεταξύ των στενὴν ἀλληλουχίαν αἰτίας καὶ ἀποτελέσματος, λόγου καὶ ἀκολουθίας, κατὰ τὴν ἱστορικὴν ἐξέλιξιν τῆς ἀριθμητικῆς, ἐξεδηλώθησαν δύο κατευθύνσεις σαφῶς διακεκριμέναι.

Ἡ μία ἔχει τὴν αἰτιολογικὴν βάσιν της εἰς τὴν παράστασιν τῶν ἀριθμῶν δι' εὐθυγράμμων τμημάτων, τῶν δὲ γινομένων των δι' ὀρθογωνίων, ὅπως ἀκριβῶς διδάσκουν τὰ βιβλία VII - IX τῶν Σ τ ο ι χ ε ί ω ν τοῦ Εὐκλείδου. Ἡ ἄλλη κατεύθυνσις ἀκολουθεῖ τὴν καθαρὰν ἀριθμητικὴν ὁδόν, ἀπηλλαγμένην δηλαδὴ ἀπὸ οἱανδήποτε συγκεκριμένην ἐξεικόνισιν τῶν ἀριθμῶν. Αἱ πηγαὶ καὶ τὸ πρῶτον στάδιον τῆς ἀναπτύξεως μιᾶς τοιαύτης ἀφῃρημένης ἀντιλήψεως τῆς ἐπιστήμης τῶν ἀριθμῶν ἀνάγονται εἰς τὴν Σχολὴν τοῦ Πυθαγόρου, τῆς ὁποίας τὰ μέλη, μετὰ τὴν ἀνακάλυψιν τῶν νόμων τῆς ἀκουστικῆς, κατελήφθησαν ἀπὸ τὴν ἀκαταμάχητον φιλοδοξίαν ν' ἀνακαλύψουν ἀριθμητικὰς σχέσεις μεταξὺ τῶν διαφόρων μετρησίμων φυσικῶν παραγόντων. Τοιούτων ἐρευνῶν τὰ θετικὰ ἀποτελέσματα ἐξηφανίσθησαν δυστυχῶς, ἢ ἀνεμίχθησαν μὲ ἐκεῖνα μεταγενεστέρων ἀναμορφωτῶν τοῦ Πυθαγορισμοῦ εἰς τρόπον, ὥστε νὰ εἶναι ματαία σήμερον πᾶσα προσπάθεια καταγραφῆς των καὶ ἀφάνταστος ἡ δυσκολία ἐξακριβώσεως τῶν εὑρημάτων ἐκείνων ποὺ ὀφείλονται εἰς τὸν ἴδιον τὸν φιλόσοφον τῆς Σάμου καὶ ἐκείνων ποὺ ὀφείλονται εἰς τοὺς μαθητάς του. Ἐν πάσῃ περιπτώσει, ὅπως εἴπομεν ἤδη εἰς ἄλλην θέσιν (§ 23), θεωρεῖται βέβαιον ὅτι εἰς τὴν στοὰν τοῦ Κρότωνος ἐμελετήθησαν μερικαὶ ἀναλογίαι μεταξὺ ἀκεραίων ἀριθμῶν, καὶ ἀνεκαλύφθησαν τὰ ἀσύμμετρα μεγέθη. Ἐκεῖ ἐπίσης ἔχουν τὴν ἀρχήν των ὄχι μόνον ἡ ἔννοια τοῦ «τελείου ἀριθμοῦ» — τὴν ὁποίαν συνηντήσαμεν ἤδη εἰς τὸν Εὐκλείδη — ἀλλ' ἐπίσης ἡ ἔννοια «φίλοι ἀριθμοί», τῶν ὁποίων ἕκαστος ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν διαιρετῶν τοῦ ἄλλου (ὅπως π.χ. οἱ γνωστοὶ εἰς τοὺς Πυθαγορείους ἀριθμοὶ 220 καὶ 284) καὶ αἱ ἔννοιαι «τετράγωνοι ἀριθμοὶ» καὶ «τρίγωνοι ἀριθμοί». Τῶν τελευταίων τούτων εἰδῶν οἱ Πυθαγόρειοι ἐγνώριζον τὴν γένεσιν, ἡ ὁποία σήμερον ἐκφράζεται διὰ τῶν τύπων:

$$1+3+\ldots+(2\nu-1)=\nu^2,$$

$$1+2+\ldots+\nu=\frac{\nu(\nu+1)}{2}.$$

Εἰς τοὺς Πυθαγορείους ἀποδίδεται ἐπίσης μία πρακτικὴ μέθοδος κατασκευῆς ἀπείρων ὀρθογωνίων τριγώνων μὲ πλευρὰς ἀριθμοὺς ἀκεραίους, ἐκκινοῦσα ἀπὸ τὴν ὑπόθεσιν ὅτι ὁ ἀριθμὸς ὁ παριστῶν μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν εἶναι περιττός, ἔστω α. Ἡ ἄλλη κάθετος πλευρὰ θὰ εἶναι τότε $\frac{\alpha^2-1}{2}$, ἡ δὲ ὑποτείνουσα $\frac{\alpha^2+1}{2}$.

Εἰς τὸν Πυθαγόραν ἀποδίδεται ἐπίσης ἡ παρατήρησις, ὅτι οἱ μοναδικοὶ ἀκέραιοι, οἱ ἐκφράζοντες συγχρόνως τὸ ἐμβαδὸν καὶ τὴν περίμετρον ἑνὸς ὀρθογωνίου εἶναι οἱ ἀριθμοὶ 16 καὶ 18, μὲ ἄλλας λέξεις, ὅτι τὰ ζεύγη 4,4 καὶ 3,6 παριστοῦν τὰς μοναδικὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς ἀπροσδιορίστου ἐξισώσεως: $xy=2(x+y)$.

Τέλος ὁ μαθητὴς τοῦ Πυθαγόρου Θυμαρίδας ὁ Πάριος ἀνεκάλυψε μίαν μέθοδον πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος, τὸ ὁποῖον σήμερον ἐκφράζεται δι' ἑνὸς συστήματος ἐξισώσεων τῆς ἀκολούθου μορφῆς:

$$x+x_1=\alpha_1,\ x+x_2=\alpha_2,\ \ldots,\ x+x_\nu=\alpha_\nu,$$

$$x+x_1+x_2+\ldots+x_\nu=\alpha.$$

Ἡ μέθοδος ἀναφέρεται ὑπὸ τοῦ Ἰαμβλίχου ὡς «ἔφοδος τοῦ Θυμαριδείου ἐπανθήματος» [43].

85. Εἰς τὰ μαθηματικὰ ὁ Πλάτων ὑπῆρξε μαθητὴς τοῦ Πυθαγόρου, διὰ τοῦτο δὲ τὰ ἔργα του ἐπισταμένως ἐρευνῶνται τόσον διὰ νὰ καταστήσωμεν ὀλιγώτερον ἀτελὲς τὸ πλαίσιον τῶν γνώσεών μας περὶ τοῦ διδασκάλου, ὅσον διὰ νὰ ἐπισημάνωμεν τὰς ὑπὸ τοῦ μαθητοῦ ἐπενεχθείσας προσθήκας. Μεταξὺ τούτων συναντῶμεν πρὸ πάντων μίαν μέθοδον (τὴν ὁποίαν μερικοὶ προτιμοῦν ν' ἀποδίδουν εἰς τὸν Ἀρχύταν) κατασκευῆς τριγώνων ὀρθογωνίων μὲ ἀκεραίους ἀριθμούς, συμπληροῦσαν ἐκείνην τοῦ Πυθαγόρου, καθ' ὅσον ὁ θεῖος φιλόσοφος λαμβάνει ὡς ἀφετηρίαν ἀριθμὸν ἄρτιον ἀντὶ περιττοῦ. Ἐὰν α ὁ ἄρτιος ἀριθμὸς ὁ ἐκφράζων τὴν μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν, ἡ ἄλλη θὰ ἐκφράζεται μὲ ἀριθμὸν τῆς μορφῆς: $\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2-1$, ἡ δὲ ὑποτείνουσα μὲ τὴν συζυγῆ ἔκφρασιν $\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2+1$.

Ἐνῷ ἡ ἀνωτέρω ἀλήθεια εἶναι διαυγὴς καὶ εὐκολονόητος, ἡ κατανόησις ἄλλων μαθηματικῶν χωρίων τῶν ἔργων τοῦ Πλάτωνος παρουσιάζεται ἐξαιρετικῶς δυσχερὴς καὶ κάποτε ἀδύνατος. Παραδείγματος χάριν, παρ' ὅλας τὰς ἐπανειλημμένας καὶ εὐφυεῖς προσπαθείας πρὸς ἐμβάθυνσιν εἰς τὰ κείμενα τοῦ θείου φιλοσόφου, δὲν κατέστη μέχρι σήμερον δυνατὸν νὰ ἐννοήσωμεν τί πρᾶγμα ἦσαν περίπου οἱ ἀριθμοί, οἱ καλούμενοι ὑπὸ τοῦ ἰδίου «ἁρμονικοί», οἱ δὲ περιφημότεροι ἑρμηνευταὶ τοῦ Πλάτωνος διαφιλονικοῦν ἀκόμη γύρω ἀπὸ τὴν ἀξίαν τοῦ «νυμφικοῦ ἀριθμοῦ»,

εἰς τὸν ὁποῖον οὗτος, διαποτισμένος ὅπως ἦτο μὲ τὸν ἀριθμητικὸν μυστικισμὸν τῶν Πυθαγορείων, ἀπέδιδε θεμελιώδη ρυθμιστικὸν ρόλον εἰς τὴν ὁμαλὴν πορείαν τῶν κρατικῶν ὑποθέσεων.

86. Πρέπει νὰ σημειώσωμεν, ὅτι ἡ καθαρῶς πυθαγορικὴ κατεύθυνσις τῶν ἀριθμητικῶν ἐρευνῶν τοῦ Πλάτωνος διετηρήθη ἀπὸ τὸν ἀνεψιόν του Σπεύσιππον, ὁ ὁποῖος τὸν διεδέχθη εἰς τὴν διεύθυνσιν τῆς Ἀκαδημίας. Διακοπεῖσα δὲ ὀλίγον ἔπειτα χάριν τῆς γεωμετρικῆς ἐρεύνης, ὅπως ἀποδεικνύουν τὰ ἀριθμητικὰ βιβλία τοῦ Εὐκλείδου, ἐπανελήφθη μὲ νέον ζῆλον κατὰ τοὺς χρόνους τῆς ἀναγεννήσεως τοῦ Πυθαγορισμοῦ ὑπὸ τῶν ὀπαδῶν τῶν Σχολῶν Νεο - Πυθαγορικῆς καὶ Νεο - Πλατωνικῆς.

Ὁ περιφημότερος μεταξὺ τῶν πρώτων εἶναι ὁ Νικόμαχος ὁ Γερασηνὸς (ἐκ Γεράσων τῆς Κοίλης Συρίας), ζήσας μεταξὺ τοῦ τέλους τοῦ I αἰῶνος καὶ τῶν ἀρχῶν τοῦ II αἰῶνος μ.Χ., ὁ ὁποῖος ἔγραψε μίαν *Ἀριθμητικὴν Εἰσαγωγήν*. Τοῦ ἔργου τούτου σώζεται ἡ λατινικὴ μετάφρασις ὑπὸ τοῦ Βοηθίου (470 - 524)*.

Χωρὶς νὰ ἐξετάσωμεν τὰς φιλοσοφικὰς διατριβάς, αἱ ὁποῖαι ἀφθονοῦν εἰς τὸ ἔργον τοῦ Νικομάχου, χωρὶς νὰ ἐπισημάνωμεν μερικὰς ἐπιβεβαιώσεις εὑρημάτων, περὶ ὧν ἐγένετο ἤδη λόγος εἰς τὰ περὶ Εὐκλείδου καὶ Ἐρατοσθένους, θὰ ἐξάρωμεν μερικὰς ἐφαρμογὰς τῆς θεωρίας τῶν τελείων ἀριθμῶν τῆς διδασκομένης εἰς τὰ *Στοιχεῖα*.

Οὕτω, ἐφαρμόζων τὸν νόμον τῆς εὑρέσεως τῶν τελείων ἀριθμῶν τὸν ὑποδεικνυόμενον εἰς τὰ *Στοιχεῖα*, εὑρίσκει ὅτι οἱ τέσσαρες πρῶτοι τέλειοι ἀριθμοὶ εἶναι 6, 28, 496, 8182 καὶ παρατηρεῖ πόσον ἀραιὰ συναντῶνται εἰς τὴν φυσικὴν σειρὰν ἀριθμοὶ τοῦ εἴδους τούτου, χωρὶς ἐν τούτοις νὰ δίδῃ νῦξιν περὶ τῆς ἀμφιβολίας (ἡ ὁποία δὲν ἔχει ἀρθῆ μέχρι σήμερον), ἂν δηλαδὴ ἡ σειρὰ τῶν τελείων ἀριθμῶν ἔχῃ τέρμα ἢ ὄχι. Ἀναφέρομεν ἐπίσης, χωρὶς νὰ εἰσέλθωμεν εἰς λεπτομερείας, τὴν ὑπ' αὐτοῦ γενομένην ἀπαρίθμησιν τῶν πολυαρίθμων εἰδῶν λόγων μεταξὺ δύο ἀριθμῶν, ἡ ὁποία ἐπὶ μακροὺς αἰῶνας παρέμεινε κλασσικὴ εἰς τὴν Δύσιν, κατόπιν δὲ ἐχάθησαν τὰ ἴχνη της. Θ' ἀναφέρωμεν ἀκόμη τὰς διαδεδομένας θεωρίας του γύρω ἀπὸ τοὺς «σχηματικοὺς ἀριθμούς», μερικὰ εἴδη τῶν ὁποίων ἀπαντῶνται εἰς προγενέστερα κείμενα, ἐνῷ ἄλλαι κάνουν διὰ πρώτην φορὰν εἰς τὴν *Ἀριθμητικὴν Εἰσαγωγὴν* τὴν εἴσοδόν των εἰς τὴν ἐπιστήμην. Μεταξὺ τῶν πρώτων ἀναφέρομεν τοὺς «πολυγωνικοὺς ἀριθμούς», διὰ νὰ σημειώσωμεν ὅτι ὁ Νικόμαχος γνωρίζει ὅτι τὸ τετράγωνον παντὸς ἀριθμοῦ εἶναι ἄθροισμα δύο τριγωνικῶν ἀριθμῶν:

$$n^2 = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{(n+1)n}{2}.$$

* Εἶναι πιθανὸν ὅτι ὁ Νικόμαχος ἔγραψεν ἀνάλογον *Γεωμετρικὴν Εἰσαγωγήν*, ἡ ὁποία ὅμως δὲν ἔφθασε μέχρις ἡμῶν.

Ἀξιομνημόνευτον εἶναι τὸ «Θεώρημα τοῦ Νικομάχου» ἐκφραζόμενον διὰ τοῦ τύπου:

$$(n^2+n+1)+(n^2+n+3)+\ldots+(n^2+3n+1)=(n+1)^3,$$

τοῦ ὁποίου τὸ σπουδαῖον πόρισμα:

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2,$$

δὲν ἀπαντᾶται πράγματι εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν Εἰσαγωγήν, ἀλλὰ ἦτο βεβαίως γνωστὸν εἰς τοὺς Ἕλληνας, οἱ ὁποῖοι τὸ ἐδίδαξαν εἰς τοὺς Ρωμαίους, ἐκ τούτων δέ, ὅπως θὰ ἴδωμεν, μετεδόθη εἰς τὴν Δύσιν.

Δὲν θὰ σταματήσωμεν εἰς τὰς εὐρείας ἀναπτύξεις τοῦ Νικομάχου γύρω ἀπὸ τὴν θεωρίαν τῶν ἀναλογιῶν μεταξὺ ἀριθμῶν, διότι τίποτε οὐσιῶδες δὲν προσθέτουν εἰς τὰς γνώσεις ποὺ ἀφοροῦν τὴν σημαντικὴν αὐτὴν θεωρίαν τῶν ἀρχαίων μαθηματικῶν, θὰ κλείσωμεν δὲ τὰς πληροφορίας αὐτὰς περὶ τοῦ δημοφιλεστέρου Ἕλληνος εἰς τὸν τομέα τῆς Ἀριθμητικῆς, μὲ τὴν παρατήρησιν ὅτι ὑφ' ἑνὸς συγγραφέως τοῦ XII αἰῶνος — O'Creat — ἐδόθη τὸ ὄνομα «κανὼν τοῦ Νικομάχου» εἰς τὸ ἀκόλουθον πρακτικὸν τέχνασμα πρὸς ὕψωσιν εἰς τὸ τετράγωνον ἑνὸς ἀριθμοῦ a περιεχομένου μεταξὺ 5 καὶ 10: «ὑπολογίζεται ἡ διαφορὰ $d=10-a$. Θὰ εἶναι τότε

$$a^2=10(a-d)+d^2\text{»}$$

Ὁ κανὼν οὗτος δὲν εὑρίσκεται πράγματι εἰς τὸν Νικόμαχον, περιέχεται ὅμως εἰς τὸ ἔργον του τὸ θεώρημα: «ἐὰν εἶναι n ὁ μέσος ἀριθμητικὸς μεταξὺ m καὶ p, θὰ εἶναι

$$mp=n^2-\left(\frac{m-p}{2}\right)^2\text{»},$$

ἐκ τοῦ ὁποίου συνάγομεν τὸν προηγούμενον κανόνα θεωροῦντες $m=10$ καὶ $p=a-d$. Ἴσως δὲ αὐτὸς εἶναι ὁ λόγος, διὰ τὸν ὁποῖον τὸ ὄνομα τοῦ Γερασηνοῦ συνεδέθη μὲ τὸν ἐν λόγῳ κανόνα.

87. Μεταξὺ τῶν πηγῶν πληροφοριῶν ἐπὶ τῆς ἑλληνικῆς ἀριθμητικῆς, εὑρίσκομεν, μετὰ τὴν Ἀριθμητικὴν Εἰσαγωγήν, τὸ εἰς ἡμᾶς γνωστὸν ἤδη ἔργον (§ 61), τὸ ὁποῖον ἔγραψεν ὁ νεο-πυθαγόρειος Θέων ὁ Σμυρναῖος πρὸς διευκόλυνσιν τῆς κατανοήσεως τῶν ἔργων τοῦ Πλάτωνος. Φυσικὰ εἰς τὸ ἔργον τοῦτο ἐπαναλαμβάνονται συχνὰ αἱ μεταφυσικαὶ περιπλανήσεις, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὴν πηγὴν τῆς ἐμπνεύσεως εἰς ἕνα παράδοξον ἀριθμητικὸν μυστικισμόν. Ὑπάρχουν ὅμως ἐπίσης καὶ ἄλλαι θεωρίαι περισσότερον οὐσιαστικαί, τὰς ὁποίας δὲν εἶναι δυνατὸν ν' ἀντιπαρέλθωμεν ἐν σιωπῇ. Ἀναφέρομεν π.χ. τὴν πρότασιν: «δὲν ὑπάρχει ἀρι-

θμός ἀκέραιον τετράγωνον ἔχων μίαν τῶν μορφῶν 3h + 2, 4h + 2, 4h + 3», πρῶτον παράδειγμα ἀρνητικῆς προτάσεως, ἐξ ἐκείνων ποὺ συναντῶνται σήμερον συχνότατα εἰς τὴν θεωρίαν τῶν ἀριθμῶν. Ἀναφέρομεν ἀκόμη τὴν ἐκτενῆ θεωρίαν τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι ἀποτελοῦν δύο σειρὰς ἀπείρων ὅρων, τῶν ὁποίων ὁ πρῶτος εἶναι μονὰς καὶ αἱ ὁποῖαι δύνανται νὰ κατασκευασθοῦν ἀναδρομικῶς δι' ἐφαρμογῆς τῶν σχέσεων:

$$l_n = l_{n-1} + d_{n-1}\ ,\ d_n = 2l_{n-1} + d_{n-1}$$

Πρὸς ἔξαρσιν τῆς σπουδαιότητος τῶν σειρῶν τούτων ἀρκεῖ νὰ σημειωθῇ, ὅτι αἱ ἐν λόγῳ σειραὶ ἀποτελοῦνται ἀπὸ τοὺς ἀριθμητὰς καὶ τοὺς παρανομαστὰς τῶν διαδοχικῶν ἀνηγμένων τοῦ συνεχοῦς κλάσματος, εἰς τὸ ὁποῖον ἀναπτύσσεται ἡ $\sqrt{2}$.

Εἰς τὴν σχολὴν τῶν Νεο-Πυθαγορείων, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνῆκον ὁ Νικόμαχος καὶ ὁ Θέων, ἀντιπαραβάλλεται ἡ σχολὴ τῶν Νεο-Πλατωνικῶν, ἕνα μέλος τῆς ὁποίας, ὁ Ἰάμβλιχος — καταγόμενος ἀπὸ ἐξέχουσαν οἰκογένειαν τῆς Χαλκίδος ἐπὶ τῆς Κοίλης Συρίας καὶ ζήσας κατὰ τὰς ἀρχὰς τοῦ IV αἰῶνος — παρέχει πολυτίμους πληροφορίας εἰς τὸν ἱστορικὸν τῆς ἀρχαίας θεωρίας τῶν ἀριθμῶν. Τὸ σπουδαιότερον ἀπὸ τὰ ἔργα του φέρει τὸν τίτλον Συλλογὴ τῶν Πυθαγορείων θεωριῶν. Ἀπὸ τὰ δέκα μέρη ποὺ τὸ ἀποτελοῦν τὰ πέντε μόνον ὑφίστανται σήμερον. Ἡμᾶς ἐνδιαφέρει τὸ τρίτον (Μαθηματικὴ εἰσαγωγή) καὶ τὸ τέταρτον (Σχόλιον εἰς Νικόμαχον). Ἐκ τούτων πληροφορούμεθα μεταγενεστέρας θεωρίας περὶ τῶν «εὐκλειδείων» τελείων ἀριθμῶν — τουτέστι τῆς μορφῆς $2^{\nu-1}(2^{\nu}-1)$ — μὴ στερουμένας πρωτοτυπίας καὶ ἀξίας, ἀλλὰ καί τινων σφαλμάτων. Εἶναι π.χ. ἀληθές, ὅπως βεβαιοῖ ὁ Ἰάμβλιχος, ὅτι ὑφίστανται τέλειοι ἀριθμοὶ εἰς τὸ διάστημα 10000^2 ἕως 10000^3, ἀλλὰ τοῦτο δὲν συμβαίνει, ὡς θεωρεῖ ἐκεῖνος, καὶ εἰς τὰ διαστήματα $10000^3 \ldots 10000^4$ καὶ $10000^4 \ldots 10000^5$. Ἴσως ἡ πλέον ἀξιοσημείωτος προσθήκη, τὴν ὁποίαν ἔκαμεν ἢ ἁπλῶς ἀναφέρει ὁ Ἰάμβλιχος, εἰς τὴν τότε ἀριθμητικὴν δίδεται ἀπὸ τὸ ἀκόλουθον θεώρημα: «Δοθέντων τριῶν διαδοχικῶν ἀριθμῶν, ὁ μέγιστος τῶν ὁποίων εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 3, εὑρίσκομεν τὸ ἄθροισμα. Τῶν ψηφίων ποὺ ἐκφράζουν τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν εὑρίσκομεν τὸ ἄθροισμα, καὶ ἐπὶ τοῦ οὕτω γεννωμένου ἀριθμοῦ πράττομεν ὁμοίως. Προβαίνοντες διαδοχικῶς κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον, θὰ εὑρίσκωμεν τελικῶς πάντοτε τὸν ἀριθμὸν 6».

88. Τὰ μαθηματικὰ κείμενα τὰ ὀφειλόμενα εἰς τοὺς ἀνακαινιστὰς τοῦ Πυθαγορισμοῦ ἔχουν τὸ μειονέκτημα ὅτι, ὑπὸ ἔποψιν δομῆς καὶ κομψότητος, ἀποτελοῦν ὀπισθοδρόμησιν συγκρινόμενα πρὸς τὰ ἔργα τῆς ἑλληνιστικῆς περιόδου, διότι οἱ συγγραφεῖς των φαίνονται ὡς νὰ ἔχουν

ἀγνοήσει τὸ γεγονός, ὅτι μία μαθηματικὴ πρότασις δικαιοῦται νὰ λάβῃ τὸν διακεκριμένον τίτλον τοῦ θεωρήματος μόνον, ὅταν ἀποκτήσῃ ἀδιαφιλονίκητον ἀπόδειξιν. Οὗτοι πράγματι περιωρίζοντο εἰς τὴν ἐπαλήθευσιν ἑκάστης ἰδιαιτέρας προτάσεως ἐπὶ ὀλίγων μερικῶν περιπτώσεων καὶ συνεπέραινον ἐξ αὐτῶν τὸ καθολικὸν κῦρος τῆς προτάσεως. Ὅσοι γνωρίζουν πόσον πολλαὶ εἶναι αἱ προτάσεις τῆς ἀριθμητικῆς, αἱ ὁποῖοι ἀληθεύουν εἰς πλείστας περιπτώσεις, ἀλλ' αἱ ὁποῖαι δὲν ὑπάρχουν ὡς καθολικαὶ προτάσεις, θ' ἀντιληφθοῦν χωρὶς κόπον, ὅτι αὐτὴ ἡ ἀφελὴς μέθοδος ἠδύνατο ν' ἀποβῇ πηγὴ βαρέων σφαλμάτων, καὶ συνεπῶς ἄκρως ἐπικίνδυνος διὰ τὴν ἐπιστήμην. Τὴν ἀπειλὴν αὐτήν, ἡ ὁποία ἐπεκρέμματο ἐπὶ τῆς ἑλληνικῆς ἐπιστήμης ἐπεσήμανεν ἕνας συμμαθητὴς τοῦ Πρόκλου, ὁ Δομνῖνος ὁ Λαρισαῖος, φιλόσοφος καὶ μαθηματικὸς τοῦ Ε' αἰῶνος μ.Χ. ἐκ τῆς συριακῆς πόλεως Λαρίσης ἢ Λαοδικείας, ὁ ὁποῖος εἰς ἕνα ἔργον του «Ἐγχειρίδιον ἀριθμητικῆς εἰσαγωγῆς», ὑφιστάμενον ὡς ἐκ θαύματος μέχρι σήμερον, ὑπεστήριξε τὴν ἀνάγκην τοῦ ἐξοβελισμοῦ τοιούτων ἐπισφαλῶν συλλογισμῶν, ὡς αὐτοὶ τοὺς ὁποίους ἐχρησιμοποίουν αἱ σχολιασταὶ τοῦ Πλάτωνος, διὰ νὰ ἐπιστρέψῃ ἡ μαθηματικὴ σκέψις εἰς τὴν ἄψογον μέθοδον τοῦ Εὐκλείδου, κατὰ τὴν ὁποίαν αἱ ἀριθμοὶ παριστάνοντο ὑπὸ εὐθυγράμμων τμημάτων. Ὁποίους καὶ πόσους ὀπαδοὺς εὗρε τὸ κήρυγμα τοῦ σοφοῦ Δομνίνου μᾶς εἶναι ἄγνωστον, ἴσως δὲ νὰ μὴ εὗρε οὔτε ἕνα. Μᾶς κάνει νὰ τὸ πιστεύσωμεν τὸ γεγονὸς ὅτι ἡ ἀντιζηλία του μὲ τὸν Πρόκλον, ἐκφυλισθεῖσα εἰς ἀνοικτὴν ἐχθρότητα καὶ ἀπολήξασα εἰς νίκην τοῦ τελευταίου, ὑπεχρέωσε τὸν ἀντίζηλον Δομνῖνον νὰ ἐγκαταλείψῃ τὰς Ἀθήνας, κέντρον τῆς ἑλληνικῆς παιδείας, διὰ νὰ τερματίσῃ ἀφανῶς τὴν ζωήν του εἰς τὴν Λαοδίκειαν. Διὰ τοῦτο ἡ ἀξιέπαινος προσπάθειά του ἀπέβη εἰς μάτην. Παρὰ ταῦτα ἐμνημονεύσαμεν τὸ γεγονός, ἂν μή τι ἄλλο, διὰ νὰ ἐξάρωμεν μίαν ἐκδήλωσιν ἱστορικῆς ἀναδρομῆς διδακτικὴν καὶ ἐνδιαφέρουσαν.

Διόφαντος

89. Αἱ ἐργασίαι τῶν νεωτέρων μαθητῶν τοῦ Πυθαγόρου καὶ τοῦ Πλάτωνος, καλυπτόμεναι ἐν γένει ἀπὸ μίαν ἀχλὺν ἐπισκιάζουσαν τὴν διαύγειαν καὶ τὴν ἀκρίβειαν τῶν φιλοσοφικῶν ἔργων, ἔχουν ἐπὶ πλέον ἕνα ἀρνητικὸν χαρακτηριστικὸν γνώρισμα — πέραν ἐκείνου περὶ τοῦ ὁποίου ἐγένετο λόγος προηγουμένως — ἄξιον ἰδιαιτέρας μνείας. Ὅτι δηλαδὴ ἐλλείπουν ἐντελῶς ἀπὸ τὰς ἐργασίας αὐτῶν ἐφαρμογαὶ τῶν ἀναπτυσσομένων θεωριῶν εἰς τὴν λύσιν προβλημάτων. Τὸ προκῦπτον κενὸν (τῆς βαρύτητος τοῦ ὁποίου δὲν ἔχουν ἀνάγκην ἀποδείξεως ὅσοι γνωρίζουν ὁποῖον κίνητρον διὰ τὴν μαθηματικὴν ἔρευναν ἀποτελοῦν τὰ προβλήματα) πληροῦται θαυμασίως ἀπὸ ἕνα κορυφαῖον ἐπιστήμονα, τὸν Διόφαντον.

ἀγνοήσει τὸ γεγονός, ὅτι μία μαθηματικὴ πρότασις δικαιοῦται νὰ λάβῃ τὸν διακεκριμένον τίτλον τοῦ θεωρήματος μόνον, ὅταν ἀποκτήσῃ ἀδιαφιλονίκητον ἀπόδειξιν. Οὗτοι πράγματι περιωρίζοντο εἰς τὴν ἐπαλήθευσιν ἑκάστης ἰδιαιτέρας προτάσεως ἐπὶ ὀλίγων μερικῶν περιπτώσεων καὶ συνεπέραινον ἐξ αὐτῶν τὸ καθολικὸν κῦρος τῆς προτάσεως. Ὅσοι γνωρίζουν πόσον πολλαὶ εἶναι αἱ προτάσεις τῆς ἀριθμητικῆς, αἱ ὁποῖοι ἀληθεύουν εἰς πλείστας περιπτώσεις, ἀλλ' αἱ ὁποῖαι δὲν ὑπάρχουν ὡς καθολικαὶ προτάσεις, θ' ἀντιληφθοῦν χωρὶς κόπον, ὅτι αὐτὴ ἡ ἀφελὴς μέθοδος ἠδύνατο ν' ἀποβῇ πηγὴ βαρέων σφαλμάτων, καὶ συνεπῶς ἄκρως ἐπικίνδυνος διὰ τὴν ἐπιστήμην. Τὴν ἀπειλὴν αὐτήν, ἡ ὁποία ἐπεκρέμματο ἐπὶ τῆς ἑλληνικῆς ἐπιστήμης ἐπεσήμανεν ἕνας συμμαθητὴς τοῦ Πρόκλου, ὁ Δομνῖνος ὁ Λαρισαῖος, φιλόσοφος καὶ μαθηματικὸς τοῦ Ε' αἰῶνος μ.Χ. ἐκ τῆς συριακῆς πόλεως Λαρίσης ἢ Λαοδικείας, ὁ ὁποῖος εἰς ἕνα ἔργον του «Ἐγχειρίδιον ἀριθμητικῆς εἰσαγωγῆς», ὑφιστάμενον ὡς ἐκ θαύματος μέχρι σήμερον, ὑπεστήριξε τὴν ἀνάγκην τοῦ ἐξοβελισμοῦ τοιούτων ἐπισφαλῶν συλλογισμῶν, ὡς αὐτοὶ τοὺς ὁποίους ἐχρησιμοποίουν αἱ σχολιασταὶ τοῦ Πλάτωνος, διὰ νὰ ἐπιστρέψῃ ἡ μαθηματικὴ σκέψις εἰς τὴν ἄψογον μέθοδον τοῦ Εὐκλείδου, κατὰ τὴν ὁποίαν αἱ ἀριθμοὶ παριστάνοντο ὑπὸ εὐθυγράμμων τμημάτων. Ὁποίους καὶ πόσους ὀπαδοὺς εὗρε τὸ κήρυγμα τοῦ σοφοῦ Δομνίνου μᾶς εἶναι ἄγνωστον, ἴσως δὲ νὰ μὴ εὗρε οὔτε ἕνα. Μᾶς κάνει νὰ τὸ πιστεύσωμεν τὸ γεγονὸς ὅτι ἡ ἀντιζηλία του μὲ τὸν Πρόκλον, ἐκφυλισθεῖσα εἰς ἀνοικτὴν ἐχθρότητα καὶ ἀπολήξασα εἰς νίκην τοῦ τελευταίου, ὑπεχρέωσε τὸν ἀντίζηλον Δομνῖνον νὰ ἐγκαταλείψῃ τὰς Ἀθήνας, κέντρον τῆς ἑλληνικῆς παιδείας, διὰ νὰ τερματίσῃ ἀφανῶς τὴν ζωήν του εἰς τὴν Λαοδίκειαν. Διὰ τοῦτο ἡ ἀξιέπαινος προσπάθειά του ἀπέβη εἰς μάτην. Παρὰ ταῦτα ἐμνημονεύσαμεν τὸ γεγονός, ἂν μή τι ἄλλο, διὰ νὰ ἐξάρωμεν μίαν ἐκδήλωσιν ἱστορικῆς ἀναδρομῆς διδακτικὴν καὶ ἐνδιαφέρουσαν.

Διόφαντος

89. Αἱ ἐργασίαι τῶν νεωτέρων μαθητῶν τοῦ Πυθαγόρου καὶ τοῦ Πλάτωνος, καλυπτόμεναι ἐν γένει ἀπὸ μίαν ἀχλὺν ἐπισκιάζουσαν τὴν διαύγειαν καὶ τὴν ἀκρίβειαν τῶν φιλοσοφικῶν ἔργων, ἔχουν ἐπὶ πλέον ἕνα ἀρνητικὸν χαρακτηριστικὸν γνώρισμα — πέραν ἐκείνου περὶ τοῦ ὁποίου ἐγένετο λόγος προηγουμένως — ἄξιον ἰδιαιτέρας μνείας. Ὅτι δηλαδὴ ἐλλείπουν ἐντελῶς ἀπὸ τὰς ἐργασίας αὐτῶν ἐφαρμογαὶ τῶν ἀναπτυσσομένων θεωριῶν εἰς τὴν λύσιν προβλημάτων. Τὸ προκῦπτον κενὸν (τῆς βαρύτητος τοῦ ὁποίου δὲν ἔχουν ἀνάγκην ἀποδείξεως ὅσοι γνωρίζουν ὁποῖον κίνητρον διὰ τὴν μαθηματικὴν ἔρευναν ἀποτελοῦν τὰ προβλήματα) πληροῦται θαυμασίως ἀπὸ ἕνα κορυφαῖον ἐπιστήμονα, τὸν Διόφαντον.

Περὶ τῆς ζωῆς τοῦ Διοφάντου γνωρίζομεν ἀκόμη ὀλιγώτερα τῶν ὅσων ἠδυνήθημεν νὰ μάθωμεν περὶ Εὐκλείδου καὶ Ἀπολλωνίου. Δυνάμεθα νὰ θεωροῦμεν ὡς βέβαιον ὅτι ἔζησε καὶ ἀπέθανεν εἰς Ἀλεξάνδρειαν, ὁ δὲ χρόνος τῆς ζωῆς του πρέπει νὰ τοποθετηθῇ ἐντὸς τοῦ χρονικοῦ διαστήματος ἀπὸ 200 π.Χ. μέχρι 400 μ.Χ., τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος, βάσει διαφόρων ὑποθέσεων, δύναται περαιτέρω νὰ περιορισθῇ ἀπὸ τοῦ 150 π.Χ. μέχρι τοῦ 250 μ.Χ.

Τὸ κυριώτερον ἔργον του ἀποτελεῖται ἀπὸ μίαν ποικιλωτάτην συλλογὴν ἀριθμητικῶν προβλημάτων ὑπὸ τὸν τίτλον «Τὰ Ἀριθμητικά». Ἀρχικῶς τὸ ἔργον τοῦτο περιελάμβανε δέκα τρία βιβλία, σήμερον ὅμως κατέχομεν μόνον τὰ 6. Κατὰ τὴν γνώμην μερικῶν ἱστορικῶν, ἡ ἀπώλεια δὲν πρέπει νὰ θεωρεῖται τόσον σοβαρὰ ὅσον εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν ἀριθμῶν 6 καὶ 13, διότι μερικὰ βιβλία ἐνδεχομένως ἐξηφανίσθησαν διὰ συγχωνεύσεως τῆς ὕλης των ὑπὸ πολὺ τολμηρῶν καὶ ἐλάχιστα εὐσυνειδήτων ἀντιγραφέων. Μία τοιαύτη παρηγορητικὴ ἐπιχειρηματολογία πόρρω ἀπέχει ἀπὸ τοῦ νὰ δύναται νὰ ὑποστηριχθῇ κατὰ τρόπον ἀναντίρρητον, διότι ἡ ἔρευνα τῶν διοφαντικῶν κωδίκων διδάσκει ὅτι αἱ προσβολαί, τὰς ὁποίας ὑπέστη τὸ ἔργον, ἀνάγονται εἰς τὸν XI καὶ ἴσως τὸν X αἰῶνα μ.Χ.

Διὰ νὰ ἐκθέσῃ μεθοδικώτερον ὁ Διόφαντος τὴν ὕλην ποὺ ἀνέλαβε νὰ πραγματευθῇ, ἔκαμε χρῆσιν ἑνὸς εἰδικοῦ συμβολισμοῦ (ὁ ὁποῖος θὰ ἠδύνατο νὰ χαρακτηρισθῇ ὡς στενογραφία) ἀσφαλῶς ἀρκετὰ ἀτελεστέρου ἐκείνου ποὺ χρησιμοποιοῦμεν σήμερον, ἱκανοῦ ὅμως νὰ κάμῃ τοὺς θαυμαστάς του νὰ θεωρήσουν τὸν Διόφαντον ὡς «πατέρα τῆς ἀλγέβρας». Δὲν συντασσόμεθα μὲ τὴν ἄποψίν των, μολονότι ἀναγνωρίζομεν ὅτι οἱ χαρακτῆρες, τοὺς ὁποίους χρησιμοποιεῖ ὁ μέγας Ἕλλην μαθηματικός, διὰ νὰ παραστήσῃ τὴν μονάδα, τὸν ἄγνωστον καὶ τὰς δυνάμεις του, ἢ διὰ νὰ παραστήσῃ τὴν ἀφαίρεσιν ἢ τὴν ἰσότητα δύο ἐκφράσεων, ἀποτελοῦν τὴν ἐμβρυώδη μορφὴν τοῦ συμβολικοῦ συστήματος, τὸ ὁποῖον ὡδήγησε τὴν ἐπιστήμην τοῦ ὑπολογισμοῦ εἰς τὰς ὑψηλοτέρας της κατακτήσεις. Δὲν εἶναι δὲ ἄγνωστα εἰς τὸν Διόφαντον οὔτε ὁ νόμος τῶν ἐκθετῶν

$$x^{\mu} \cdot x^{\nu} = x^{\mu+\nu}$$

(διὰ μ, ν, ἀκεραίους, θετικοὺς ἢ ἀρνητικούς), οὔτε ὁ κανὼν ὁ διδάσκων τὸ σημεῖον τῶν μερικῶν γινομένων ἀθροίσματος ἐπὶ διαφορὰν δύο τυχουσῶν ποσοτήτων.

Διὰ νὰ καταστήσωμεν σαφεστέραν τὴν σκέψιν μας, ὅσον ἀφορᾷ τὴν γνώμην ὅτι ὁ Διόφαντος εἶναι ὁ γενάρχης τῆς μεγάλης οἰκογενείας τῶν ἀλγεβριστῶν, πρέπει νὰ σημειώσωμεν ὅτι ἀπὸ τοῦδε καὶ εἰς τὸ ἑξῆς ἀποδίδομεν εἰς τὴν λέξιν «ἄλγεβρα» τὴν σημασίαν τῆς ἐπιστήμης, ἡ ὁποία συγκεντρώνει συστηματικῶς ὅλας τὰς μεθόδους τὰς χρησιμοποιουμένας

πρὸς λύσιν προβλημάτων μὲ ἀριθμητικὰ ἢ γενικὰ δεδομένα καὶ μὲ ἀγνώστους τοῦ αὐτοῦ εἴδους, ὡς καὶ τὰς συναφεῖς θεωρίας, αἱ ὁποῖαι ὁδηγοῦν εἰς τὴν διατύπωσιν καὶ δικαιολογίαν των. Ἐπὶ πλέον υἱοθετοῦμεν τὴν ὑπὸ Nesselmann προταθεῖσαν διάκρισιν τριῶν φάσεων ἀναπτύξεως τῶν ἀλγεβρικῶν θεωριῶν, ἤτοι:

1) Εἰς τὸ πρῶτον στάδιον, ἡ ἄλγεβρα δύναται νὰ ὀνομασθῇ ῥ η τ ο ρ ι κ ή, ἀφοῦ λόγῳ ἐλλείψεως παντὸς συμβολισμοῦ, οἱ ὑπολογισμοὶ γίνονται διὰ τοῦ λόγου. Τὰ ἀριθμητικὰ κείμενα τῶν νεο-πλατωνικῶν καὶ νεο-πυθαγορικῶν σχολῶν ἀνήκουν εἰς τὸ πρῶτον τοῦτο εἶδος τῆς ἀλγέβρας.

2) Εἰς τὸ δεύτερόν της στάδιον, ἡ ἄλγεβρα δύναται νὰ ὀνομασθῇ σ υ γ κ ε κ ο μ μ έ ν η, διότι χρησιμοποιεῖ γενικῶς τὸν λόγον, παρεμβάλλουσα μόνον ἐδῶ καὶ ἐκεῖ συντομογραφίας διὰ νὰ καταστήσῃ τὴν πορείαν τῶν συλλογισμῶν καὶ τῶν ὑπολογισμῶν εὐκολωτέραν καὶ συνοπτικωτέραν. Ἀκριβῶς αὐτὴν τὴν νέαν φάσιν ἐξελίξεως ἐκφράζει ὁ Διόφαντος.

3) Εἰς τὸ τελευταῖον καὶ τελειότερον στάδιον ἐξελίξεως, ἡ ἄλγεβρα δύναται νὰ ὀνομασθῇ σ υ μ β ο λ ι κ ή, καθ' ὅσον χρησιμοποιεῖ εἰδικὰ σύμβολα διὰ νὰ παραστήσῃ τὰ δεδομένα καὶ τὰ ζητούμενα (τοὺς ἀγνώστους), ὡς ἐπίσης διὰ νὰ παραστήσῃ τὰς διαφόρους πράξεις. Καὶ θὰ ἴδωμεν ὅτι ἔπρεπε ν' ἀνέλθωμεν εἰς τὸν XVII αἰῶνα προτοῦ δυνηθῇ ἡ ἄλγεβρα νὰ φθάσῃ εἰς τὸ στάδιον τοῦτο τῆς ἐξελίξως.

90. Ἐκ τῶν προβλημάτων, τὰ ὁποῖα πραγματεύεται ὁ ἀριθμητικὸς τῆς Ἀλεξανδρείας μερικὰ εἶναι πρώτου βαθμοῦ, ἄλλα δευτέρου βαθμοῦ καὶ ἕνα μόνον τοῦ τρίτου. Μερικὰ εἶναι ὡρισμένα, ἄλλα ἀπροσδιόριστα. Τῶν τελευταίων τούτων ὁ Διόφαντος δὲν ἐρευνᾷ τὰς ἀκεραίας καὶ θετικὰς λύσεις, ὅπως συνηθίζομεν σήμερον, ἀλλὰ μόνον τὰς θετικὰς ῥητὰς λύσεις. Τοῦτο προφανῶς καθιστᾷ τὴν ἔρευναν πολὺ εὐκολωτέραν καὶ ἀποδεικνύει ὅτι εἶναι πράγματι ἀδικαιολόγητος ἡ ὀνομασία Δ ι ο φ α ν τ ι κ ὴ ἀ ν ά λ υ σ ι ς, ἡ ὁποία ἐδόθη εἰς τὴν ἀπροσδιόριστον ἀνάλυσιν, ἀκόμη καὶ ἐκ μέρους ἐκείνων (καὶ ἀρκεῖ ν' ἀναφέρωμεν τὸ ἔνδοξον ὄνομα τοῦ Jacobi) οἱ ὁποῖοι ἐγνώριζον κατὰ βάθος τὸ ἔργον τοῦ Διοφάντου.

Μιὰ γενικὴ ἐπισκόπησις τῶν προβλημάτων ποὺ πραγματεύεται ὁ Διόφαντος, φέρει εἰς φῶς, ὅτι δύνανται νὰ κατανεμηθοῦν εἰς ὁμάδας καὶ ὅτι τὰ στοιχεῖα ἑκάστου συνδέονται μεταξύ των μὲ προφανεῖς ἀναλογικὰς σχέσεις. Ἐπὶ πλέον ὅτι ὁ Διόφαντος δὲν ἐξήτασε πάντοτε ὅλα τὰ προβλήματα, τὰ ὁποῖα θὰ εἶχον δικαίωμα νὰ περιληφθοῦν εἰς τὴν ἰδίαν ὁμάδα. Κατὰ πόσον τὰ προκύπτοντα κενὰ εἶναι ἀποτέλεσμα ἐσκεμμένης ἐνεργείας τοῦ συγγραφέως ἢ ἐπεβλήθησαν εἰς τὸ κείμενον ἀπὸ ἀντιγραφεῖς μικρᾶς ἀξιοπιστίας, εἶναι σήμερον ἀδύνατον νὰ ἐξακριβώσωμεν.

Αἱ μέθοδοι, τὰς ὁποίας ἀκολουθεῖ ὁ μέγας Ἕλλην ἀριθμητικὸς διὰ τὴν

λύσιν τῶν ἐξεταζομένων προβλημάτων, δὲν ἐκτίθενται ὑπὸ τούτου μὲ ὅρους γενικούς, ἀλλ' ἐφαρμόζονται ἁπλῶς ἀπὸ περιπτώσεως εἰς περίπτωσιν. Ἐπαφίεται λοιπὸν εἰς τὸν ἀναγνώστην νὰ ἐξαγάγῃ ἐκ τῶν ἐφαρμογῶν γενικὰ συμπεράσματα. Οὕτω βλέπομεν, ὅτι διὰ νὰ λύσῃ ἕνα πρόβλημα πρώτου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον, προβαίνει περίπου κατὰ τὴν σύγχρονον μέθοδον τῆς συγκεντρώσεως εἰς τὸ ἕνα μέλος τῆς ἐξισώσεως τῶν ὅρων ποὺ ἔχουν τὸν ἄγνωστον, εἰς δὲ τὸ ἄλλο μέλος τοὺς γνωστοὺς ὅρους. Τοιουτοτρόπως τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὴν ἐκτέλεσιν μιᾶς διαιρέσεως ἢ εἰς τὴν ἀναζήτησιν μιᾶς τετάρτης ἀναλόγου. Ὅταν κατόπιν ὁ Διόφαντος ἐπιλαμβάνεται προβλήματος ἀναγομένου εἰς ὡρισμένον σύστημα γραμμικῶν ἐξισώσεων, συναντᾷ μίαν δυσκολίαν ἄγνωστον εἰς ἡμᾶς, ἡ ὁποία προήρχετο ἐκ τοῦ γεγονότος ὅτι οὗτος διέθετε ἕνα μόνον σύμβολον πρὸς παράστασιν τῶν ἀγνώστων. Διὰ τὴν ὑπερνίκησιν τῆς δυσκολίας αὐτῆς ἐξέφραζε τοὺς λοιποὺς ἀγνώστους συναρτήσει ἑνὸς προνομιούχου, ὁ ὁποῖος δὲν ἦτο πάντοτε ἕνας ἐξ ἐκείνων, ποὺ εἰσήρχοντο εἰς τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος, ἀλλὰ συχνὰ ἦτο ἕνας βοηθητικὸς ἄγνωστος, ἐκλεγόμενος εἰς ἑκάστην ἰδιαιτέραν περίπτωσιν. Ἀκριβῶς δὲ εἰς τὴν ἐκλογὴν τοιούτου βοηθητικοῦ ἀγνώστου ὁ Διόφαντος ἔδωσεν ἐξαιρετικὰ δείγματα εὐφυΐας καὶ γονιμότητος, τὰ ὁποῖα ἴσως νὰ ἔφθασαν, ἀλλὰ δὲν ὑπερέβησαν οἱ μεταγενέστεροι μαθηματικοί.

Εἶναι δυσκολώτερον νὰ ἐξαγάγωμεν κάποιον συμπερασμὸν γενικοῦ χαρακτῆρος, ὅσον ἀφορᾷ τὰς λύσεις τῶν διοφαντικῶν προβλημάτων, αἱ ὁποῖαι ἰσοδυναμοῦν πρὸς λύσεις δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων, ἀφοῦ π.χ. δὲν κατέστη ἀκόμη δυνατὸν νὰ μάθωμεν μετὰ βεβαιότητος, ἐὰν οὗτος ἐγνώριζε τὰς δύο ρίζας τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως εἰς τὴν περίπτωσιν ποὺ εἶναι ἀμφότεραι θετικαί. Καὶ τὸ σκότος γίνεται μεγαλύτερον ὅσον ἀφορᾷ τὸν τρόπον, τὸν ὁποῖον ἀκολουθεῖ διὰ ν' ἀναγνωρίσῃ ὅτι ἡ κυβικὴ ἐξίσωσις:

$$x^3-3x^2+3x-1=x^2+2x+3$$

ἔχει ρίζαν $x=4$, μολονότι φαίνεται πιθανὴ ἡ ὑπόθεσις, ὅτι ἔφθασεν εἰς τὸ συμπέρασμα τοῦτο ἀφοῦ προηγουμένως ἔδωσεν εἰς αὐτὴν τὴν ἀκόλουθον μορφήν:

$$x(x^2+1)=4(x^2+1).$$

Ἡ ἰδία ποικιλία εὐφυεστάτων τεχνασμάτων, ποὺ ἀπαντᾶται εἰς τὴν λύσιν συστημάτων πρώτου βαθμοῦ, ἐφαρμόζεται καὶ προκειμένου περὶ συστημάτων ἐξισώσεων, τῶν ὁποίων μία τοὐλάχιστον εἶναι δευτεροβάθμιος, εἰς τρόπον ὥστε ἡ μελέτη τοῦ Διοφάντου νὰ εἶναι ἀκόμη καὶ σήμερον πολὺ διδακτικὴ δι' ἐκεῖνον ποὺ ἐπιθυμεῖ νὰ ἐξοικειωθῇ μὲ τὴν λύσιν τοιούτων συστημάτων.

91. Ἀπὸ ὅλα αὐτὰ δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν, ὅτι κατὰ τὸν χειρισμὸν προβλημάτων ὡρισμένων, ὁ Διόφαντος ἐνεργεῖ κατὰ τρόπον μὴ διαφέροντα ἐκείνου, τὸν ὁποῖον θὰ ἠκολούθει ἕνας σύγχρονος ἀλγεβριστής. Ἀλλὰ τοῦτο δὲν δύναται νὰ ἐπαναληφθῇ προκειμένου περὶ τῶν ἀορίστων προβλημάτων. Ἐν πρώτοις, ἐνῷ ἡμεῖς σήμερον εἰς τὰ προβλήματα τοῦ εἴδους τούτου ἀπαιτοῦμεν τὴν γενικὴν λύσιν εἰς ἀκεραίους καὶ θετικοὺς ἀριθμούς, ὁ Ἕλλην μαθηματικὸς περιορίζεται ἐν γένει εἰς τὴν εὕρεσιν μιᾶς εἰδικῆς λύσεως εἰς ἀριθμοὺς ῥητοὺς θετικούς. Οὕτως ἐχόντων τῶν πραγμάτων, εἶναι φανερὸν ὅτι διὰ τὸν Διόφαντον δὲν ὑφίσταται πρόβλημα ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως πρώτου βαθμοῦ, ἀφ' ἧς στιγμῆς δοθείσης μιᾶς αὐθαιρέτου τιμῆς x_0 τοῦ ἀγνώστου x, μικροτέρας τοῦ λόγου γ/α, ἡ ἐξίσωσις

$$\alpha x + \beta y = \gamma$$

ἐπαληθεύεται ἀπὸ τὸν ῥητὸν θετικὸν ἀριθμόν:

$$y = \frac{\gamma - \alpha x_0}{\beta}.$$

Ὅταν ὅμως μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων τοῦ προβλήματος εὑρίσκωνται καὶ δευτεροβάθμιοι, ὁ Διόφαντος δέχεται διὰ μερικοὺς ἀγνώστους ἐκφράσεις περιεχούσας ἕνα ἀόριστον, καὶ ἐκλέγει τούτους κατὰ τρόπον ὥστε τὸ ὅλον νὰ εἶναι ῥητόν. Π.χ. εἰς τὴν ἐξίσωσιν

$$x^2 + y^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

θέτει

$$x = \lambda\xi - \alpha$$
$$y = \mu\xi - \beta$$

ὅπου λ, μ αὐθαίρετοι σταθεραὶ καὶ ξ μία προσδιοριστέα ποσότης. Εὑρίσκει οὕτω

$$\xi = 2\,\frac{\lambda\alpha + \mu\beta}{\lambda^2 + \mu^2}$$

καὶ τότε οἱ ἄγνωστοι x, y προκύπτουν ῥητοί. Μᾶς εἶναι ἀδύνατον νὰ μνημονεύσωμεν τὰς ποικίλας μορφάς, ὑπὸ τὰς ὁποίας ὁ Διόφαστος ἐφαρμόζει τὴν ἰδέαν αὐτήν, ἂν καὶ παρέχουν ἰσάριθμα δείγματα ἀπαραμίλλου δεξιοτεχνίας εἰς τοὺς ὑπολογισμούς. Θ' ἀρκεσθῶμεν μᾶλλον εἰς τὸ νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι πλεῖστα τῶν διοφαντικῶν προβλημάτων ὁδηγοῦν εἰς τὸ ἀκόλουθον γενικὸν πρόβλημα: Δοθεισῶν δύο ἀλγεβρικῶν ῥητῶν ἀκεραίων συναρτήσεων πρώτου ἢ δευτέρου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον, νὰ προσδιορισθῇ μία τιμὴ τούτου, διὰ τὴν ὁποίαν αἱ δύο συναρτήσεις ν' ἀποκτοῦν τετραγωνικὰς τιμάς. Ἡ λύσις μιᾶς τοιαύτης «διπλοϊσότητος»

εἰς τὸ πεδίον τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν εἶναι ἐπιχείρησις ἀρκετὰ δυσχερής, ἀλλὰ καὶ εἰς τὸ πεδίον τῶν ρητῶν ἀριθμῶν παρουσιάζει τεραστίας δυσκολίας, τὰς ὁποίας ὁ ἴδιος ὁ Διόφαντος δὲν ἠδυνήθη νὰ ὑπερνικήσῃ παρὰ μόνον εἰς εἰδικὰς περιπτώσεις, καταφεύγων μάλιστα ἐνίοτε εἰς τὴν ὑπ' αὐτοῦ ὀνομασθεῖσαν «προσεγγιστικὴν μέθοδον», ἡ ὁποία ἀποτελεῖ μίαν μορφὴν τοῦ κανόνος τῆς «αὐθαιρέτου ἀφετηρίας» (Regula falsi).

Παραδείγματα διπλῶν ἰσοτήτων ἀπαντῶνται εἰς τὸ VI βιβλίον τοῦ ὑπὸ ἐξέτασιν ἔργου, τὸ βιβλίον δὲ τοῦτο κατ' ἀντίθεσιν πρὸς τὰ προηγούμενα παρουσιάζει ἀπόλυτον ἑνότητα καὶ ἀποσκοπεῖ εἰς τὴν κατασκευὴν τριγώνων ὀρθογωνίων μὲ πλευρὰς μετρουμένας ὑπὸ ρητῶν ἀριθμῶν πληρούντων ὡρισμένας συνθήκας. Π.χ. τὴν συνθήκην, ὅπως ἡ διχοτόμος τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐκφράζηται ἐπίσης διὰ ρητοῦ ἀριθμοῦ ἢ ὅπως τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου προσλαβὸν «τὸν ἐν ἑκατέρᾳ τῶν ὀρθῶν, ποιῇ τετράγωνον»[44].

Ἂς σημειωθῇ τέλος, ὅτι μεταξὺ τῶν προβλημάτων τὰ ὁποῖα πραγματεύεται ὁ Διόφαντος, ἕνα μόνον ἔχει συνάφειαν μὲ τὸν πρακτικὸν βίον, τὸ ἀκόλουθον: «Ἠγόρασέ τις δύο εἴδη οἴνου, ἐκ μὲν τοῦ ἑνὸς τὸν χοέα πρὸς 8 δραχμάς, ἐκ δὲ τοῦ ἄλλου τὸν χοέα πρὸς 5 δραχμὰς καὶ εἶπεν ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ ὅλου νὰ εἶναι τετράγωνος ἀριθμός, ὁ ὁποῖος, προστιθέμενος εἰς τὸ 60 ἐσχημάτιζε τετράγωνον ἀριθμόν, τοῦ ὁποίου ἡ τετραγωνικὴ ρίζα ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν χοέων. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ὀκτάδραχμοι χοεῖς»[45].

92. Τὰ Ἀριθμητικὰ τοῦ Διοφάντου εἶναι ἄξια πολλῆς προσοχῆς καὶ μελέτης ὄχι μόνον διὰ τὸ θέλγητρον τῶν περιεχομένων προβλημάτων καὶ τὴν ἀξίαν τῶν μεθόδων λύσεως αὐτῶν, ἀλλ' ἀκόμη διότι διδασκόμεθα πλῆθος ἀριθμητικῶν θεωρημάτων, τὰ ὁποῖα δὲν ἀπαντῶνται εἰς ἀρχαιοτέρους συγγραφεῖς. Ἀναφέρομεν π.χ. τὰ ἑξῆς:

I. Τὸ τετράγωνον δύο ἀριθμῶν, ὧν ἕκαστος εἶναι ἄθροισμα δύο τετραγώνων, δύναται νὰ ἐκφρασθῇ κατὰ δύο διαφόρους τρόπους ὡς ἄθροισμα δύο τετραγώνων.

II. Ἡ διπλοϊσότης ἡ ἔχουσα ὡς πρῶτα μέλη $a_1x+\beta_1$, $a_2x+\beta_2$ λύεται ὅταν β_1, β_2 ἀριθμοὶ τετράγωνοι.

III. Ἐὰν $3a+1$ εἶναι ἄθροισμα τριῶν τετραγώνων, ὁ ἀριθμὸς a δὲν δύναται νὰ εἶναι τῆς μορφῆς $8n+2$.

IV. Κάθε ἀριθμὸς ἴσος πρὸς τὸ ἄθροισμα δύο κύβων δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ἐπίσης ὡς διαφορὰ δύο κύβων ἤ, μὲ ἄλλας λέξεις, ἕνας κύβος δύναται ν' ἀναλυθῇ εἰς ἄθροισμα τριῶν ἄλλων.

Ἐξ ἄλλου ἀπὸ ἕνα χωρίον τοῦ Διοφάντου φαίνεται, ὅτι οὗτος εἶχε

διαίσθησιν τῆς ἰδιότητος, καθ' ἣν πᾶς ἀριθμὸς ἀκέραιος δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὡς ἄθροισμα τὸ πολὺ τεσσάρων τετραγώνων.

Ἡ ἀπουσία ἐκ τῆς μαθηματικῆς γραμματείας κειμένων τοῦ εἴδους τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου, ἀρχαιοτέρας ἐποχῆς, ἡ ἐξαφάνισις ἐπαρκῶν σχολίων (τὰ δύο πρῶτα βιβλία εὗρον ἕνα ὑπομνηματιστὴν κατὰ τὸν XIV αἰῶνα ἐν τῷ προσώπῳ τοῦ Μαξίμου Πλανούδη, περὶ τοῦ ὁποίου θὰ ὁμιλήσωμεν βραδύτερον ἐν § 95, ἐνῷ ἀγνοοῦμεν τελείως τὴν ἔκτασιν παρομοίας ἐργασίας ὀφειλομένης εἰς τὴν Ὑπατίαν), ὡς καὶ ἡ λήθη ποὺ ἐκάλυψε τὸν Διόφαντον ἐκ τῆς ἐλλείψεως προσώπων ἱκανῶν νὰ κατανοήσουν τὸ ἔργον του, ἀποτελοῦν ἰσάριθμα θλιβερὰ περιστατικά, διότι καθιστοῦν ἀδύνατον τὴν ἀκριβῆ ἐκτίμησιν τοῦ βαθμοῦ τῆς πρωτοτυπίας τοῦ ἐν λόγῳ ἔργου. Πρέπει ἐν τούτοις νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι ἀπὸ μερικὰς φράσεις τοῦ Διοφάντου ἀγόμεθα εἰς τὸ συμπέρασμα, ὅτι τὸ ἔργον του δὲν εἶναι ἐξ ὁλοκλήρου νέον, ἀλλ' ὅτι ἀποτελεῖ συγκέντρωσιν προϋπάρχοντος ὑλικοῦ, τὸ ὁποῖον οὗτος ἐπεξειργάσθη καὶ ἐτελειοποίησε μὲ τοιαύτην ἐπιμέλειαν εἰς τρόπον, ὥστε νὰ δυνηθῇ νὰ συνθέσῃ ἕνα σύνολον μεγίστης ὠφελιμότητος διὰ τοὺς φιλομαθεῖς.

Ἡ ὀλίγον αὐστηρὰ αὐτὴ κρίσις εὑρίσκει, ὅπως λέγουν μερικοί, ἐπιβεβαίωσιν εἰς ὅ,τι ἀπέμεινε σήμερον ἀπὸ ἕνα μικρὸν ἔργον τοῦ Διοφάντου περὶ πολυγώνων ἀριθμῶν, εἰς τὸ ὁποῖον δὲν περιέχονται θέματα ἢ μέθοδοι πρωτότυποι, ἀλλ' ἡ ἐκ τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου γνωστὴ γεωμετρικὴ ἄλγεβρα ἐφαρμόζεται εἰς μίαν διωρθωμένην καὶ βελτιωμένην ἀνάπτυξιν μιᾶς θεωρίας ἡ ὁποία περιελαμβάνετο εἰς ἀπολεσθὲν σήμερον κείμενον τοῦ Ὑψικλέους τοῦ Ἀλεξανδρέως (§ 52).

Σπεύδομεν παρὰ ταῦτα νὰ σημειώσωμεν, ὅτι ἡ ἐκ τῆς διαπιστώσεως ταύτης ἐξαγωγὴ συμπεράσματος, ὅτι ὁ Διόφαντος ὑπῆρξε τάχα κάτι περισσότερον ἑνὸς ἐρανιστοῦ, δὲν ἀποτελεῖ κρίσιν ἐπαρκῶς θεμελιωμένην, διότι δὲν ἐλλείπουν εἰς τὴν ἱστορίαν τῆς ἀνθρωπίνης σκέψεως παραδείγματα πρωτοτύπων ἐρευνητῶν, οἱ ὁποῖοι εἰς τὴν αὐγὴν ἢ τὴν δύσιν τῆς σταδιοδρομίας των δὲν ἐθεώρησαν ἀσχολίαν κατωτέραν ἑαυτῶν τὴν συγγραφὴν θεωριῶν, αἱ ὁποῖαι δὲν ἔφερον τὴν σφραγῖδα τῆς ἰδικῆς των ἐμπνεύσεως. Διὰ τοῦτο, καθ' ἡμᾶς, τὸ πρόβλημα τῆς πρωτοτυπίας τοῦ Διοφάντου, ὅπως συμβαίνει καὶ μὲ τὰ ἀφορῶντα τὴν ζωήν του, καλύπτεται, μέχρι τῆς στιγμῆς, ἀπὸ ἀνεξιχνίαστον σκότος.

Ἀριθμητικὰ παίγνια τῶν Ἑλλήνων

93. Ὁ ἄκρος σκεπτικισμός, ποὺ ὑπαγορεύει αὐτὰς τὰς λέξεις, θὰ προκαλέσῃ ἴσως ἔκπληξιν εἰς ἐκείνους, οἱ ὁποῖοι ἐνθυμοῦνται ὅσα ἔχουν

διαίσθησιν τῆς ἰδιότητος, καθ' ἣν πᾶς ἀριθμὸς ἀκέραιος δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὡς ἄθροισμα τὸ πολὺ τεσσάρων τετραγώνων.

Ἡ ἀπουσία ἐκ τῆς μαθηματικῆς γραμματείας κειμένων τοῦ εἴδους τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου, ἀρχαιοτέρας ἐποχῆς, ἡ ἐξαφάνισις ἐπαρκῶν σχολίων (τὰ δύο πρῶτα βιβλία εὗρον ἕνα ὑπομνηματιστὴν κατὰ τὸν XIV αἰῶνα ἐν τῷ προσώπῳ τοῦ Μαξίμου Πλανούδη, περὶ τοῦ ὁποίου θὰ ὁμιλήσωμεν βραδύτερον ἐν § 95, ἐνῷ ἀγνοοῦμεν τελείως τὴν ἔκτασιν παρομοίας ἐργασίας ὀφειλομένης εἰς τὴν Ὑπατίαν), ὡς καὶ ἡ λήθη ποὺ ἐκάλυψε τὸν Διόφαντον ἐκ τῆς ἐλλείψεως προσώπων ἱκανῶν νὰ κατανοήσουν τὸ ἔργον του, ἀποτελοῦν ἰσάριθμα θλιβερὰ περιστατικά, διότι καθιστοῦν ἀδύνατον τὴν ἀκριβῆ ἐκτίμησιν τοῦ βαθμοῦ τῆς πρωτοτυπίας τοῦ ἐν λόγῳ ἔργου. Πρέπει ἐν τούτοις νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι ἀπὸ μερικὰς φράσεις τοῦ Διοφάντου ἀγόμεθα εἰς τὸ συμπέρασμα, ὅτι τὸ ἔργον του δὲν εἶναι ἐξ ὁλοκλήρου νέον, ἀλλ' ὅτι ἀποτελεῖ συγκέντρωσιν προϋπάρχοντος ὑλικοῦ, τὸ ὁποῖον οὗτος ἐπεξειργάσθη καὶ ἐτελειοποίησε μὲ τοιαύτην ἐπιμέλειαν εἰς τρόπον, ὥστε νὰ δυνηθῇ νὰ συνθέσῃ ἕνα σύνολον μεγίστης ὠφελιμότητος διὰ τοὺς φιλομαθεῖς.

Ἡ ὀλίγον αὐστηρὰ αὐτὴ κρίσις εὑρίσκει, ὅπως λέγουν μερικοί, ἐπιβεβαίωσιν εἰς ὅ,τι ἀπέμεινε σήμερον ἀπὸ ἕνα μικρὸν ἔργον τοῦ Διοφάντου περὶ πολυγώνων ἀριθμῶν, εἰς τὸ ὁποῖον δὲν περιέχονται θέματα ἢ μέθοδοι πρωτότυποι, ἀλλ' ἡ ἐκ τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου γνωστὴ γεωμετρικὴ ἄλγεβρα ἐφαρμόζεται εἰς μίαν διωρθωμένην καὶ βελτιωμένην ἀνάπτυξιν μιᾶς θεωρίας ἡ ὁποία περιελαμβάνετο εἰς ἀπολεσθὲν σήμερον κείμενον τοῦ Ὑψικλέους τοῦ Ἀλεξανδρέως (§ 52).

Σπεύδομεν παρὰ ταῦτα νὰ σημειώσωμεν, ὅτι ἡ ἐκ τῆς διαπιστώσεως ταύτης ἐξαγωγὴ συμπεράσματος, ὅτι ὁ Διόφαντος ὑπῆρξε τάχα κάτι περισσότερον ἑνὸς ἐρανιστοῦ, δὲν ἀποτελεῖ κρίσιν ἐπαρκῶς θεμελιωμένην, διότι δὲν ἐλλείπουν εἰς τὴν ἱστορίαν τῆς ἀνθρωπίνης σκέψεως παραδείγματα πρωτοτύπων ἐρευνητῶν, οἱ ὁποῖοι εἰς τὴν αὐγὴν ἢ τὴν δύσιν τῆς σταδιοδρομίας των δὲν ἐθεώρησαν ἀσχολίαν κατωτέραν ἑαυτῶν τὴν συγγραφὴν θεωριῶν, αἱ ὁποῖαι δὲν ἔφερον τὴν σφραγῖδα τῆς ἰδικῆς των ἐμπνεύσεως. Διὰ τοῦτο, καθ' ἡμᾶς, τὸ πρόβλημα τῆς πρωτοτυπίας τοῦ Διοφάντου, ὅπως συμβαίνει καὶ μὲ τὰ ἀφορῶντα τὴν ζωήν του, καλύπτεται, μέχρι τῆς στιγμῆς, ἀπὸ ἀνεξιχνίαστον σκότος.

Ἀριθμητικὰ παίγνια τῶν Ἑλλήνων

93. Ὁ ἄκρος σκεπτικισμός, ποὺ ὑπαγορεύει αὐτὰς τὰς λέξεις, θὰ προκαλέσῃ ἴσως ἔκπληξιν εἰς ἐκείνους, οἱ ὁποῖοι ἐνθυμοῦνται ὅσα ἔχουν

διαβάσει εἰς μερικάς συγχρόνους συλλογάς ἀριθμητικῶν προβλημάτων, ὅτι δηλαδὴ ἐπὶ τοῦ τάφου τοῦ Διοφάντου εἶχον γραφῆ τὰ ἑξῆς:

«Οὗτός τοι Διόφαντον ἔχει τάφος· ἆ μέγα θαῦμα,
καὶ τάφος ἐκ τέχνης μέτρα βίοιο λέγει·
ἕκτην κουρίζειν βιότου θεὸς ὤπασε μοίρην·
δωδεκάτην δ' ἐπιθεὶς μῆλα πόρεν χλοάειν·
τῇ δ' ἄρ' ἐφ' ἑβδομάτῃ τὸ γαμήλιον ἥψατο φέγγος,
ἐκ δὲ γάμων πέμπτῳ παῖδ' ἐπένευσεν ἔτει·
αἶ αἶ τηλύγετον δειλὸν τέκος, ἥμισυ πατρὸς
τοῦδε καὶ ἡ κρυερὸς μέτρον ἑλὼν βιότου.
πένθος δ' αὖ πισύρεσσι παρηγορέων ἐνιαυτοῖς,
τῆδε πόσου σοφίῃ τέρμ' ἐπέρησε βίου» [46].

Θὰ ἔπρεπε λοιπὸν νὰ θεωρεῖται, κατόπιν τούτου, ὡς θεμελιωμένον τὸ γεγονός, ὅτι ὁ περὶ οὗ ὁ λόγος μαθηματικὸς ἐξῆλθε τῆς παιδικῆς ἡλικίας 14 ἐτῶν, ἔγινεν ἔφηβος εἰς ἡλικίαν 21 ἐτῶν, ἐνυμφεύθη 33 ἐτῶν, ἔγινε πατὴρ 38 ἐτῶν, ἔχασε τὸν υἱόν του εἰς ἡλικίαν 80 ἐτῶν καὶ μετὰ τετραετίαν ἀπέθανε. Ἀλλὰ τὸ περίεργον αὐτὸ αἴνιγμα, τοῦ ὁποίου ἡ λύσις ὁρίζει τὰ στάδια τῆς ἐπιγείου σταδιοδρομίας τοῦ Διοφάντου, ἐλήφθη ἀπὸ τὴν Ἑλληνικὴν Ἀνθολογίαν, δηλαδὴ μίαν συλλογὴν συγγραφεῖσαν ἀπὸ κάποιον Μητρόδωρον (μεταξὺ τέλους τοῦ V αἰῶνος καὶ ἀρχῶν τοῦ VI αἰῶνος μ.Χ.) μὲ τὸν ἀξιέπαινον σκοπὸν νὰ προσφέρῃ εἰς τοὺς συμπατριώτας του ἕνα σύνολον ἑλκυστικῶν ἀριθμητικῶν προβλημάτων ποικίλου περιεχομένου, χωρὶς ὅμως τὴν ἀξίωσιν τῆς παροχῆς ἠγγυημένων ἱστορικῶν πληροφοριῶν. Ἄλλωστε τὰ δεδομένα τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος ἔχουν τόσον ἐπιτυχῶς συνδυασθῆ, ὥστε νὰ δίδουν πιστευτὴν εἰκόνα τῶν παραδοξοτήτων τῆς ἀνθρωπίνης ζωῆς. Διὰ τοῦτο εἶναι ἄξιον συστάσεως νὰ μὴ λαμβάνωνται ὑπὸ σοβαρὰν ἔποψιν αἱ πληροφορίαι τοῦ προβλήματος.

Ἀντιθέτως ὅμως, ὁ ἱστορικὸς τῶν μαθηματικῶν ὀφείλει νὰ στρέψῃ τὴν προσοχήν του εἰς τὸ σύνολον τῶν προβλημάτων, τὰ ὁποῖα περιέχονται εἰς τὴν Ἑλληνικὴν Ἀνθολογίαν, διότι, παρ' ὅλην τὴν ἁπλότητα τῆς ἐκφωνήσεώς των, χρησιμεύουν ἄριστα εἰς τὸ νὰ ἐκτιμήσωμεν τὸ ὕψος τῶν ἀριθμητικῶν γνώσεων, τὰς ὁποίας κατεῖχεν ὁ ἑλληνικὸς λαός, μεταξὺ τῶν ἄλλων τίτλων ἐπιστημονικῆς εὐγενείας ποὺ τοῦ ἀνῆκουν.

Μερικὰ τῶν προβλημάτων τούτων λύονται μὲ ἁπλᾶς ἐφαρμογὰς τῶν πρώτων ἀριθμητικῶν πράξεων. Ἄλλα ἀνάγονται εἰς τὸν μερισμὸν ἑνὸς ποσοῦ εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς δοθέντας ἀριθμούς. Ἄλλα ἀποτελοῦν διαφόρους μορφὰς τοῦ «προβλήματος τῶν κρουνῶν», τὸ ὁποῖον ἀκόμη σήμερον δὲν λείπει ἀπὸ τὰ σχολικὰ ἐγχειρίδια, καὶ ἕνα λύεται δι' ἐφαρμογῆς τοῦ «Θυμαριδείου ἐπανθήματος» (§ 84).

Μία ἀξιοσημείωτος ὁμὰς προβλημάτων ἄγει εἰς συστήματα ὡρισμένα ν ($\nu > 1$) γραμμικῶν ἐξισώσεων. Τοιοῦτον εἶναι καὶ τὸ ἀναφερόμενον εἰς τὸν Διόφαντον. Παρόμοιον ἐπίσης καὶ τὸ ἀκόλουθον, ἄγνωστον διὰ ποῖον λόγον (ἐὰν ὑπάρχῃ) ἀποδιδόμενον εἰς τὸν Εὐκλείδη:

«Ἡμίονος καὶ ὄνος φέρουσαι σῖτον ἔβαινον·
αὐτὰρ ὄνος στενάχιζεν ἐπ' ἄχθεϊ φόρτου ἑοῖς,
τὴν δὲ βαρυστενάχουσαν ἰδοῦσ' ἐρέεινεν ἐκείνη.
Μῆτερ τί κλαίουσ' ὀλοφύρεαι, ἠΰτε κούρη!
εἰ μέτρον ἕν μοι δοίης, διπλάσιον σέθεν ἦρα·
εἰ δὲ ἓν ἀντιλάβοις, πάντως ἰσότητα φυλάξεις.
Εἰπὲ τὸ μέτρον, ἄριστε γεωμετρίης ἐπίιστορ.» [47].

94. Ἀλλὰ τὸ ὡραιότερον καὶ δυσκολώτερον ἐκ τῶν προβλημάτων τῶν περιεχομένων εἰς τὴν περὶ ἧς ὁ λόγος συλλογὴν (τόσον δύσκολον εἰς τὴν λύσιν καὶ κατανόησίν του, ὥστε ἀπεκλείσθη ἀπὸ τὰς πρώτας ἐκδόσεις) εἶναι τὸ ἀποδιδόμενον εἰς τὸν Ἀρχιμήδη «βοεικὸν πρόβλημα», ἀποσταλὲν ὑπὸ τούτου πρὸς τὸν ἐπιστήθιον φίλον του Ἐρατοσθένην τὸν Κυρηναῖον. Θεωροῦμεν ἐπιβαλλομένην ὑποχρέωσιν ν' ἀναφέρωμεν ἐδῶ τὴν πλήρη ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος:

«Πληθὺν Ἠελίοιο βοῶν, ὦ ξεῖνε, μέτρησον
φροντίδ' ἐπιστήσας, εἰ μετέχεις σοφίης,
πόσση ἄρ' ἐν πεδίοις Σικελῆς ποτ' ἐβόσκετον νήσου
Θρινακίης τετραχῇ στίφεα δασσαμένη
χροιὴν ἀλλάσσοντα· τὸ μὲν λευκοῖο γάλακτος
κυανέῳ δ' ἕτερον χρώματι λαμπόμενον,
ἄλλο γε μὲν ξανθόν, τὸ δὲ ποικίλον, ἐν δ' ἑκάστῳ
στίφει ἔσαν ταῦροι πλήθεσι βριθόμενοι
συμμετρίης τοιῆσδε τετευχότες· ἀργότριχας μὲν
κυανέων ταύρων ἡμίσει ἠδὲ τρίτῳ
καὶ ξανθοῖς σύμπασιν ἴσους, ὦ ξεῖνε, νόησον,
αὐτὰρ κυανέους τῷ τετράτῳ τε μέρει
μικτοχρόων καὶ πέμπτῳ, ἔτει ξανθοῖσί τε πᾶσιν.
Τοὺς δ' ὑπολειπομένους ποικιλόχρωτας ἄθρει
ἀργεννῶν ταύρων ἕκτῳ μέρει ἑβδομάτῳ τε
καὶ ξανθοῖς αὐτοὺς πᾶσιν ἰσαζομένους.
Θηλείαισι δὲ βουσὶ τάδ' ἔπλετο· λευκότριχες μὲν
ἦσαν συμπάσης κυανέης ἀγέλης
τῷ τριτάτῳ τε μέρει καὶ τετράτῳ ἀτρεκὲς ἶσαι.
Αὐτὰρ κυάνεαι τῷ τετράτῳ τε πάλιν

μικτοχρόων καὶ πέμπτῳ ὁμοῦ μέρει ἰσάζοντο
σὺν ταύροις πάσαις εἰς νομὸν ἐρχομέναις.
Ξανθοτρίχων δ' ἀγέλης πέμπτῳ μέρει δὲ καὶ ἕκτῳ
ποικίλαι ἰσάριθμον πλῆθος ἔχον τετραχῇ.
Ξανθαὶ δ' ἠριθμεῦντο μέρους τρίτου ἡμίσει ἶσαι
ἀργεννῆς ἀγέλης ἑβδομάτῳ τε μέρει.
Ξεῖνε, σὺ δ' Ἠελίοιο βόες πόσαι ἀτρεκὲς εἰπών,
χωρὶς μὲν ταύρων ζατρεφέων ἀριθμόν,
χωρὶς δ' αὖ, θήλειαι ὅσαι κατὰ χροιὰν ἕκασται,
οὐκ ἄιδρίς κε λέγοι' οὐδ' ἀριθμῶν ἀδαής,
οὐ μήν πω γε σοφοῖς ἐναρίθμιος. Ἀλλ' ἴθι φράζευ
καὶ τάδε πάντα βοῶν Ἠελίοιο πάθη.
Ἀργότριχες ταῦροι μὲν ἐπεὶ μιξαίατο πληθὺν
κυανέοις, ἵσταντ' ἔμπεδον ἰσόμετροι
εἰς βάθος εἰς εὖρός τε, τὰ δ' αὖ περιμήκεα πάντη
πίμπλαντο πλίνθου Θρινακίης πεδία.
Ξανθοὶ δ' αὖτ' εἰς ἓν καὶ ποικίλοι ἀθροισθέντες
ἵσταντ' ἀμβολάδην ἐξ ἑνὸς ἀρχόμενοι
σχῆμα τελειοῦντες τὸ τρικράσπεδον οὔτε προσόντων
ἀλλοχρόων ταύρων οὔτ' ἐπιλειπομένων
Ταῦτα συνεξευρὼν καὶ ἐνὶ πραπίδεσσιν ἀθροίσας
καὶ πληθέων ἀποδούς, ξεῖνε, τὰ πάντα μέτρα
ἔρχεο κυδιόων νικηφόρος ἴσθι τε πάντως
κεκριμένος ταύτῃ γ' ὄμπνιος ἐν σοφίῃ [illegible].

Διὰ νὰ ἐκτιμήσωμεν τὸν βαθμὸν τῆς δυσκολίας τοῦ προβλήματος τούτου ἂς σημειωθῇ ὅτι, ἂν παραστήσωμεν μὲ υ, x, y, z τοὺς ἀριθμοὺς τῶν ταύρων καὶ υ΄, x΄, y΄, z΄, ἐκείνους τῶν ἀγελάδων ἑκάστης ὁμάδος, αἱ συνθῆκαι τοῦ προβλήματος μεταφράζονται εἰς τὰς ἀκολούθους ἐξισώσεις:

$$\upsilon = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) x + y \qquad \upsilon' = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)(x + x')$$

$$x = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) z + y \qquad x' = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)(z + z')$$

$$z = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) \upsilon + y \qquad y' = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)(y + y')$$

$$z' = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)(\upsilon + \upsilon')$$

$$υ + x = p^2$$

$$y + z = \frac{q\ (q+1)}{2}$$

Ἐπειδὴ οἱ ἄγνωστοι πρέπει νὰ ἔχουν ἀκεραίας τιμάς, ἐκ τῶν ἑπτὰ πρώτων ἐξισώσεων συνάγεται ὅτι αἱ ἐν λόγῳ τιμαὶ πρέπει νὰ εἶναι τῆς μορφῆς.

$υ = 10366482\,λ$	$υ' = 7206360\,λ$
$x = 7460514\,λ$	$x' = 4893246\,λ$
$y = 4069197\,λ$	$y' = 5439213\,λ$
$z = 7358060\,λ$	$z = 3515820\,λ$

Ἂν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὴν προτελευταίαν συνθήκην τοῦ προβλήματος, βλέπομεν ὅτι ὁ λ πρέπει νὰ ἔχῃ τὴν μορφὴν $445 \cdot 749ξ^2$.

Τέλος ἡ τελευταία συνθήκη, ἂν θέσωμεν $2q+1 = t$, $2 \cdot 4657\,ξ = u$, ἄγει εἰς τὴν ἀκόλουθον σχέσιν μεταξὺ t καὶ u :

$$t^2 - 4729494\,u^2 = 1.$$

Ἡ σχέσις αὕτη ἀνήκει εἰς τὴν κατηγορίαν τῶν ἐξισώσεων, αἱ ὁποῖαι κοινῶς, καίτοι ἀτόπως, ὀνομάζονται «ἐξισώσεις τοῦ Pell». Πρόκειται τώρα νὰ εὑρεθῇ μία λύσις τοιαύτη, ὥστε τὸ u νὰ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 2·4657. Εἰς τὴν ἐλαχίστην τῶν λύσεων τούτων, ἀντιστοιχεῖ ἕνας ἀριθμὸς βοῶν τοῦ Ἡλίου ἐκφραζόμενος ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν 7766 ἀκολουθούμενον ὑπὸ 206541 μηδενικῶν καὶ διὰ νὰ γράψωμεν τὰς τιμὰς ὅλων τῶν ἀγνώστων τοῦ προβλήματος — ὑπολογίζοντες 2500 ψηφία ἀνὰ σελίδα, ὅπως ἐκάμαμεν ἤδη εἰς τὸν Ψαμμίτην (§ 80) — θὰ ἐχρειάζετο νὰ γεμίσωμεν ἕνα τόμον 660 σελίδων 8ου σχήματος *.

Ἀπὸ τὸ σύντομον αὐτὸ διάγραμμα τῆς λύσεως, ἡ ὁποία οὐδεὶς θὰ τολμήσῃ νὰ ἰσχυρισθῇ ὅτι ὑπερέβαινε τὰς δυνάμεις ἑνὸς Ἀρχιμήδους, προκύπτει πόσον ἐξέχουσα ἦτο ἡ σημασία τοῦ προβλήματος καὶ πόσον δικαιολογημένη ἦτο ἡ ὑπὸ τῶν ἀρχαίων χρησιμοποίησις τῆς φράσεως «βοεικὸν πρόβλημα», προκειμένου νὰ χαρακτηρίσουν γενικῶς οἱονδήποτε ζήτημα παρουσιάζον ἀπελπιστικὴν δυσκολίαν.

Τοιαύτης φύσεως πρόβλημα, προστιθέμενον εἰς τὰς ἄλλας ἱστορικὰς πληροφορίας ποὺ ἐδώσαμεν σχετικῶς μὲ τὴν ἔκτασιν τῆς ἀριθμητικῆς ἐπιστήμης τῶν Ἑλλήνων, δὲν ἀποδεικνύει τίποτε ἄλλο παρὰ ὅτι ὁ λαὸς

* Δύναται νὰ προστεθῇ ὅτι ἐπειδὴ δὲν ἀρκεῖ ἡ χωρητικότης τῆς Σικελίας νὰ περιλάβῃ τοιοῦτον ἀριθμὸν ζῴων, τὸ βοεικὸν πρόβλημα δὲν ὀφείλεται εἰς ἔμπνευσιν ὑποκινηθεῖσαν ἐκ συνθηκῶν τῆς πραγματικότητος.

αὐτός, ἂν καὶ κατέστη κυρίως διάσημος διὰ τὴν φυσικήν του ροπὴν πρὸς τὴν γεωμετρίαν καὶ διὰ τὸν ὄγκον τῶν ἀνακαλύψεων, τὰς ὁποίας ἐπραγματοποίησεν εἰς τὸν τομέα τοῦτον, ἐν τούτοις δὲν ἦτο ἀδιάφορος πρὸς τὴν ἔρευναν τῶν ἰδιοτήτων τῶν ἀριθμῶν, οὔτε ἀπέστρεφε τὴν προσοχήν του ἀπὸ προβλήματα ἱκανὰ νὰ τρομοκρατήσουν τὸν δεινότερον ὑπολογιστήν. Διὰ τοῦτο ἡ γνώμη, ὅτι τάχα οἱ Ἕλληνες ἔπασχον ἀπὸ μίαν ἀκατανίκητον ἀρνητικὴν διάθεσιν πρὸς τὴν ἀριθμητικήν, πρέπει νὰ θεωρῆται μόνον ὡς προκατάληψις, ἀπορρέουσα ἀπὸ παχυλὴν ἄγνοιαν τῶν ὅσων ἀποδεικνύουν ἀπὸ συμφώνου ἀδιαφιλονίκητα ἱστορικὰ δοκουμέντα καὶ κατὰ συνέπειαν μία τοιαύτη προκατάληψις πρέπει τὸ ταχύτερον νὰ καταπολεμηθῇ ὡς ἀβάσιμος.

Ἀναδρομὴ εἰς τοὺς μαθηματικοὺς τοῦ Βυζαντίου

95. Τὸ ὕψος εἰς τὸ ὁποῖον ἔφθασεν ἡ ἀπροσδιόριστος ἀνάλυσις μὲ τὸ βοεικὸν πρόβλημα τοῦ Ἀρχιμήδους εἶναι τόσον μέγα, ὥστε ἐχρειάσθη νὰ παρέλθουν πολλοὶ αἰῶνες ὄχι διὰ νὰ τὸ ὑπερβοῦν, ἀλλὰ διὰ νὰ φθάσουν εἰς αὐτὸ οἱ μεταγενέστεροι. Πάντως ἡ μελέτη τῶν ἀριθμῶν δὲν ἐγκατελείφθη κατὰ τὴν ἐποχὴν τῆς μοιραίας παρακμῆς ὑπὸ ἐκείνων τοὐλάχιστον οἱ ὁποῖοι, ὡς ἐκ τῆς γλώσσης εἰς τὴν ὁποίαν ἔγραψαν, ἐμφανίζονται ὡς μακρυνοὶ διάδοχοι τοῦ Πυθαγόρου καὶ τοῦ Διοφάντου, μολονότι ἐκυριαρχοῦντο περισσότερον ἀπὸ παιδαγωγικὰς τάσεις παρὰ ἀπὸ ὑψηλὰ ἐπιστημονικὰ ἰδεώδη.

Ἀπὸ καιροῦ εἰς καιρὸν ἐνεφανίζοντο κατὰ τὴν ἐποχὴν αὐτὴν εἰς τὴν Κωνσταντινούπολιν πρόσωπα, τὰ ὁποῖα ἄφησαν μερικὰ ἴχνη εἰς τὴν ἱστορίαν τῶν μαθηματικῶν, διότι συνέβαλον ἔν τινι μέτρῳ εἰς τὴν διάλυσιν τοῦ σκότους, τὸ ὁποῖον περιέβαλλε τὰς λογιστικὰς μεθόδους τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων. Ἀκριβῶς διὰ τὸν λόγον τοῦτον θὰ κάμωμεν ἐδῶ σύντομον μνείαν, εἰς συμπλήρωσιν κυρίως τῶν ὅσων ἐξετέθησαν εἰς τὸ προηγούμενον κεφάλαιον, ζητοῦντες συγγνώμην ἀπὸ τοὺς ἀναγνώστας διὰ τὴν παράβασιν τῆς χρονολογικῆς τάξεως, τὴν ὁποίαν διαπράττομεν.

Τὰ ἀρχαιότερα ἴχνη μαθηματικῶν σπουδῶν εἰς τὴν ἀνατολικὴν ἐπικράτειαν σημειοῦνται μὲ τὴν ἐμφάνισιν κάποιου Λέοντος, συγχρόνου τοῦ αὐτοκράτορος Λέοντος τοῦ Σοφοῦ (886-911), ὁ ὁποῖος λέγεται ὅτι ἐπεδόθη μὲ ζῆλον εἰς τὴν εὑρεῖαν διάδοσιν τῆς γνώσεων τῶν ἔργων τοῦ Εὐκλείδου καὶ τοῦ Ἀρχιμήδους. Ἀλλ' οὔτε ἡ τεραστία μόρφωσις ἑνὸς ἀπὸ τοὺς βαθυτέρους γνώστας τῆς ἑλληνικῆς ἐπιστήμης καὶ γραμματείας (ἐννοοῦμεν τὸν Heiberg) ἤρκεσεν εἰς τὸ νὰ προσδιορισθοῦν μὲ κάποιαν ἀκρίβειαν τὰ γενικὰ χαρακτηριστικὰ τοῦ προβληματικοῦ τούτου προσώπου.

Εἰς τὴν ἰδίαν ἐποχὴν ἀνήκει ὁ μέτριος γεωδαίτης, ὁ καλούμενος

αὐτός, ἂν καὶ κατέστη κυρίως διάσημος διὰ τὴν φυσικήν του ροπὴν πρὸς τὴν γεωμετρίαν καὶ διὰ τὸν ὄγκον τῶν ἀνακαλύψεων, τὰς ὁποίας ἐπραγματοποίησεν εἰς τὸν τομέα τοῦτον, ἐν τούτοις δὲν ἦτο ἀδιάφορος πρὸς τὴν ἔρευναν τῶν ἰδιοτήτων τῶν ἀριθμῶν, οὔτε ἀπέστρεφε τὴν προσοχήν του ἀπὸ προβλήματα ἱκανὰ νὰ τρομοκρατήσουν τὸν δεινότερον ὑπολογιστήν. Διὰ τοῦτο ἡ γνώμη, ὅτι τάχα οἱ Ἕλληνες ἔπασχον ἀπὸ μίαν ἀκατανίκητον ἀρνητικὴν διάθεσιν πρὸς τὴν ἀριθμητικήν, πρέπει νὰ θεωρῆται μόνον ὡς προκατάληψις, ἀπορρέουσα ἀπὸ παχυλὴν ἄγνοιαν τῶν ὅσων ἀποδεικνύουν ἀπὸ συμφώνου ἀδιαφιλονίκητα ἱστορικὰ δοκουμέντα καὶ κατὰ συνέπειαν μία τοιαύτη προκατάληψις πρέπει τὸ ταχύτερον νὰ καταπολεμηθῇ ὡς ἀβάσιμος.

Ἀναδρομὴ εἰς τοὺς μαθηματικοὺς τοῦ Βυζαντίου

95. Τὸ ὕψος εἰς τὸ ὁποῖον ἔφθασεν ἡ ἀπροσδιόριστος ἀνάλυσις μὲ τὸ βοεικὸν πρόβλημα τοῦ Ἀρχιμήδους εἶναι τόσον μέγα, ὥστε ἐχρειάσθη νὰ παρέλθουν πολλοὶ αἰῶνες ὄχι διὰ νὰ τὸ ὑπερβοῦν, ἀλλὰ διὰ νὰ φθάσουν εἰς αὐτὸ οἱ μεταγενέστεροι. Πάντως ἡ μελέτη τῶν ἀριθμῶν δὲν ἐγκατελείφθη κατὰ τὴν ἐποχὴν τῆς μοιραίας παρακμῆς ὑπὸ ἐκείνων τοὐλάχιστον οἱ ὁποῖοι, ὡς ἐκ τῆς γλώσσης εἰς τὴν ὁποίαν ἔγραψαν, ἐμφανίζονται ὡς μακρυνοὶ διάδοχοι τοῦ Πυθαγόρου καὶ τοῦ Διοφάντου, μολονότι ἐκυριαρχοῦντο περισσότερον ἀπὸ παιδαγωγικὰς τάσεις παρὰ ἀπὸ ὑψηλὰ ἐπιστημονικὰ ἰδεώδη.

Ἀπὸ καιροῦ εἰς καιρὸν ἐνεφανίζοντο κατὰ τὴν ἐποχὴν αὐτὴν εἰς τὴν Κωνσταντινούπολιν πρόσωπα, τὰ ὁποῖα ἄφησαν μερικὰ ἴχνη εἰς τὴν ἱστορίαν τῶν μαθηματικῶν, διότι συνέβαλον ἔν τινι μέτρῳ εἰς τὴν διάλυσιν τοῦ σκότους, τὸ ὁποῖον περιέβαλλε τὰς λογιστικὰς μεθόδους τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων. Ἀκριβῶς διὰ τὸν λόγον τοῦτον θὰ κάμωμεν ἐδῶ σύντομον μνείαν, εἰς συμπλήρωσιν κυρίως τῶν ὅσων ἐξετέθησαν εἰς τὸ προηγούμενον κεφάλαιον, ζητοῦντες συγγνώμην ἀπὸ τοὺς ἀναγνώστας διὰ τὴν παράβασιν τῆς χρονολογικῆς τάξεως, τὴν ὁποίαν διαπράττομεν.

Τὰ ἀρχαιότερα ἴχνη μαθηματικῶν σπουδῶν εἰς τὴν ἀνατολικὴν ἐπικράτειαν σημειοῦνται μὲ τὴν ἐμφάνισιν κάποιου Λέοντος, συγχρόνου τοῦ αὐτοκράτορος Λέοντος τοῦ Σοφοῦ (886-911), ὁ ὁποῖος λέγεται ὅτι ἐπεδόθη μὲ ζῆλον εἰς τὴν εὐρεῖαν διάδοσιν τῆς γνώσεων τῶν ἔργων τοῦ Εὐκλείδου καὶ τοῦ Ἀρχιμήδους. Ἀλλ' οὔτε ἡ τεραστία μόρφωσις ἑνὸς ἀπὸ τοὺς βαθυτέρους γνώστας τῆς ἑλληνικῆς ἐπιστήμης καὶ γραμματείας (ἐννοοῦμεν τὸν Heiberg) ἤρκεσεν εἰς τὸ νὰ προσδιορισθοῦν μὲ κάποιαν ἀκρίβειαν τὰ γενικὰ χαρακτηριστικὰ τοῦ προβληματικοῦ τούτου προσώπου.

Εἰς τὴν ἰδίαν ἐποχὴν ἀνήκει ὁ μέτριος γεωδαίτης, ὁ καλούμενος

Ἥρων ὁ νεώτερος (§ 72), πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τὸν ὁμώνυμον τῆς Ἀλεξανδρείας.

Περίπου ἕνα αἰῶνα βραδύτερον συναντῶμεν ἕνα μέτριον πολυγράφον, τὸν Μιχαὴλ Ψελλὸν (1020-1105, τὸ τελευταῖον του ἔργον φέρει χρονολογίαν 1092), τοῦ ὁποίου σῴζονται μερικὰ ἀποσπάσματα μαρτυροῦντα τὸ ἐνδιαφέρον του διὰ τὴν φιλοσοφίαν τῶν μαθηματικῶν καὶ τὰ ἔργα τοῦ Διοφάντου. Ἄλλα ἔργα του ἀποδεικνύουν ὅτι ἐγνώριζεν ὅσα ἔγραψαν οἱ νεο-πλατωνικοὶ καὶ νεο-πυθαγόρειοι. Ἀλλά, ὡς πρὸς τὴν γεωμετρίαν, μᾶς ἄφησεν ἕνα μαργαρίτην, ποὺ ἀποτελεῖ χωρὶς ἀμφιβολίαν ἕνα ἀπὸ τὰ σπανιώτερα παράδοξα, ποὺ συναντῶνται εἰς τὴν ἐπιστήμην μας. Πρόκειται διὰ τὴν ἐπανάληψιν — οὔτε ἐπιθυμητήν, οὔτε ἀναγκαίαν — τῆς δηλώσεως τοῦ Βρύσωνος (§ 27) ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου ἀκτῖνος r εἶναι ποσότης μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν ἐμβαδῶν $2r^2$ καὶ $4r^2$ τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου τετραγώνου, πρᾶγμα ἰσοδύναμον πρὸς παραδοχὴν τῆς τιμῆς τοῦ $\pi = 2\sqrt{2} = 2,8284271$. Δὲν ἀποδεικνύει ἴσως τὸ γεγονὸς τοῦτο, ὅτι τὰ ἔργα τοῦ κορυφαίου Συρακουσίου ἠγνοοῦντο τελείως ἀπὸ τοὺς μακρυνοὺς καὶ ἐκφυλισθέντας ἀπογόνους;

Ἕνα καὶ ἥμισυ αἰῶνα βραδύτερον συναντῶμεν ἕνα μοναχόν, τὸν Μάξιμον Πλανούδην, ὁ ὁποῖος ἔζησε περίπου πεντήκοντα ἔτη κατὰ τὴν περίοδον 1260-1310. Περίφημος διὰ τὴν βαθεῖαν γνῶσιν τῆς λατινικῆς γλώσσης, ἀντεπροσώπευσεν ὡς πρέσβυς τὸν αὐτοκράτορα Ἀνδρόνικον εἰς τὴν Βενετίαν τὸ ἔτος 1296. Εἶναι γνωστὸς περισσότερον ἀπὸ τὸ ἔργον του Ἐγχειρίδιον λογισμοῦ ἤ, κατὰ τὸν ἀρχικὸν τίτλον τοῦ ἔργου, «Ψηφοφορία κατ' Ἰνδοὺς ἡ λεγομένη Μεγάλη». Διὰ πρώτην φορὰν μὲ τὸ ἔργον αὐτὸ Ἕλλην συγγραφεὺς ἔκαμε γνωστὴν τὴν δεκαδικὴν ἀρίθμησιν κατὰ τὸ ἰνδικὸν σύστημα, τὸ ὁποῖον ἀπὸ δύο αἰώνων εἶχε διαδοθῆ εἰς τὴν ὑπόλοιπον Εὐρώπην. Εἰς τοὺς χρόνους μας τὸ ἔργον τοῦ Πλανούδη ἐμελετήθη κατὰ βάθος, τόσον ἀπὸ ἐκείνους οἱ ὁποῖοι ἠθέλησαν νὰ προσδιορίσουν τὴν ἀρχὴν καὶ τὴν γένεσιν τοῦ ἐν χρήσει σήμερον συστήματος ἀριθμήσεως, ὅσον καὶ ἀπὸ ἐκείνους οἱ ὁποῖοι ἐνδιεφέροντο νὰ μάθουν τὰς μεθόδους τῶν ἀρχαίων πρὸς ἐξαγωγὴν τῶν τετραγωνικῶν ριζῶν τῶν ἀριθμῶν μὲ τὴν χρῆσιν ἀστρονομικῶν κλασμάτων. Ἀντὶ νὰ εἰσδύσωμεν βαθύτερον ἐπὶ τῶν λεπτομερειῶν, προτιμῶμεν ν' ἀναφέρωμεν ἐδῶ δύο προβλήματα, λελυμένα ἀπὸ τὸν περὶ οὗ ὁ λόγος μαθηματικόν:

I. Κάποιος, αἰσθανόμενος ὅτι ἦλθεν ἡ ὥρα ν' ἀποθάνῃ, ἐζήτησε νὰ τοῦ φέρουν τὸ χρηματοκιβώτιόν του καὶ διένειμε τὸ περιεχόμενον εἰς τοὺς υἱούς του ὡς ἑξῆς: ὁ πρῶτος θὰ λάβῃ ἕνα χρυσοῦν νόμισμα καὶ τὸ ἕβδομον τοῦ ὑπολοίπου. Ὁ δεύτερος θὰ λάβῃ δύο καὶ τὸ ἕβδομον τοῦ ὑπολοίπου. Ὁ τρίτος τρία καὶ τὸ ἕβδομον τοῦ ὑπολοίπου. Ὅταν ἔφθασεν εἰς τὸ σημεῖον

αὐτό, ἀπέθανε χωρὶς νὰ τελειώσῃ τὴν διανομὴν τῶν χρημάτων καὶ τὴν ἀπαρίθμησιν τῶν τέκνων. Γενομένης λοιπὸν τῆς διανομῆς κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον μέχρι τέλους, εὑρέθη ὅτι ὅλα τὰ τέκνα εἶχον ἱκανοποιηθῆ ἐξ ἴσου. Πόσα ἦσαν τὰ τέκνα καὶ ποῖον τὸ ποσὸν τῶν χρημάτων εἰς τὸ χρηματοκιβώτιον; (τέκνα 6, ποσὸν 36).

II. Νὰ εὑρεθῇ ὀρθογώνιον ἔχον περίμετρον ἴσην πρὸς ἄλλο δοθὲν καὶ ἐμβαδὸν δεδομένον πολλαπλάσιον τούτου.

Τὸ πρόβλημα τοῦτο ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν ἑνὸς συστήματος τῆς μορφῆς:

$$x+y=u+v, \qquad xy=\lambda uv.$$

Τοῦ συστήματος τούτου ὁ βυζαντινὸς γεωμέτρης δίδει τὴν ἀκόλουθον (εἰδικὴν) λύσιν:

$$x=\lambda^2-1 \qquad u=\lambda-1$$
$$y=\lambda^2(\lambda-1) \qquad v=\lambda(\lambda^2-1)^*$$

96. Ὅτι ὁ Εὐκλείδης ἔτυχεν εἰς τὸ Βυζάντιον καλυτέρας μοίρας ἀπὸ ἐκείνην τοῦ Ἀρχιμήδους (βλ. προηγουμένην παράγραφον) ἀποδεικνύεται ἀπὸ τὰ σχόλια εἰς τὰ πρῶτα ἕξ βιβλία τῶν Στοιχείων, γραφέντα κατὰ τὸ δεύτερον ἥμισυ τοῦ XIV αἰῶνος ἀπὸ τὸν μοναχὸν Ἰσαὰκ Ἀργυρόν, ὡς καὶ ἀπὸ τὰ σχόλια εἰς τὸ II βιβλίον, ὀφειλόμενα εἰς τὸν ἐκ Καλαβρίας μοναχὸν Βαρλαὰμ (ἀποθανόντα τὸ 1348), τοῦ ὁποίου ἡ ζωὴ διέρρευσε μεταξὺ Καλαβρίας καὶ Κωνσταντινουπόλεως. Τὸ ἔργον, ποὺ ἐτιμήθη μὲ ἐπανειλημμένας ἐκδόσεις, εἶναι ἡ Λογιστική του εἰς 6 βιβλία, ὅπου ἐκτίθεται ὁ ἀριθμητικὸς λογισμὸς μὲ ἀκεραίους ἀριθμοὺς καὶ μὲ κλάσματα συνήθη καὶ ἑξηκονταδικά.

Μία Γεωμετρία, ὀφειλομένη εἰς τὸν Ἰωάννην Πεδιάσιμον (1328-1341) χαρτοφύλακα τοῦ πατριάρχου Κωνσταντινουπόλεως ἐπὶ βασιλείας Ἀνδρονίκου Γ' Παλαιολόγου, ἔχουσα διάρθρωσιν σύμφωνον μᾶλλον πρὸς τὰς ἐργασίας τοῦ Ἥρωνος παρὰ τοῦ Εὐκλείδου, δύναται ἔν τινι μέτρῳ νὰ χρησιμεύσῃ ὡς δεῖγμα τῶν λογιστικῶν μεθόδων ποὺ ἦσαν ἐν χρήσει κατὰ τὸν βυζαντινὸν Μεσαίωνα.

Εἰς τὴν ἰδίαν περίοδον ἀνήκει ἕνα πρόσωπον, περὶ τοῦ ὁποίου ὡμιλήσαμεν ἤδη παρεμπιπτόντως, ὁ Νικόλας Ἀρταβάσδος, ὁ ἐπικαλούμενος

---

* Ἄξιον σημειώσεως εἶναι ὅτι μεταξὺ ἄλλων προβλημάτων, τὰ ὁποῖα ἀπαντῶνται εἰς ἑλληνικὸν χειρόγραφον ἀβεβαίας ἐποχῆς καὶ περισσότερον ἀβεβαίου συγγραφέως (J. L. Heiberg und H. G. Zeuthen: Einige griechische Aufgaben der unbestimmten Analytik, Bibl. Mathem, 3η σειρά, t. VIII, 1907-08) εὑρίσκεται ἀνάλογον πρόβλημα ἀναγόμενον εἰς τὸ σύστημα $u+v=\lambda(x+y)$, $xy=\lambda uv$, τοῦ ὁποίου δίδεται ἡ ἀκόλουθος λύσις: $x=2\lambda-1$, $y=2\lambda^2$, $u=\lambda^2(4\lambda^2-2)$, $v=\lambda$.

Ραβδᾶς. Γεννηθεὶς εἰς τὴν Σμύρνην, προέβη εἰς νέαν ἐπιμελημένην ἔκδοσιν τοῦ μνημονευθέντος ἀριθμητικοῦ ἔργου τοῦ Μαξίμου Πλανούδη, κατὰ τὸ ἔτος δὲ 1341 ἔγραψε τὴν δευτέραν ἐκ τῶν Ἐπιστολῶν, αἱ ὁποῖαι τοῦ ἐξησφάλισαν μίαν θέσιν εἰς τὴν ἱστορίαν τῶν μαθηματικῶν.

Ἡ πρώτη ἐκ τῶν ἐπιστολῶν τούτων ἀρχίζει μὲ μίαν σύντομον ἔκθεσιν τῆς ἀριθμητικῆς γραφῆς τῶν Ἑλλήνων. Συνεχίζει μὲ τὴν ὑπόδειξιν τῶν χρησιμοποιητέων τεχνασμάτων πρὸς δήλωσιν τῶν ἀριθμῶν διὰ τῶν δακτύλων τῆς χειρὸς (εἶναι τρόποι ὅμοιοι πρὸς ἐκείνους, ποὺ χρησιμοποιοῦν πρὸς συνεννόησιν οἱ κωφάλαλοι). Ἀκολουθοῦν κανόνες πρὸς ἐκτέλεσιν ἀριθμητικῶν πράξεων μέχρι καὶ τῆς ἐξαγωγῆς τετραγωνικῶν ριζῶν. Εἶναι ἄξιον σημειώσεως ὅτι τὸ ἀριθμητικὸν πεδίον ἐντὸς τοῦ ὁποίου κινεῖται ὁ Ραβδᾶς εἶναι πολὺ περισσότερον περιωρισμένον ἐκείνου, μέχρι τοῦ ὁποίου φθάνουν αἱ θεωρίαι τοῦ Ἀρχιμήδους. Πράγματι ὁ Ραβδᾶς ἐξετάζει ἐννέα τάξεις ἀριθμῶν, ἤτοι ἐκείνας ποὺ δύνανται νὰ παρασταθοῦν συμβολικῶς ὡς ἑξῆς:

$$n \qquad 10n \qquad 10^2n \qquad 10^3n$$
$$10^4n \qquad 10^5n \qquad 10^6n \qquad 10^7n \qquad 10^8n$$

ἔνθα n εἶναι ἀριθμὸς μεταξὺ 1 καὶ 9. «Πέραν τούτου», λέγει ὁ συγγραφεύς, «δὲν ὑπάρχει πλέον τάξις». Νέα ἀπόδειξις τῆς ὁλοσχεροῦς λήθης, εἰς τὴν ὁποίαν εἶχε τότε περιπέσει ὁ μέγας γεωμέτρης τῶν Συρακουσῶν!

Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν τῆς μορφῆς $10^m a$, $10^n b$ εἶναι $10^p c$, ὅπου a, b, c ἀριθμοὶ περιεχόμενοι μεταξὺ 1 καὶ 9 καὶ p ἀριθμὸς ἴσος πρὸς $m+n$ ἢ $m+n+1$.

Ἡ ἐπιστολὴ τελειώνει μὲ μερικοὺς πίνακας ἑτοίμων ὑπολογισμῶν, τοὺς ὁποίους πίνακας χαρακτηρίζει ὡς «παλαμήδειον ἐφεύρεσιν», φράσις ὑποδεικνύουσα ὅτι οὗτοι εἶναι προϊὸν τῆς ἀρχαίας παραδόσεως. Ἐκτὸς ὡρισμένων πινάκων ἀναφερομένων εἰς πολλαπλασιασμούς, εὑρίσκονται καὶ ἄλλοι σχετικοὶ μὲ τὴν διαίρεσιν, δυνάμενοι μάλιστα ν' ἀνασυνδεθοῦν μὲ τὸν πάπυρον τοῦ Rhind, καθ' ὅσον διδάσκουν τὴν ἀνάλυσιν κλασματικῶν ἀριθμῶν εἰς θεμελιώδη κλάσματα.

97. Μεγαλύτερον ἐνδιαφέρον παρουσιάζει ἡ δευτέρα τῶν Ἐπιστολῶν τοῦ Ραβδᾶ. Εἰς τὰς πρώτας σελίδας αὐτῆς ὁ συγγραφεὺς διδάσκει τὸν τρόπον ἐκτελέσεως τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (εἰδικώτερον τὴν ὕψωσιν εἰς τὸ τετράγωνον καὶ τὸν κύβον), τῆς διαιρέσεως δύο ἀριθμῶν καὶ τῆς ἐξαγωγῆς τῆς τετραγωνικῆς ρίζης ὑπὸ τὸν περιορισμόν, ὅπως τὰ δεδομένα ἐκφράζωνται ἕκαστον ὡς ἄθροισμα ἀκεραίου καὶ θεμελιωδῶν κλασμάτων. Τὸ τέχνασμα εἰς τὸ ὁποῖον σταθερῶς ἀνατρέχει συνίσταται εἰς τὸν μετασχηματισμὸν τῶν δεδομένων ἀριθμῶν εἰς συνήθη κλάσματα. Μετὰ τὴν

ἐκτέλεσιν τῆς σημειουμένης πράξεως, λαμβάνεται ἕνα σύνηθες κλάσμα, τὸ ὁποῖον, ἀντιστρόφως, μετασχηματίζεται εἰς ἄθροισμα ἀκεραίου καὶ θεμελιωδῶν κλασμάτων. Εἰς αὐτοὺς τοὺς χειρισμοὺς θὰ ἔλεγε κανεὶς ὅτι κατοπτρίζεται ὁ ἀγὼν ἐπιβιώσεως μεταξὺ τῆς ἀρχαίας ἑλληνο - αἰγυπτιακῆς λογιστικῆς καὶ τῆς ἀριθμητικῆς τῶν κοινῶν κλασμάτων, ἡ ὁποία σὺν τῷ χρόνῳ ἐπεκράτησε.

Μόλις εἶναι ἀνάγκη νὰ σημειώσωμεν ὅτι αἱ σελίδες, ποὺ ἀφοροῦν τὴν ἐξαγωγὴν ρίζης, εἶναι ἐκεῖναι ποὺ παρουσιάζουν τὸ μεγαλύτερον ἐνδιαφέρον. Ἕπεται μία νέα μέθοδος ὑπολογισμοῦ τῆς χρονολογίας τοῦ Πάσχα, τὴν ὁποίαν παρατρέχομεν, ὡς εὑρισκομένην ἐκτὸς τοῦ προγράμματός μας, ταύτην δὲ ἀκολουθεῖ μία γενικὴ θεωρία, χρήσιμος εἰς τὴν λύσιν προβλημάτων τοῦ πρακτικοῦ βίου, στηριζομένη ἐπὶ τῆς θεωρίας τῶν ἀναλογιῶν. Προτοῦ κάμη ἐφαρμογὰς αὐτῆς εἰς εἰδικὰ προβλήματα, παρουσιάζει μίαν ἀκριβολογημένην σύνοψιν τοῦ συστήματος μέτρων, βαρῶν καὶ νομισμάτων, ἐν χρήσει τὴν ἐποχὴν ἐκείνην εἰς τὸν ἑλληνικὸν κόσμον. Δὲν τὸ ἀναφέρομεν, καθ' ὅσον δὲν ἀνήκει εἰς τὰ μαθηματικά, ἀλλὰ εἰς τὴν μετρολογίαν. Ἀρκούμεθα μόνον νὰ σημειώσωμεν ὅτι ὁ Ραβδᾶς προσθέτει κάποιον κανόνα χρήσιμον εἰς τοὺς ἀργυραμοιβοὺς κατὰ τὴν ἀνταλλαγὴν νομισμάτων.

Κατόπιν ἐκθέτει τὰς λύσεις 18 προβλημάτων ὡρισμένων, μὲ δεδομένα συγκεκριμένα, ἂν καὶ ἕνα πρόβλημα, ἐκ παραδρομῆς, προκύπτει ἀπροσδιόριστον. Αἱ ἐκφωνήσεις παρουσιάζουν μεγάλην ὁμοιότητα μὲ ἐκείνας τῶν προβλημάτων τῆς Ἑλληνικῆς Ἀνθολογίας. Ἐπειδὴ ὅμως συνοδεύονται ἀπὸ τὰς λύσεις, τὸ μέρος τοῦτο τῶν γραπτῶν τοῦ Ραβδᾶ ἀποτελεῖ πολύτιμον συμπλήρωμα εἰς τὴν συλλογὴν τῶν προβλημάτων ἐκείνης. Αἱ ἐκτιθέμεναι λύσεις παρουσιάζουν ἀξιόλογον ἐνδιαφέρον, διότι δεικνύουν πῶς δύνανται νὰ λυθοῦν καὶ πῶς πράγματι ἐλύθησαν χωρὶς τὴν ἐπικουρίαν τῆς ἀλγέβρας, προβλήματα ἀρκετὰ πολύπλοκα, ἀναγόμενα σήμερον εἰς ἐξισώσεις πρώτου βαθμοῦ. Εἰς ἀπόδειξιν τούτου ἀναφέρομεν τὸ ἀκόλουθον πρόβλημα (VIII):

«Δύο ἔμποροι μεταβαίνουν ὁμοῦ εἰς τὴν ἀγοράν· ἐκεῖ συναντοῦν ἕνα πρόσωπον ποὺ πωλεῖ ἕνα σμάραγδον, τοῦ ὁποίου ζητοῦν νὰ πληροφορηθοῦν τὴν ἀξίαν, ἀνερχομένην εἰς 10 χιλιάδας χρυσᾶ νομίσματα. Ἀνοίγουν τότε τὰ χρηματοφυλάκιά των καὶ μετροῦν ὅσα ἔχει ἕκαστος, ὁπότε διαπιστώνουν ὅτι δὲν ἔχει κανεὶς ἐπαρκῆ χρήματα διὰ τὴν ἀγορὰν τοῦ σμαράγδου. Ὁ πρῶτος λέγει τότε εἰς τὸν δεύτερον: Δάνεισέ μου τὸ 1/5 τῶν χρημάτων σου, ὁπότε μαζὶ μὲ τὰ ἰδικά μου χρήματα θὰ ἠμπορέσω ν' ἀγοράσω τὸν σμάραγδον. Ὁ δεύτερος ἀπαντᾷ: ὄχι, δάνεισέ μου μᾶλλον τὸ 1/7 τῶν χρημάτων σου καὶ θὰ ἠμπορέσω νὰ τὸν ἀγοράσω. Ζητεῖται ποῖον ποσὸν χρημάτων εἶχεν ἕκαστος ἔμπορος».

Μόλις εἶναι ἀνάγκη νὰ σημειώσωμεν ὅτι τὸ πρόβλημα τοῦτο ἀνάγεται σήμερον εἰς τὸ ἀκόλουθον σύστημα:

$$x + \frac{1}{5}y = 10000, \qquad y + \frac{1}{7}x = 10000,$$

τοῦ ὁποίου ἡ λύσις εἶναι:

$$x = 8235\frac{5}{17}, \qquad y = 8823\frac{9}{17}.$$

Ὁ Ραβδᾶς φθάνει εἰς τὸ ἀποτέλεσμα τοῦτο μέσῳ σειρᾶς εὐφυῶν καὶ λεπτῶν συλλογισμῶν, πολὺ ὅμως ἐκτενῶν διὰ νὰ ἀναφερθοῦν ἐδῶ. Ἐπιθυμοῦμεν ὅμως νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι ὁ θαυμασμός τὸν ὁποῖον θὰ ἐδικαιοῦτο νὰ ἐπισύρῃ ὁ Ἕλλην ἀριθμητικὸς ἀπὸ τοὺς ἀναγνώστας του ὠχριᾷ, ὅταν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι ἔγραφεν ἕνα καὶ ἥμισυ αἰῶνα μετὰ τὴν ἐποχήν, κατὰ τὴν ὁποίαν ἔζησε καὶ ἔγραψεν ὁ μέγας Λεονάρδος τῆς Πίζης (Fibonacci).

98. Ἡ μεγάλη ὑπόληψις, τῆς ὁποίας ἔχαιρεν ὁ Ραβδᾶς εἰς τὴν ἐποχήν του, διαπιστοῦται ἀπὸ τὸ γεγονός, ὅτι εἰς αὐτὸν ἀφιεροῦται ἕνα σημαντικὸν ἔργον, ὀφειλόμενον εἰς ἄλλον μαθηματικὸν τοῦ Βυζαντίου. Ὁμιλοῦμεν διὰ τὸν Ἐμμανουὴλ Μοσχόπουλον, ὁ ὁποῖος ἔγραψεν κατὰ τὰς ἀρχὰς τοῦ XIV αἰῶνος. Θέμα τοῦ ἔργου του εἶναι ἡ κατασκευὴ τῶν οὕτω καλουμένων «μαγικῶν τετραγώνων», τὰ ὁποῖα εἶναι σύνολα ἀριθμῶν διατεταγμένων εἰς σχῆμα τετραγώνου οὕτως, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν ἑκάστης γραμμῆς, ἑκάστης στήλης καὶ ἑκάστης τῶν δύο διαγωνίων νὰ εἶναι τὸ αὐτό. Ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ οἱ ἀποτελοῦντες τὸ μαγικὸν τετράγωνον εἶναι οἱ ἀνήκοντες εἰς τὴν φυσικὴν σειράν:

$$1, \quad 2, \quad 3, \ldots \quad n^2,$$

τότε τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν ἀριθμῶν, θὰ εἶναι:

$$S = \frac{n^2(n^2+1)}{2},$$

τὸ δὲ σταθερὸν ἄθροισμα ἑκάστης σειρᾶς θὰ εἶναι $S : n$, ἤτοι:

$$S_n = \frac{n(n^2+1)}{2}.$$

Τὸ ἔργον τοῦ Μοσχοπούλου εἶναι τὸ πρῶτον ἑλληνικὸν κείμενον ἐπὶ τοῦ ἀντικειμένου τούτου, ἐπὶ τοῦ ὁποίου περισσότεραι ἐργασίαι ἀπαντῶνται εἰς τὴν ἰνδικὴν καὶ ἀραβικὴν βιβλιογραφίαν. Τίποτε δὲν ἐπιτρέπει ὅμως νὰ κρίνωμεν κατὰ πόσον ὁ Μοσχόπουλος ὑπῆρξεν ὁ τελευταῖος ἐκπρόσωπος τῆς ἑλληνικῆς παραδόσεως ἐπὶ τοῦ θέματος ἢ ὁ πρῶτος

μετενεγκὼν εἰς τὴν Εὐρώπην καρποὺς ὡριμάσαντας εἰς τὴν Ἀνατολήν.

Ὁ Μοσχόπουλος διακρίνει ὅλους τοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς εἰς τρεῖς κατηγορίας, ὀνομάζων αὐτοὺς ἀντιστοίχως :

περιττούς,	ἔχοντας τὴν μορφὴν	$2p+1$,
ἀρτίως ἀρτίους	» » »	2^{ν},
περιττῶς ἀρτίους	» » »	$2^{\nu}(2p+1)$.

Διδάσκει δὲ κανόνας κατασκευῆς μαγικῶν τετραγώνων τάξεως n, ὅπου ὁ ἀριθμὸς n ἀνήκει εἰς μίαν τῶν δύο πρώτων κατηγοριῶν. Τὰ τελευταῖα χωρία τῶν χειρογράφων τοῦ ἔργου δὲν παρέχουν στοιχεῖα διὰ νὰ κρίνωμεν, ἂν ὁ Μοσχόπουλος ἐπέτυχεν ἢ ὄχι νὰ δώσῃ κανόνας μορφώσεως μαγικῶν τετραγώνων, ὅταν ὁ ἀριθμὸς ὁ δηλῶν τὴν τάξιν αὐτοῦ ἀνήκῃ εἰς τὴν τρίτην ἐκ τῶν ἀνωτέρω κατηγοριῶν.

Χωρὶς νὰ ἐνδιατρίψωμεν εἰς λεπτομερείας ἐπὶ τῶν ἐκτιθεμένων κανόνων, ἀναφέρομεν μόνον τὰ ὑπὸ τοῦ Μοσχοπούλου μορφωθέντα μαγικὰ τετράγωνα[49] τάξεως $n=7$ καὶ $n=8$.

38	14	32	1	26	44	20
5	23	48	17	42	11	29
21	39	8	33	2	27	45
30	6	24	49	18	36	12
46	15	40	9	34	3	28
13	31	7	25	43	19	37
22	47	16	41	10	35	4

1	62	59	8	9	54	51	16
60	7	2	61	52	15	10	53
6	57	64	3	14	49	56	11
63	4	5	58	55	12	13	50
17	46	43	24	25	38	35	32
44	23	18	45	36	31	26	37
22	41	48	19	30	33	40	27
47	20	21	42	39	28	29	34

Μὲ αὐτὰ κλείομεν τὰς συντόμους πληροφορίας μας γύρω ἀπὸ τὰ τελευταῖα εἰς ἡμᾶς γνωστὰ μαθηματικὰ ἔργα, τὰ ὁποῖα ἐγράφησαν εἰς τὴν γλῶσσαν τοῦ Ὁμήρου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII

ΣΥΓΚΛΗΤΟΣ ΚΑΙ ΡΩΜΑΪΚΟΣ ΛΑΟΣ

99. Καθ' δν χρόνον οἱ Ἕλληνες, κατεχόμενοι ἀπὸ τὸ πλέον ὑψηλὸν καὶ εὐγενὲς φρόνημα, κατεγίνοντο εἰς τὴν ἐκπλήρωσιν τῆς ἀποστολῆς, τὴν ὁποίαν ἡ μοῖρα ἐνεπιστεύθη εἰς αὐτούς, ὁδηγοῦντες τὴν ἀνθρωπότητα εἰς βαθμιαίαν καὶ συνεχῆ ἀνύψωσιν τοῦ πνεύματος, συνεκδοχικῶς δὲ εἰς μίαν καλυτέραν ἐπίγνωσιν τοῦ κόσμου τῶν φαινομένων, ἀνεπτύσσετο ταχέως εἰς δύναμιν ἕνας ἄλλος μικρὸς λαός, ὁ ὁποῖος ἀρχικῶς εἶχε τὴν ἕδραν του εἰς τὰς ὄχθας τοῦ Τιβέρεως. Κατόπιν ὅμως, ἡ Ἐτρουρία, αἱ ἀνθοῦσαι ἀποικίαι τὰς ὁποίας ἡ Ἑλλὰς εἶχεν ἐγκαταστήσει εἰς τὴν Μεγάλην Ἑλλάδα καὶ τὴν Σικελίαν, ἡ Καρχηδὼν καὶ ἀκόμη ἡ χώρα ἡ ἔχουσα ἐπίκεντρον τὰς Ἀθήνας, ἐγένοντο διαδοχικῶς λεία τῶν λατινικῶν ἀετῶν.

Ἡ νέα φυλή, γενομένη κυρίαρχος ὅλου τοῦ γνωστοῦ τότε κόσμου, ἐδείχθη εἰς ὅλας τὰς φάσεις τῆς ἐξελίξεώς της ἀνυπέρβλητος εἰς τὸ νὰ μάχεται καὶ νὰ νομοθετῇ, ἀλλ' ἐστερεῖτο ἐντελῶς τῆς ἱκανότητος νὰ καλλιεργῇ τοὺς κλάδους ἐκείνους τῆς γνώσεως, οἱ ὁποῖοι καμμίαν, οὐδὲ πόρρωθεν, σχέσιν ἔχουν μὲ τὴν τέχνην τοῦ πολέμου καὶ τὴν ἐπιστήμην τοῦ κυβερνᾶν. Παρήγαγε ρήτορας ἱκανοὺς νὰ παρασύρουν τὸν λαὸν εἰς τὰς πλέον ρηξικελεύθους ἀποφάσεις, ποιητὰς εἰς θέσιν νὰ ἐξυμνοῦν ἐπαξίως τοὺς ἄθλους τῶν ἡρώων, ἱστορικοὺς διὰ νὰ διαιωνίζουν τὰ κατορθώματα τῶν ἱκανωτέρων ἡγετῶν, νομομαθεῖς τιμωμένους μέχρι σήμερον ὡς ἀνυπερβλήτους διδασκάλους. Εἰς τὴν φιλοσοφίαν ὅμως, ὅπως καὶ εἰς ὅλας τὰς ἐπιστήμας τοῦ θεωρητικοῦ στοχασμοῦ καὶ τῆς παρατηρήσεως, ὄχι μόνον δὲν εἶχε τὴν δύναμιν ν' ἀντιπαραβληθῇ πρὸς τὸν μικρὸν λαόν, ὁ ὁποῖος παρήγαγε τὸν Πλάτωνα, τὸν Ἀρχιμήδη, τὸν Ἀριστοτέλη, ἀλλ' ἀπεδείχθη τελείως ἀνίκανος νὰ κατανοήσῃ τὴν ἀξίαν καὶ νὰ θαυμάσῃ τὴν ὑπερτάτην ὡραιότητα μιᾶς καθαρᾶς ἐπιστημονικῆς ζητήσεως.

Ἐκεῖνος ποὺ θὰ ἤθελε νὰ δώσῃ μὲ τὸν χρωστῆρα μίαν ἰδέαν τῆς θεμελιώδους διαφορᾶς εἰς τὴν πνευματικὴν ἰδιοσυγκρασίαν τῶν δύο λαῶν, Ἑλλήνων καὶ Λατίνων, θὰ ἠδύνατο νὰ ζωγραφίσῃ ἀπὸ τὸ ἕνα μέρος τὸν Μέγαν Ἀλέξανδρον συμπαραλαμβάνοντα ὡς συνοδόν του, χάριν ἐπιστη-

μονικῶν σκοπῶν, τὸν Ἀριστοτέλη εἰς τὰς πλέον μακρυνὰς ἐκστρατείας του, καὶ ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος τὸν ἀγροῖκον λεγεωνάριον, ὁ ὁποῖος φονεύει τὸν Ἀρχιμήδη ἀπορροφημένον εἰς βαθεῖς διαλογισμούς.

Τὴν οὐσιώδη αὐτὴν διαφορὰν ἐπεσήμανε καὶ ἀνωμολόγησεν ἕνας ἀπὸ τοὺς ἐξοχωτέρους ἄνδρας τοὺς ἐκπροσωποῦντας τὴν λατινικὴν φυλήν, διότι καθ' ὃν χρόνον εἰς τὸν κόσμον διεδίδετο τὸ πλῆρες σημασίας γνωμικόν :

«ἡ Ἑλλὰς ἡττηθεῖσα τὸν βάρβαρον νικητὴν καθυπέταξε
καὶ εἰς τὸ ἄγριον Λάτιον τὰς τέχνας εἰσήγαγε»,

ὁ Κικέρων ἔγραφεν : «Οἱ Ἕλληνες ἀπέδιδον ὑψίστην τιμὴν εἰς τὴν γεωμετρίαν καὶ ἐθεώρουν, ὅτι τίποτε δὲν ὑπάρχει εὐγενέστερον ἀπὸ τὰ μαθηματικά. Ἡμεῖς ὅμως περιωρίσαμεν τὸ μέτρον τῆς ἀξίας τῆς ἐπιστήμης αὐτῆς εἰς πρακτικοὺς ὑπολογισμοὺς καὶ καταμετρήσεις».

Τόσον εἶναι τοῦτο ἀληθές, ὥστε εἰς τὴν ἐπιστήμην αὐτὴν οὔτε μαθηταὶ τῶν Ἑλλήνων δὲν δυνάμεθα νὰ βεβαιώσωμεν ὅτι ἐγένοντο οἱ Ρωμαῖοι, ὅπως θὰ ἠδύνατο τοῦτο νὰ λεχθῇ προκειμένου δι' ἄλλους κλάδους τῆς γνώσεως. Διότι ἂν καὶ ἀπὸ τῶν μέσων τοῦ III π.Χ. αἰῶνος ὁ Λίβιος Ἀνδρόμαχος διέδωσεν εἰς Ρώμην τοὺς θησαυροὺς τῆς ἑλληνικῆς σκέψεως, οὐδεμίαν μαρτυρίαν ἔχομεν, ὅτι τὰ ἀριστουργήματα τοῦ Εὐκλείδου, τοῦ Ἀπολλωνίου καὶ τοῦ Διοφάντου ἀφύπνισαν τὸ παραμικρὸν ἐνδιαφέρον εἰς τοὺς ἀπογόνους τοῦ Ρωμύλου.

Ἐν πάσῃ περιπτώσει, ἐπειδὴ ὑποχρέωσις τῆς ἱστορίας εἶναι ὄχι μόνον ἡ ἀφήγησις τῶν ἄθλων τῶν κορυφαίων διανοουμένων, ἀλλ' ἐπίσης ἡ ἐπισήμανσις τῶν ἀβεβαίων ἐκείνων μικρῶν φλογῶν, αἱ ὁποῖαι ἔστω καὶ ὑποτρέμουσαι, διακόπτουν τὴν ἀπόλυτον κυριαρχίαν τοῦ σκότους, δὲν δυνάμεθα, παρὰ νὰ καταβάλωμεν μίαν προσπάθειαν περισυλλογῆς ὅλων τῶν δεδομένων, ποὺ θὰ μᾶς ἐπιτρέψουν νὰ μάθωμεν ὑπὸ ποίαν ἔννοιαν καὶ κατὰ ποῖον μέτρον οἱ Ρωμαῖοι ἀφιέρωσαν μέρος τῆς προσοχῆς των εἰς τὰς ἀκριβεῖς ἐπιστήμας.

Πρωτίστως πρέπει νὰ σημειώσωμεν, ὅτι ἀπὸ τῆς στιγμῆς αὐτῆς καὶ μέχρι τέλους τοῦ Μεσαίωνος ἡ ἱστορία τῆς ἐπιστήμης ἐπωμίζεται ἕνα ρόλον τελείως διάφορον ἐκείνου, τὸν ὁποῖον παίζει κατὰ τὰς γονιμωτέρας περιόδους τῶν νέων ἀνακαλύψεων. Ἐνῷ δηλαδὴ κατὰ τὰς περιόδους τῆς γονιμότητος ἔργον τῆς ἐπιστήμης εἶναι νὰ καθορίσῃ μὲ ἀκρίβειαν τὰς συμβολὰς ποὺ ἐδόθησαν εἰς τὴν ἐπιστημονικήν μας κληρονομίαν ἀπὸ ἕνα ἕκαστον διανοούμενον, ἀντιθέτως, εἰς τὴν ἐποχήν, τὴν ὁποίαν τώρα ἐξετάζομεν, ἡ ἐπιστήμη δὲν δύναται παρὰ ν' ἀναλάβῃ τὴν κοπιώδη ἀναζήτησιν τῶν πηγῶν ἀπὸ τὰς ὁποίας ἕκαστος ἀντέγραψεν. Ἔργον δυσχε-

ρέστατον διὰ λόγους διαφόρου φύσεως, μεταξὺ τῶν ὁποίων προέχουσαν θέσιν ἔχουν οἱ δύο ἑπόμενοι :

I. Οἱ ἐρανισμοί, ποὺ χαρακτηρίζουν ἰδίως τὰς ἐποχὰς τῆς παρακμῆς, εἶναι ἐκτεθειμένοι, πολὺ περισσότερον ἀπὸ τὰ ἔργα τῆς μεγάλης πρωτοτυπίας, εἰς τὸν κίνδυνον νὰ διαφθαροῦν, ν' ἀκρωτηριασθοῦν καὶ ν' ἀναψηλαφηθοῦν μ' ἐπιπολαιότητα ἀπὸ ἀνθρώπους, οἱ ὁποῖοι, ἐν τῇ ἀγνοίᾳ των, συχνὰ ἐσύγχισαν τὰ ἔργα τοῦ ἑνὸς μὲ ἐκεῖνα τοῦ ἄλλου καὶ ἄλλοτε ἀπέδωσαν εἰς τὸν δεῖνα ἕνα ἔργον διὰ τὸν μόνον λόγον ὅτι οὗτος, ὡς ἐκ τῆς νοοτροπίας του, ἦτο ὁ μόνος δυνάμενος νὰ τὸ συγγράψη.

II. Τὰ ἔργα τῆς ἐποχῆς, τὰ ὁποῖα ἐδόθησαν μέχρι τοῦδε εἰς τὴν δημοσιότητα, δὲν ἐλήφθησαν ὅλα ἐκ τῶν καλυτέρων ὑφισταμένων κωδίκων, οὔτε ἡ δημοσίευσίς των ἐγένετο κατόπιν ἐπισταμένης κριτικῆς καὶ ἀντιβολῆς τῶν διαφόρων ὑφισταμένων κειμένων ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἔργου.

100. Οἱ Ρωμαῖοι, ὅπως ὅλοι οἱ ἄλλοι λαοὶ οἱ ὁποῖοι ἐξῆλθον ἀπὸ τὴν κατάστασιν τῆς βαρβαρότητος, πιεζόμενοι ἀπὸ τὴν ἀνάγκην ν' ἀριθμοῦν καὶ νὰ ὑπολογίζουν, ἐδημιούργησαν μίαν πρακτικὴν ἀριθμητικὴν καί, πρὸ παντὸς ἄλλου, ἔδωσαν ὀνόματα καὶ σύμβολα, πρὸς ἔνδειξιν διὰ τῆς φωνῆς καὶ τῆς χειρὸς τῶν ἀριθμῶν τῆς φυσικῆς σειρᾶς.

Ὅτι οἱ Ρωμαῖοι, ἐξ ἰδίας πρωτοβουλίας ἢ ξενικῆς ἐπιδράσεως, υἱοθέτησαν ἕνα σύστημα ἀριθμήσεως μὲ βάσιν τὸν ἀριθμὸν 10, εἰς τὸ ὁποῖον ὅμως καὶ ὁ ἀριθμὸς 20 εἶχε κάποιαν διακεκριμένην θέσιν, προκύπτει ἀπὸ τὴν ἁπλῆν θεώρησιν τοῦ κατωτέρω λεξιλογίου, τὸ ὁποῖον ἐχρησιμοποίουν διὰ τὴν ἔκφρασιν τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν (καὶ τὸ ὁποῖον περιλαμβάνει τὰ λεγόμενα ἀπόλυτα ἀριθμητικὰ ἐπίθετα, numeralia cardinalia adjectiva).

Χάριν περιεργείας προσθέτομεν, ὅτι ἡ λέξις sexcenti, πλὴν τῆς ὡρισμένης ἀριθμητικῆς σημασίας της, ἐσήμαινεν ἐπίσης ἀριθμὸν ἀνώτερον παντὸς ἄλλου, ἤτοι τὸ ἄπειρον.

Προκειμένου τώρα νὰ καθορίσωμεν τὰ σύμβολα, ποὺ ἐχρησιμοποίησαν οἱ Λατῖνοι, διὰ νὰ γράψουν τοὺς ἀκεραίους ἀριθμούς, δύο πηγαὶ ὑπάρχουν εἰς τὴν διάθεσίν μας.

1ον. Αἱ ἐπιγραφαί, αἱ ὁποῖαι εἰς σεβαστὸν ἀριθμὸν διέφυγον τὴν μανίαν τῶν βαρβαρικῶν ἐπιδρομῶν.

2ον. Τὰ χειρόγραφα τὰ περιέχοντα τὰ πρῶτα μαθήματα πρακτικῆς ἀριθμητικῆς εἰς λατινικὴν γλῶσσαν.

Τὰ δοκουμέντα αὐτὰ δὲν εἶναι βεβαίως τῆς ἰδίας ἀξίας, διότι τὰ πρῶτα ἔχουν αὐθεντικότητα, τὴν ὁποίαν οὐδεὶς μέχρι σήμερον ἐτόλμησε νὰ ἀμφισβητήση, ἐνῷ τὰ δεύτερα, ὡς ὑποκείμενα εἰς πιθανὰς ἀλλοιώσεις ἐκ μέρους τῶν ἀμαθῶν ἀντιγραφέων τοῦ Μεσαίωνος, δὲν δύνανται νὰ θεω-

ροῦνται τεκμήρια ἰσάξια πρὸς τὰς ἐπιγραφάς. Ἐκ τοῦ λόγου δὲ τούτου μεγάλαι διαφοραὶ ἀντιλήψεων ὑφίστανται μεταξὺ ἐκείνων, οἱ ὁποῖοι ἠσχολήθησαν εἰδικώτερον μὲ τὴν γραπτὴν ἀρίθμησιν τῶν Λατίνων*.

Τὸ ἀριθμητικὸν λεξιλόγιον καὶ τὰ ἀριθμητικὰ σύμβολα τῶν Λατίνων

Ἀραβικὰ ψηφία	Ρωμαϊκὰ σημεῖα	Ἀπόλυτα ἀριθμητικὰ quot ? πόσοι ;	Ἀραβικὰ ψηφία	Ρωμαϊκὰ σημεῖα	Ἀπόλυτα ἀριθμητικὰ quot ? πόσοι ;
1	I	unus, -a, -um	40	XXXX ἢ XL	quadraginta
2	II	duo, duae, duo	50	L	quinquaginta
3	III	tres, tria	60	LX	sexaginta
4	IV	quattuor	70	LXX	septuaginta
5	V	quinque	80	LXXX	octoginta
6	VI	sex	90	LXXXX ἢ XC	nonaginta
7	VII	septem	100	C	centum
8	VIII	octo			
9	IX	novem	101	CI	centum et unus
10	X	decem	110	CX	centum decem
			120	CXX	centum viginti
11	XI	undecim	200	CC	ducenti, -ae, -a
12	XII	duodecim	300	CCC	trecenti
13	XIII	tredecim	400	CCCC	quadringenti
14	XIV	quattuordecim	500	IↃ ἢ D	quingenti
15	XV	quindecim	600	IↃC ἢ DC	sescenti
16	XVI	sedecim	700	IↃCC ἢ DCC	septingenti
17	XVII	septendecim	800	DCCC	octigenti
18	XVIII	duodeviginti	900	DCCCC	nongenti
19	XIX	undeviginti	1000	M ἢ CIↃ	mille
20	XX	viginti	2000	MM	duo milia
21	XXI	unus et viginti ἢ viginti unus	3000	MMM	tria milia
			5000	IↃↃ	quinque milia
22	XXII	viginti duo	10000	CCIↃↃ	decem milia
28	XXVIII	duodetriginta	50000	IↃↃↃ	quinquaginta milia
29	XXIX	undetriginta	100000	CCCIↃↃↃ	centum milia
30	XXX	triginta	1000000	CCCCIↃↃↃↃ	decies centum milia

* Τ' ἀφορῶντα τὴν καταγωγὴν τῶν ἀριθμητικῶν σημείων τῶν Λατίνων περιβάλλονται ἀκόμη ὑπὸ ἀχλύος καὶ ἀπασχολοῦν τὴν παλαιογραφίαν καὶ τὴν φιλολογίαν. Ὁ ἐπιθυμῶν λεπτομερείας τοῦ εἴδους τούτου δύναται ν' ἀνατρέξῃ εἰς τὸ περισπούδαστον ἄρθρον τοῦ D. E. Smith : The Roman Numerals («Scientia», τόμος XL, 1926).

Ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον εἶναι ἀνεπίδεκτον ἀμφιβολίας εἶναι, ὅτι εἰς τὴν ἀρχὴν οἱ Ρωμαῖοι, διὰ νὰ παραστήσουν γραφικῶς ἕνα ἀριθμόν, ἐσυνήθιζον νὰ ἐπαναλαμβάνουν πολλὰς φορὰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, εὑρισκόμενοι οὕτω εἰς πλήρη ἁρμονίαν πρὸς τὴν συνήθειαν, τὴν ὁποίαν εἶχον ἀπὸ ἀρχαιοτάτων χρόνων υἱοθετήσει, νὰ ἐμπήγουν δηλαδὴ καθ' ἕκαστον ἔτος ἕνα «καρφί», τὸ οὕτω λεγόμενον «clavis annalis», εἰς ἕνα τοῖχον τοῦ ναοῦ τῆς Ἀθηνᾶς, διὰ νὰ ἔχῃ ὁ λαὸς τοῦτο ὡς χρονολογικὸν δείκτην.

Τὸ σύστημα ὅμως αὐτὸ ἀποδειχθέν, ἔπειτα ἀπὸ ὀλίγα σχετικῶς ἔτη, ὡς ἐντελῶς ἀνεπαρκές, ἀντικατεστάθη ἀπὸ ἕνα ἄλλο, εἰς τὰ παρασκήνια τοῦ ὁποίου εἶναι εὔκολον νὰ διακρίνωμεν τὴν χαρακτηριστικὴν παρουσίαν τῶν ἀριθμῶν 5 καὶ 10. Τοῦτο στηρίζεται ἐπὶ τῆς χρήσεως εἰδικῶν συμβόλων πρὸς παράστασιν μερικῶν στοιχείων τῆς φυσικῆς σειρᾶς, ἤτοι τῶν ἀριθμῶν:

1, 5, 10, 50, 100, 500, 1.000

Ὑπὸ πλείστων τὰ σύμβολα αὐτὰ ἐταυτίσθησαν ἀντιστοίχως μὲ τὰ γράμματα

I, V, X, L, C, D, M,

ὅπως συνάγεται, λόγου χάριν, ἀπὸ τὴν περίφρασιν:

«. . . ἕνας πεντακόσια δέκα πέντε»

τὴν ὁποίαν χρησιμοποιεῖ ὁ Δάντης (Καθαρτήριον, XXXIII, 43), ἀντὶ τῆς λέξεως DUX (= ἡγεμών). Παρὰ ταῦτα μερικαὶ ἀρχαῖαι ἐπιγραφαὶ ἀκόμη ὑφιστάμεναι, ἄγουν εἰς τὴν παραδοχήν, ὅτι ἀρχικῶς ὑπῆρχον σύμβολα ἰδιαίτερα, προερχόμενα ἴσως ἀπὸ ἐπιγραφὰς τῶν Ἐτρούσκων*, τὰ ὁποῖα, κατόπιν ἀθελήτων μετασχηματισμῶν, κατέληξαν νὰ ἐξομοιωθοῦν πρὸς γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου.

Ἕνα εἰδικὸν σύμβολον, τὸ ὁποῖον εἰς τὴν ἀρχὴν ἦτο ἴσως ἕνα M, ἐνῷ μεταγενεστέρως ἔλαβε τὴν μορφὴν παύλας, ἡ ὁποία τοποθετουμένη ἐπάνω εἰς τὰ γράμματα:

V, X, L, C, D, M,

ἐσήμαινε τὸν πολλαπλασιασμὸν αὐτῶν ἐπὶ χίλια. Εἰς χειρόγραφα μάλιστα τοῦ X αἰῶνος ὁ ἀριθμὸς χίλια παρίσταται ἐνίοτε, κατὰ τὴν μέθοδον αὐτήν, διὰ τοῦ συμβόλου $\overline{\mathrm{I}}$.

Παρόμοιον πολλαπλασιαστικὸν σύστημα ἐχρησιμοποιήθη διὰ τὰ πολλαπλάσια τοῦ 10.000 καὶ 100.000, ἀλλὰ δὲν εἶναι γνωστὸν κατὰ πόσον τοῦτο υἱοθετήθη ὑπὸ τῶν Ρωμαίων ἢ τῶν ἀμέσων διαδόχων των. Σημειω-

* Καμμία ἀμφιβολία ὡς πρὸς τὸ ὅτι Ρωμαῖοι πολλὰ ἔμαθον ἀπὸ τοὺς ὑποταγέντας Ἐτρούσκους. Ἀλλὰ πόσα ἔμαθον, μᾶς εἶναι ἄγνωστον σήμερον καὶ ἴσως παραμείνῃ ἄγνωστον διὰ παντός.

τέον δὲ ὅτι, ἐπειδὴ διὰ νὰ γράψουν μίαν χρονολογίαν οὗτοι δὲν εἶχον ἀνάγκην ἀριθμῶν μεγαλυτέρων τοῦ 1.000, ἐνῷ ἀφ' ἑτέρου ἐχρειάζετο, πρὸς ἀποφυγὴν ἀμφιβολιῶν, νὰ ἐπιστηθῇ ἡ προσοχὴ τοῦ ἀναγνώστου ἐπὶ τῆς ἀριθμητικῆς σημασίας τῶν γραμμάτων, δὲν εἶναι φαινόμενον ἀσύνηθες εἰς σχετικῶς νέας ἐπιγραφάς, μία ὁμὰς χαρακτήρων νὰ συμπληροῦται μὲ ἐπιγραμμήν, σημαίνουσαν ἀριθμὸν κατώτερον τῆς χιλιάδος.

Μέσῳ τοιούτων συμβόλων, καταλλήλως λαμβανομένων καὶ ἐπαναλαμβανομένων κατὰ σειρὰν σύμφωνον πρὸς τὸν «νόμον τοῦ Hankel», ἠδύναντο προφανῶς νὰ παραστήσουν τυχόντα ἀκέραιον ἀριθμόν. Πρὸς ἁπλοποίησιν ὅμως τῆς γραφῆς ἐπροτάθη ἕνα τέχνασμα, («ἀφαιρετικὴ μέθοδος»), τοῦ ὁποίου εἶχον ἤδη κάμει χρῆσιν οἱ Ἀσσύριοι, καὶ τὸ ὁποῖον δύναται νὰ συνδεθῇ μὲ τὰς λέξεις «duodeviginti» (=18) καὶ undeviginti» (=19). Τὸ τέχνασμα τοῦτο συνίστατο εἰς τὸ νὰ θεωρεῖται ἕνας ἀριθμὸς ὡς διαφορὰ δύο ἄλλων. Οὕτω διὰ νὰ γράψουν τὸν ἀριθμὸν 9, ἀντὶ VIIII ἔγραφον IX, τὸ σύμβολον δὲ τοῦτο δὲν δύναται νὰ ἑρμηνευθῇ ὡς σημαῖνον καὶ 11, λόγῳ τοῦ «νόμου τοῦ Hankel». Ὁμοίως ἔγραφον IIX διὰ νὰ παραστήσουν τὸν 8, XL διὰ τὸν 40, XC διὰ τὸν 90 καὶ CD διὰ τὸν 400. Ἡ ἀνάλογος ἀντικατάστασις τοῦ IIII ὑπὸ τοῦ IV, ἡ ὁποία τόσον εἶναι συνήθης σήμερον, δὲν υἱοθετήθη μολοντοῦτο παρὰ μόνον εἰς ἐποχὴν πολὺ πλησίαν πρὸς ἡμᾶς.

Παρατηρητέον ὅτι ἡ αὐστηρὰ τήρησις τοῦ ἁπλοποιητικοῦ τεχνάσματος δὲν ἦτο ὑποχρεωτικὴ καὶ κατὰ συνέπειαν οἱ συγγραφεῖς δὲν ἐδεσμεύοντο ὥστε νὰ μὴ ἀπομακρυνθοῦν τούτου, εἰς ὡρισμένας περιστώσεις, εἴτε δι' ὡρισμένον λόγον, εἴτε χάριν ἰδιοτροπίας. Πρέπει ἀκόμη νὰ τονισθῇ, ὅτι ὑπὸ τὸ κράτος ἄλλων συστημάτων ἀριθμήσεως, υἱοθετηθέντων προϊόντος τοῦ χρόνου, ἡ γραπτὴ λατινικὴ ἀρίθμησις ὑπέστη περιέργους τροποποιήσεις, ὁρατὰς ὑπὸ μορφὴν ὑβριδίων, διὰ τὰς ὁποίας ὅμως δὲν εὐθύνεται ὁ λαὸς περὶ οὗ ὁ λόγος καὶ αἱ ὁποῖαι δὲν ἀξίζουν ἰδιαιτέρας μνείας.

101. Κατὰ τὴν μετάβασιν ἀπὸ τοὺς ἀκεραίους εἰς τὰ κλάσματα, οἱ Λατῖνοι ἐγκατέλειψαν τὴν βάσιν δέκα· ἕνεκα τῆς περιωρισμένης ἐπιστημονικῆς νοοτροπίας των, δὲν ἠδυνήθησαν νὰ συλλάβουν εἰς τὴν γενικότητά της τὴν ἔννοιαν τῶν νέων αὐτῶν ὀντοτήτων, ἀλλὰ περιωρίσθησαν εἰς τὰ μέρη τῶν ἐν χρήσει μετρητικῶν μονάδων, τὰς ὁποίας ἐθεώρουν διῃρημένας εἰς 12, 144, 288 κλπ. ἴσα μέρη. Ἐντεῦθεν προῆλθον τὰ ὀνόματα καὶ τὰ σύμβολα τὰ χρησιμοποιούμενα διὰ νὰ δηλώσουν τὸ 1/12 καὶ τὰ πολλαπλάσια ἢ τὸ ἥμισυ τούτου, τὰ 2/3 κλπ.

Πρόκειται πάντοτε διὰ κλάσματα ἔχοντα ἀριθμητὴν τὴν μονάδα, ὡς προκύπτει ἀπὸ τὸν ἑπόμενον πίνακα.

as = 1

semis $= \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$	semuncia $= \frac{1}{24}$
quincunx $= \frac{5}{12}$	duella $= \frac{1}{36}$
triens $= \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$	sicilicus $= \frac{1}{48}$
quadrans $= \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$	sextula $= \frac{1}{72}$
sextans $= \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$	drachma $= \frac{1}{96}$
sexuncia $= \frac{1^{1/2}}{12} = \frac{1}{8}$	dimidiasextula $= \frac{1}{144}$
uncia $= \frac{1}{12}$	scrupulus $= \frac{1}{288}$
obolus $= \frac{1}{576}$	siliqua $= \frac{1}{1728}$
cerates $= \frac{1}{1152}$	calcus $= \frac{1}{2304}$.

Ἡ ἀνάγκη τῆς εἰσαγωγῆς ἄλλων κλασμάτων ἔγινεν αἰσθητὴ εἰς τοὺς Λατίνους μόνον ἀπὸ τῶν ἀρχῶν τοῦ Χ αἰῶνος.

Ὁ ὑπολογισμὸς μὲ ἀριθμοὺς ἀποτελουμένους ἀπὸ ἀκεραίους καὶ δωδεκαδικοὺς παρουσιάζει κάποιαν δυσκολίαν εἰς τὸν μὴ ἔμπειρον ὑπολογιστήν, ἐντεῦθεν ἡ ἀνάγκη «πινάκων ἑτοίμων ὑπολογισμῶν», οἱ ὁποῖοι θὰ πρέπει νὰ ἐκυκλοφόρουν εἰς εὐρεῖαν κλίμακα μεταξὺ τῶν ἐφοριακῶν πρακτόρων καὶ ἄλλων συναφῶν ὑπαλλήλων τοῦ ρωμαϊκοῦ κράτους.

Μολονότι δὲν περιεσώθη κανεὶς πίναξ ἐκ λατινικῆς χειρός, κάποιαν ἰδέαν τοῦ περιεχομένου λαμβάνομεν ἀπὸ μερικοὺς πίνακας καταστρωθέντας ἀπὸ κάποιον Βίκτωρα ἐξ Ἀκουϊτανίας, τοῦ ὁποίου ἡ ἐποχὴ καθορίζεται ἐκ τῆς παρατηρήσεως, ὅτι κατὰ τὸ ἔτος 457 μ.Χ. συνέταξεν ἕνα Computus Paschalis ὀκτὼ δὲ ἔτη κατόπιν, ὁ πάπας Ἱλαρίων προσέφυγεν εἰς αὐτὸν διὰ θέση τάξιν εἰς τὸ ἐν χρήσει ἡμερολόγιον.

Τὸ κύριον μέρος τοῦ Calculus Victorii, ὅπως τιτλοφορεῖται τὸ ἔργον

τοῦ Βίκτωρος, ἀποτελεῖται ἀπὸ πίνακας οἱ ὁποῖοι παρέχουν ἕτοιμα τὰ γινόμενα τῶν ἀριθμῶν :

1000, 900, 800, 700, 600, 500,
400, 300, 200, 100, 90, 80, 70, 60,
50, 40, 30, 20, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1,
11/12, 10/12, 9/12, 8/12, 7/12, 6/12,
5/12, 4/12, 3/12, 2/12, 1/12, 1/24,
1/48, 1/72, 1/144 καὶ 1/1244

ἐπὶ ὅλους τοὺς ἀκεραίους τοὺς περιλαμβανομένους μεταξὺ 2 καὶ 49. Τὰ γινόμενα ἐκφράζονται ὡς ἀθροίσματα ἀκεραίων καὶ ἀναγώγων κλασμάτων.

Εἰς τοὺς ἀνωτέρω πίνακας εὑρίσκονται προσηρτημένοι ἄλλοι, οἱ ὁποῖοι προσφέρουν ἀναλόγους ὑπηρεσίας εἰς ὅσους ἐκτελοῦν ἀριθμητικὰς πράξεις ἄλλου εἴδους ἐπὶ ἀριθμῶν συγκειμένων ἐξ ἀκεραίων καὶ δωδεκαδικῶν κλασμάτων.

Ἐκτὸς τῶν βοηθητικῶν τούτων πινάκων, οἱ Ρωμαῖοι κατέφευγον καὶ εἰς τὴν χρῆσιν ὀργάνων (ἀβάκων) διαφόρων τύπων, τὰ ὁποῖα ἐδιδάχθησαν μὲν ἀναμφιβόλως ἀπὸ τοὺς λαοὺς μὲ τοὺς ὁποίους ἤρχοντο εἰς ἐπαφήν, ἐτροποποίησαν ὅμως καταλλήλως, ὥστε νὰ προσαρμόζωνται καλύτερον πρὸς τὴν ἀριθμητικήν των, ἀλλὰ καὶ εἰς τὴν νοοτροπίαν των.

Ἕνα τελευταῖον ἁπλουστευτικὸν τέχνασμα ἐφηρμόσθη ἀπὸ τοὺς ἰδίους, γνωστὸν ὡς «συμπληρωματικὸς πολλαπλασιασμός», στηριζόμενον ἐπὶ τῆς ταυτότητος :

$$ab = (10-a)\ (10-b) + 10(a+b-10).$$

Τὸ τέχνασμα τοῦτο ἀνάγει τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ γινομένου δύο ἀριθμῶν περιεχομένων μεταξὺ τοῦ 5 καὶ τοῦ 10 εἰς τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν περιελαμβανομένων μεταξὺ 1 καὶ 5.

102. Μεταγενέστεραι πληροφορίαι γύρω ἀπὸ τὴν ρωμαϊκὴν λογιστικὴν δύνανται νὰ ληφθοῦν ἀπὸ τοὺς ἀρχαιοτέρους μεσαιωνικοὺς συγγραφεῖς. Ὁ ἐπιχειρῶν ὅμως νὰ συμβουλευθῇ αὐτὰς τὰς πηγὰς πρέπει νὰ ἀναλάβῃ ἀναριθμήτους φροντίδας προκειμένου νὰ διαχωρίσῃ ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἀνήκει εἰς τοὺς Ρωμαίους, ἀπὸ ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον προσετέθη ἀπὸ μακρυνοὺς ἀπογόνους των καὶ ἀπὸ ἄλλας ἐπιδράσεις. Διὰ νὰ λάβωμεν γνῶσιν ἔπειτα τῆς φύσεως καὶ τῆς σπουδαιότητος τῶν ἀριθμητικῶν προβλημάτων, τὰ ὁποῖα αἱ περιστάσεις ἐπέβαλλον εἰς τοὺς νομοθέτας τοῦ κόσμου, εἶναι σκόπιμον ν' ἀναφέρωμεν εἰς τὴν πρώτην γραμμὴν τὸν «ὑπολογισμὸν τόκων», συνηθέστατον εἰς τὰς τοκογλυφικὰς συναλλαγὰς τῶν Ρωμαίων,

αἱ ὁποῖαι ἦσαν τόσον διαδεδομέναι, ὥστε κατὰ τὸ 342 ἐδέησε νὰ περιορισθοῦν ὑπὸ εἰδικῶν κρατικῶν διατάξεων (Lex Genucia), εἰς δευτέραν γραμμὴν δὲ τὴν ἐφαρμογὴν τῶν διατάξεων, αἱ ὁποῖαι ἐρρύθμιζον τὰ δικαιώματα συντάξεως διαθήκης, (Lex Falcidia, ἔτος 40 π.Χ.), αἱ ὁποῖαι κατὰ τὴν ἐφαρμογὴν εἰς πολυπλόκους περιπτώσεις ἔδιδον λαβὴν εἰς ζητήματα λεπτὰ καὶ δύσκολα.

Εἰς ποίας αὐθεντίας κατέφευγον οἱ Ρωμαῖοι πρὸς ὑπερνίκησιν τῶν ἀναφυομένων ἀριθμητικῶν δυσκολιῶν δὲν εἶναι τελείως οὔτε ἀσφαλῶς γνωστόν. Γνωρίζομεν μολοντοῦτο ὅτι ὁ πλατωνικὸς σοφιστής, συγγραφεὺς καὶ δικαστικὸς ἀνὴρ Ἀπουλαῖος ἢ Ἀπουλήιος, γεννηθεὶς ἐν Μαδούρῳ τῆς Νουμιδίας, τὸ 125 μ.Χ., ἀφοῦ συνεπλήρωσε τὰς σπουδάς του εἰς Ἀθήνας, μετέφρασεν ἐκ τοῦ ἑλληνικοῦ εἰς τὴν λατινικὴν τὴν Ἀριθμητικὴν τοῦ Νικομάχου τοῦ Γερασηνοῦ (§86), συμπληρώσας αὐτὴν πιθανῶς μὲ ἀριθμητικὰς ἐφαρμογάς. Λέγομεν πιθανῶς, διότι τὸ ἔργον τοῦ Ἀπουλαίου δὲν ἔφθασε μέχρις ἡμῶν.

Καλυτέραν τύχην εἶχεν ἕνα εἶδος Ἐγκυκλοπαιδείας, εἰς ἐννέα βιβλία, γραφέντα κατὰ τὸ 470 ἀπὸ ἕνα Καρχηδόνιον, ὅστις ἀπέκτησε τὸ διακεκριμένον ἀξίωμα τοῦ ρωμαίου ἀνθυπάτου, καὶ εἶναι γνωστὸς ὑπὸ τὸ ὄνομα Μαρτιανὸς Καπέλλας. Εἰς τὸ ἔργον τοῦτο μετὰ τὴν Γραμματικήν, τὴν Διαλεκτικὴν καὶ τὴν Ρητορικήν, ἐκτίθενται καὶ ἡ Γεωμετρία, ἡ Ἀριθμητική, ἡ Ἀστρονομία καὶ ἡ Μουσική.

Τὸ μέρος τὸ ἀφιερωμένον εἰς τὴν ἐπιστήμην τοῦ διαστήματος εἶναι μία ἁπλῆ ἀνασύνταξις τῶν ὁρισμῶν τοῦ Εὐκλείδου, ἡ ὁποία τελειώνει μὲ μίαν ἁπλῆν ἐκφώνησιν τοῦ πρώτου προβλήματος τῶν Στοιχείων, (σημειοῦμεν παρὰ ταῦτα ὅτι εἰς τὸν μέγαν ἀλεξανδρινὸν ἀφιερώνονται μερικαὶ φράσεις ἐνθουσιαστικοῦ ἐγκωμίου)*, ἐνῷ ἡ ἐπιστήμη τῶν ἀριθμῶν ἔχει περιεχόμενον καὶ μορφὴν ἐμπνευσμένα ἀπὸ τὰς ἰδέας τοῦ Πυθαγόρου καὶ τῶν νεωτέρων ἀνακαινιστῶν τοῦ Πυθαγορισμοῦ. Τὸ ἐν λόγῳ κείμενον δὲν ἀποδεικνύει μόνον τὴν παντελῆ ἔλλειψιν πρωτοτυπίας τοῦ συγγραφέως του, ἀλλὰ μαρτυρεῖ ἐπίσης τὴν πτωχὴν ἱκανότητα τῶν Λατίνων νὰ κατανοήσουν τὰ ἀριστουργήματα τοῦ ἑλληνικοῦ πνεύματος ὡς καὶ μίαν ἀνωφελῆ ἐπιστροφὴν εἰς τὴν σύγχισιν μαθηματικῶν καὶ φιλοσοφίας, ἡ ἐξάλειψις τῆς ὁποίας, ὅπως εἴδομεν, ἐπισημαίνει (καὶ ἴσως προσδιορίζει) τὴν χρυσῆν περίοδον τῶν ἑλληνικῶν μαθηματικῶν.

103. Ὅπως εἴπομεν ἀνωτέρω, ἕνας ἐκ τῶν δύο μεγάλων κλάδων τῶν μαθηματικῶν προσέλαβε παρὰ τοῖς Λατίνοις τὸν χαρακτῆρα βοηθητικῆς

---

* Παρατηροῦμεν ἐπίσης, ὅτι ἕνα παλίμψηστον ἀναγόμενον εἰς τὸν IX αἰῶνα καὶ τὸ ὁποῖον εἶναι ἰδιοκτησία τῆς Δημοτικῆς Βιβλιοθήκης τῆς Βερόνας, παρέχει ἄλλας ἀποδείξεις τῆς λατρείας μερικῶν Ρωμαίων πρὸς τὸν μέγαν διδάσκαλον τοῦ Μουσείου.

37 - 20 π.Χ. ἔχουν ἱστορικὴν σπουδαιότητα διὰ τὴν γεωδαισίαν, οἵαν ἔχει τὸ ἔτος 46, ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἐγκαινιάσθη τὸ ἰουλιανὸν ἡμερολόγιον, διὰ τὴν ἀστρονομικὴν χρονομετρίαν.

Μερικαὶ ἐνδιαφέρουσαι λεπτομέρειαι ὡς πρὸς τὴν φύσιν καὶ τὰ ὅρια τῆς ρωμαϊκῆς ἀγρονομίας, προκύπτουν ἀπὸ τὴν ἀναδίφησιν τῆς περισωθείσης γραμματείας. Οὕτω μανθάνομεν, ὅτι ὁ πρῶτος συγγραφεὺς ἐπὶ τοῦ θέματος τούτου ὑπῆρξεν ὁ Μάρκος Τερέντιος Βαρρόνε (116 - 27 π.Χ.), θεωρούμενος ὑπὸ τῶν Ρωμαίων ὡς ἕνας νέος Πλάτων. Μνημονεύονται τοὐλάχιστον τρία ἔργα του (Mensuralia, Geometria καὶ Atticus sive de numeris), ἱκανὰ νὰ παράσχουν πληροφορίας ἐπὶ τοῦ θέματος, εἰς τὰ ὁποῖα προστίθεται μία μεγάλη ἐγκυκλοπαιδεία, τιτλοφορουμένη De disciplinis καὶ περιλαμβάνουσα κατὰ σειρὰν Γραμματικήν, Διαλεκτικήν, Ρητορικήν, Γεωμετρίαν, Ἀριθμητικήν, Ἀστρολογίαν, Μουσικήν, Ἰατρικὴν καὶ Ἀρχιτεκτονικήν. Δυστυχῶς ὅμως κανένα ἐξ αὐτῶν δὲν ἔφθασε μέχρις ἡμῶν καὶ οὕτω ἐχάθη σήμερον ἡ δυνατότης νὰ προσδιορίσωμεν ὁποῖοι ὑπῆρξαν οἱ δεσμοὶ μεταξὺ τῆς ρωμαϊκῆς ἐπιστήμης καὶ ἐκείνης τῶν Ἐτρούσκων καὶ Ἑλλήνων.

Ἐπιχειροῦντες ν' ἀντλήσωμεν τοιαύτας πληροφορίας ἀπὸ τὸ μέγα ἔργον εἰς δέκα βιβλία De Architectura, τὸ ὁποῖον ἀφιέρωσεν (14 π.Χ.) εἰς τὸν αὐτοκράτορα Αὔγουστον ὁ διάσημος ρωμαῖος μηχανικὸς καὶ ἀρχιτέκτων Β ι τ ρ ο ύ β ι ο ς (Marius Vitruvius Pollio), δὲν θὰ διαψευσθῶμεν τελείως εἰς τὰς ἐλπίδας μας. Ἡ δίψα τοῦ «εἰδέναι» μόνον ἐν μέρει ἱκανοποιεῖται πράγματι ἐκ τοῦ βιβλίου τούτου, διότι ἐνῷ δυνάμεθα ἐξ αὐτοῦ νὰ συμπεράνωμεν τὴν ἐκ μέρους τοῦ συγγραφέως γνῶσιν μερικῶν ἐκ τῶν μαθηματικῶν ἀνακαλύψεων τῶν Ἑλλήνων, δὲν εἶναι ἐν τούτοις δυνατὸν νὰ σχηματίσωμεν πλήρη πίνακα τῶν ὅσων οἱ Λατῖνοι ἠδυνήθησαν νὰ μάθουν ἀπὸ τοὺς ἕλληνας μαθηματικούς, πρᾶγμα ἄλλωστε τὸ ὁποῖον, λογικῶς, δὲν ἦτο δυνατὸν ν' ἀναμένεται ἀπὸ ἕνα ἀρχιτέκτονα ἀσχολούμενον μὲ τὰ ἀντικείμενα τῆς ἁρμοδιότητός του.

Προσθέτομεν ὅτι ὁ Βιτρούβιος εἶναι ὁ ρωμαῖος ἐκεῖνος συγγραφεύς, τοῦ ὁποίου ἡ νοοτροπία πλησιάζει περισσότερον πρὸς τὴν ἰδικήν μας. Ἀποδεικνύεται ἐμπεποτισμένος ἀπὸ τὴν ἑλληνικὴν ἐπιστήμην, τῆς ὁποίας εἶναι εἰλικρινὴς θαυμαστής. Τὸ γεγονὸς ὅτι μεταξὺ τῶν μεγάλων, τοὺς ὁποίους ἀναφέρει, δὲν εὑρίσκεται οὔτε ἕνα λατινικὸν ὄνομα παρέχει σιωπηρὰν ἐπιβεβαίωσιν τοῦ ὅτι οἱ Ρωμαῖοι οὐδεμίαν συμβολὴν προσεκόμισαν εἰς τὴν ἑλληνικὴν ἐπιστήμην.

Εἰς τοὺς προλόγους τῶν ἐννέα βιβλίων τῆς Ἀρχιτεκτονικῆς του ὁ Βιτρούβιος ἀρέσκεται νὰ ἐνημερώνῃ τὸν ἀναγνώστην ἐπὶ θεμάτων ἐχόντων μικρὰν ἢ ἀμφισβητουμένην συνάφειαν μὲ τὴν τέχνην τοῦ κατασκευάζειν. Οἱ πρόλογοι οὗτοι, ἐνῷ δύνανται νὰ παραλειφθοῦν ἀπὸ τὸν σπουδαστὴν

μηχανικόν, ὡς ἀνωφελεῖς δι' αὐτόν, ἐν τούτοις διὰ τὸν ἱστορικὸν τῆς ἐπιστήμης παρουσιάζουν ἰδιαίτερον ἐνδιαφέρον ὡς πηγαὶ πληροφοριῶν. Ἀξιόλογοι εἶναι π.χ. ὁ πρόλογος τοῦ βιβλίου VII, διότι περιέχει ἕνα περίφημον «ἐγκώμιον τοῦ βιβλίου» καὶ ὁ πρόλογος τοῦ βιβλίου τοῦ IX, ὅπου γίνεται σύγκρισις μεταξὺ ἀθλητοῦ καὶ διανοουμένου καὶ ὑποστηρίζεται ἡ ἄποψις, ὅτι ὁ δεύτερος πολὺ περισσότερον τοῦ πρώτου εἶναι ἄξιος τῶν ὑψηλῶν τιμῶν, ποὺ ἀπονέμονται, κατὰ τὴν συνήθειαν, εἰς τοὺς διακρινομένους ἀθλητὰς τῶν ὀλυμπιακῶν ἀγώνων.

Κάποιαν ἄλλην πληροφορίαν γύρω ἀπὸ τὴν πρακτικὴν γεωμετρίαν τῶν Ρωμαίων μᾶς παρέχει ὁ χιλίαρχος Μοδερᾶτος Κολουμέλλας (Lucius Giulius Moderatus Columella), ἐκ Γαδείρων τῆς Ἱσπανίας, μὲ τὸ ἔργον του, εἰς δώδεκα βιβλία, De re rustica, γραφὲν πιθανώτατα κατὰ τὸ ἔτος 62 μ.Χ. Ἐκ τοῦ βιβλίου τούτου καταφαίνεται ὅτι ὁ συγγραφεύς του εἶναι εἰς θέσιν νὰ ὑπολογίζῃ ἐπακριβῶς τὸ ἐμβαδὸν τετραγώνου, ὀρθογωνίου καὶ ὀρθογωνίου τριγώνου. Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ἐμβαδοῦ ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου καὶ ἑνὸς κανονικοῦ ἑξαγώνου, δέχεται $\sqrt{3} = 26/15$, τιμὴν δηλαδὴ ἀξιολόγου προσεγγίσεως, ἐνῷ διὰ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου καὶ τοῦ ἡμικυκλίου δέχεται σιωπηρῶς τὴν τιμὴν τοῦ π ἴσην πρὸς $22/7$. Οὔτε διστάζει νὰ ὑπολογίσῃ κατὰ προσέγγισιν τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τμήματος μικροτέρου ἡμιπεριφερείας, ἔχοντος δοθεῖσαν βάσιν καὶ δοθὲν ὕψος, χρησιμοποιῶν τὸν κανόνα, τὸν ὁποῖον εἶχεν ἐφαρμόσει ὁ Ἥρων εἰς τὸ ὑπ' ἀριθμὸν 31 πρόβλημα τοῦ βιβλίου I τῶν Μετρικῶν. Ὁ Κολουμέλλας, κατὰ τὸ παράδειγμα τῶν ἀρχαίων Αἰγυπτίων, δὲν διδάσκει γενικοὺς κανόνας, ἀλλ' ἀφήνει τὸν ἀναγνώστην νὰ ἐξαγάγῃ τοιούτους ἐκ τῶν παρατιθεμένων ἐφαρμογῶν.

Εἰς πεδίον ἐφαρμογῶν ἀμεσώτερον συνδεομένων μὲ τὴν πρακτικὴν γεωμετρίαν μᾶς ἐπαναφέρει ἡ ἐξέτασις ἑνὸς ἄλλου ἑλληνικοῦ κειμένου τοῦ III αἰῶνος μ.Χ., γραφὲν πρὸς χρῆσιν τῶν στρατοπεδευόντων, ὑπὸ τοῦ πολυγράφου Σέξτου Ἰουλίου Ἀφρικανοῦ, γεννηθέντος εἰς Ἱερουσαλὴμ καὶ ἀκμάσαντος κατὰ τοὺς χρόνους τῆς βασιλείας τοῦ Ἀλεξάνδρου Σεβήρου (222 - 235). Ἐκ τοῦ κειμένου τούτου, τὸ ὁποῖον ἐδημοσίευσεν ὁ Vincent καὶ φέρει τὸν τίτλον Κεστοί, ἀξίζει νὰ μνημονευθῇ ἡ προτεινομένη μέθοδος προσδιορισμοῦ τοῦ ὕψους ἑνὸς τοίχου καὶ τοῦ πλάτους ἑνὸς ποταμοῦ. Θ' ἀναφέρωμεν ἐκείνην ἡ ὁποία συνίσταται εἰς μίαν κομψὴν ἐφαρμογὴν τοῦ θεωρήματος «ἐὰν ἐκ τοῦ μέσου μιᾶς τῶν καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου ἀχθῇ κάθετος ἐπ' αὐτὴν καὶ ἂν ἐκ τοῦ σημείου καθ' ὃ αὕτη τέμνει τὴν ὑποτείνουσαν ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν τρίτην πλευρὰν τοῦ τριγώνου, ὅλαι αἱ πλευραὶ θὰ ἔχουν διχοτομηθῆ». Ἡ χρῆσις τοῦ λήμματος τούτου διὰ τὴν μέτρησιν τοῦ πλάτους ἑνὸς ποταμοῦ εἶναι φανερά: ἔστωσαν πράγματι (σχ. 14) Α ἕνα σημεῖον τῆς ἀντι-

ἐπιστήμης εἰς τὴν ὑπηρεσίαν τῶν ἐπιχειρηματιῶν καὶ τῶν νομομαθῶν. Τὸν χαρακτῆρα τοῦτον δυνάμεθα mutatis mutandis νὰ ἐπανεύρωμεν καὶ εἰς τὸν ἄλλον κλάδον τῶν μαθηματικῶν, καίτοι οἱ Ρωμαῖοι ἐπέδειξαν πρὸς τὴν γεωμετρίαν ἔφεσιν ἀκόμη μικροτέραν ἐκείνης, τὴν ὁποίαν ἐξεδήλωσαν πρὸς τὴν ἀριθμητικήν.

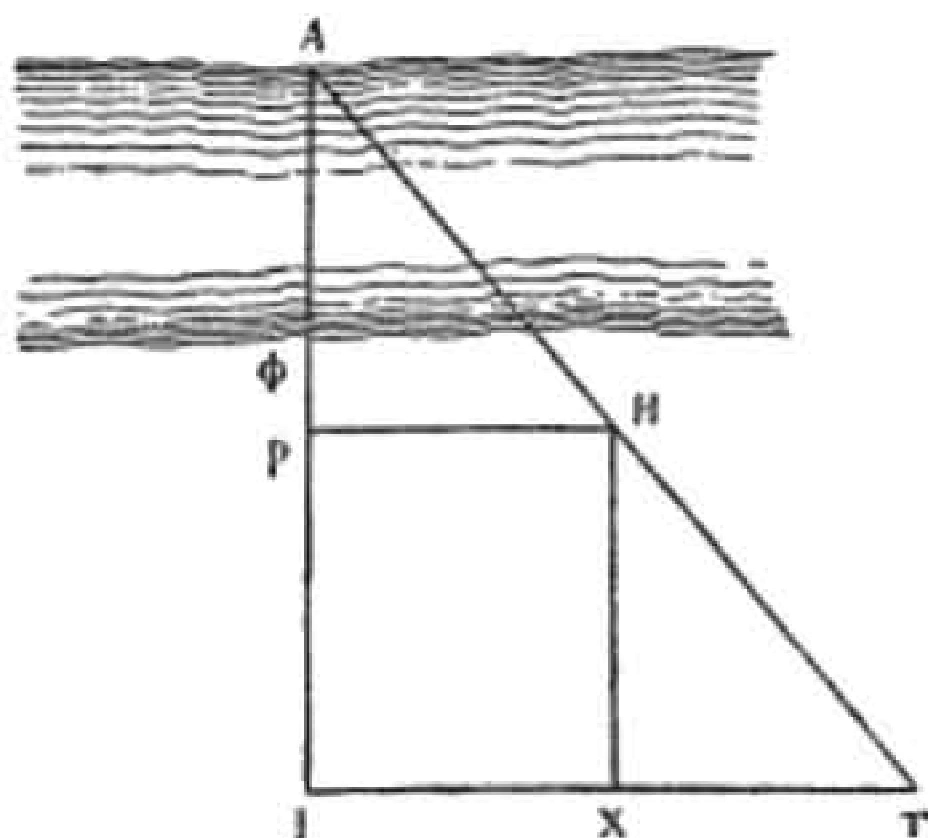
Ἀπὸ τῶν ἀρχαιοτάτων χρόνων οἱ Ρωμαῖοι παρωρμήθησαν ἐκ τῶν ἀναγκῶν τῆς λατρείας νὰ στραφοῦν πρὸς τὴν πρακτικὴν γεωμετρίαν. Ἵνα πραγματοποιηθοῦν τὰ μηνύματα τῶν οἰωνῶν, ἦτο ἀνάγκη νὰ ὑπάρχουν εἰς τοὺς ναούς, χαραγμέναι μὲ μεγάλην ἀκρίβειαν, δύο εὐθεῖαι μεταξύ των κάθετοι, αἱ ὁποῖαι ἐκαλοῦντο «decimanus» καὶ «cardo». Ἡ μία τῶν εὐθειῶν τούτων ἐφέρετο ἀπὸ Ἀνατολῶν πρὸς Δυσμάς, ἡ ἄλλη ἀπὸ Βορρᾶ πρὸς Νότον, οὕτως ὥστε ἐσχηματίζοντο ἐμβρυωδῶς οἱ ἄξονες ἑνὸς ὀρθογωνίου καρτεσιανοῦ συστήματος συντεταγμένων. Ὅταν ἐχαράσσετο ἡ μία, ἡ ἄλλη ἠδύνατο νὰ εὑρεθῇ μὲ τὴν χρῆσιν τοῦ βασικοῦ ἐργαλείου τῆς ρωμαϊκῆς γηπεδομετρίας. Ἐννοοῦμεν τὸ ὄργανον ἐκεῖνο ποὺ καλεῖται κοινῶς stella ἢ ἀστερίσκος, τὸ ὁποῖον ὅμως οἱ Λατῖνοι μὲ λέξιν σκοτεινῆς ἐτυμολογίας ἐκάλουν «groma» (ἐξ οὗ καὶ ἡ λέξις gromatici, μὲ τὴν ὁποίαν καλοῦνται ἐν Ἰταλίᾳ οἱ ἀγρονόμοι τοπογράφοι) καὶ τὸ ὁποῖον ἀπετελεῖτο οὐσιωδῶς ἀπὸ δύο εὐθυγράμμους ράβδους, διατεταγμένας κατ' ὀρθὴν γωνίαν καὶ διατηρουμένας ὁριζοντίως μέσῳ κατακορύφου ποδός, διερχομένου ἐκ τοῦ σημείου διασταυρώσεως τῶν δύο καθέτων ράβδων.

Ἄλλη ἰσχυρὰ παρόρμησις πρὸς τὴν σπουδὴν τῆς πρακτικῆς γεωμετρίας ἐδόθη εἰς τοὺς Λατίνους ἀπὸ τὸν Ἰούλιον Καίσαρα, ὅταν, συντελεσθείσης ἐπιτυχῶς τῆς μεταρρυθμίσεως τοῦ ἡμερολογίου μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ σοφοῦ Σωσιγένους *, ἀπεφάσισεν ἐν συνεχείᾳ τὴν καταμέτρησιν τῶν γηΐνων ἐκτάσεων, ἐπὶ τῶν ὁποίων ἡπλώνετο ἡ ἔνδοξος δημοκρατία. Τὸ δολοφονικὸν ἐγχειρίδιον τοῦ Βρούτου ἠμπόδισε τὸν μεγάλον πολιτικὸν ἄνδρα νὰ ἴδῃ περατούμενον τὸ κολοσσιαῖον ἐκεῖνο ἔργον, δὲν ἠμπόδισεν ὅμως ν' ἀχθῇ τὸ ἔργον εἰς πέρας ὑπὸ τοῦ διαδόχου του. Τὰ ἔτη λοιπὸν

---

* Εἶναι ἐνδιαφέρον νὰ σημειώσωμεν ὅτι ἡ θεμελιώδης ἰδέα αὐτῆς τῆς μεταρρυθμίσεως ἀνάγεται πιθανῶς εἰς τὸν Ἀρχιμήδην, εἰς τὸν ὁποῖον ἀποδίδεται ἕνα ἔργον, ἀπολεσθὲν σήμερον, ἐπὶ τῆς διαρκείας τοῦ ἔτους. Ἀπὸ τὰς Συρακούσας τὸ ἔργον τοῦτο ἐπέρασεν εἰς τὴν Αἴγυπτον, ὅπως ἀπέδειξεν ἡ κατὰ τὸ 1866 γενομένη ἀνακάλυψις, πλησίον μιᾶς τῶν ἐκβολῶν τοῦ Νείλου καὶ μεταξὺ τῶν ἐρειπίων τῆς ἀρχαίας πόλεως Κανώβου, μιᾶς στήλης μὲ ἐπιγραφὰς τόσον εἰς ἑλληνικὴν γλῶσσαν, ὅσον καὶ εἰς ἱερογλυφικὴν καὶ δημοτικὴν γραφήν. Ἀνεγράφετο ἐκεῖ ἕνα διάταγμα τῶν ἱερέων τοῦ τόπου, δυνάμει τοῦ ὁποίου ἀπὸ τῆς 7ης Μαρτίου 238 (δηλαδὴ ὀλίγον μετὰ τὸν θάνατον τοῦ Συρακουσίου), εἰς τὰς 5 ἐμβολίμους ἡμέρας ποὺ προσετέθησαν ἤδη εἰς τὸ ἔτος τῶν 360 ἡμερῶν, ἔπρεπε νὰ προσθέτουν μίαν ἕκτην ἡμέραν ἀνὰ τετραετίαν. Ἀποτελεῖ δὲ τοῦτο τὴν βάσιν τῆς ἰουλιανῆς μεταρρυθμίσεως, ἡ ὁποία, μετὰ πάροδον δύο αἰώνων, ἐπέστρεψεν εἰς τὴν Ἰταλίαν.

κειμένης ὄχθης, ΑΦ ἡ ζητουμένη διάστασις, Ι σημεῖον τῆς εὐθείας ΑΦ καὶ ΙΥ ἕνα τμῆμα εὐθείας αὐθαιρέτου μήκους διευθύνσεως ὅμως καθέτου ἐπὶ τὴν ΑΙ. Σημειοῦται τὸ μέσον Χ τοῦ τμήματος ΙΥ, ἄγεται δ' ἐξ αὐτοῦ κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΙΥ καὶ προσδιορίζεται ἡ τομὴ μετὰ τῆς ΑΥ.



Σχ. 14

Τέλος ἐκ τοῦ Η ἄγεται ἡ κάθετος ΗΡ ἐπὶ τὴν ΑΙ. Συμφώνως πρὸς τὸ λῆμμα θὰ εἶναι ΑΡ = ΡΙ, ἐπομένως τὸ ζητούμενον πλάτος τοῦ ποταμοῦ θὰ ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφορὰν ΙΡ — ΡΦ τῶν μετρησίμων ἀποστάσεων ΙΡ καὶ ΡΦ.

104. Μίαν νέαν πηγὴν πληροφοριῶν γύρω ἀπὸ τὴν γεωδαισίαν τῶν Ρωμαίων (καὶ ἠμποροῦμεν ἀκόμη νὰ προσθέσωμεν: γύρω ἀπὸ τὴν λογιστικὴν ποὺ ἐφήρμοζον) ἀποτελοῦν τὰ ἔργα ἐκείνων, οἱ ὁποῖοι ἐθεωροῦντο ὡς θεματοφύλακες τῆς ἐπισήμου ἐπιστήμης, δηλαδὴ τῶν ρωμαίων ἀγρονόμων. Τὰ ἔργα αὐτὰ ἔχουν συγκεντρωθῆ εἰς ἕνα τόμον, ὁ ὁποῖος κατὰ τὴν περίοδον 1566 - 1604 ἦτο ἰδιοκτησία ἑνὸς σοφοῦ τῆς Groninga, φέροντος τὸ ὄνομα Giovanni Arcerio. Τώρα τὸ βιβλίον εὑρίσκεται εἰς τὴν βιβλιοθήκην τοῦ Wolfenbüttel καὶ εἶναι περίφημον εἰς τὴν ἱστορίαν τῶν μαθηματικῶν ὑπὸ τὸ ὄνομα Ἀ ρ κ ε ρ ι α ν ὸ ς Κ ῶ δ ι ξ (Codice Arceriano). Προσφάτως μερικὰ ἀποσπάσματα ἐκ τοῦ περιεχομένου του ἐπανευρέθησαν εἰς ἕνα χειρόγραφον τῆς Βιβλιοθήκης τοῦ Μονάχου (Βαυαρία) καὶ ἐδημοσιεύθησαν.

Οἱ παλαιογράφοι βεβαιώνουν ὅτι ὁ Κῶδιξ ἐκεῖνος ἐγράφη τὸν VII αἰῶνα ἢ τὸν προηγούμενον, διὰ τῆς χρήσεως ὑλικῶν ἀναγομένων εἰς τὸ 450 μ.Χ., τῶν ὁποίων ἐγίνετο συχνοτάτη χρῆσις ὑπὸ τῶν ὑπαλλήλων τοῦ ρωμαϊκοῦ κτηματολογίου. Δὲν εἶναι ὅμως βέβαιον ὅτι τὰ διάφορα

μέρη τοῦ Κώδικος προέρχονται κατ' εὐθεῖαν ἀπὸ τοὺς συγγραφεῖς ποὺ ἀναφέρονται ἐκεῖ μὲ τὰ ὀνόματά των: Frontinus, Iginus, Balbus, Nipsus, Epafroditus, Vitruvius, Rufus). Ἐκ τούτων ὁ πρῶτος θεωρεῖται ὡς ἡ πρώτη ρωμαϊκὴ αὐθεντία εἰς τὸν τομέα τῆς πρακτικῆς ὑδραυλικῆς, χάρις εἰς τὸ ἔργον του De aquaeductis urbis Romae, καὶ ἕνα ἄλλο ἐκτεταμένον ἔργον ἐπὶ τῆς τοπογραφίας ἀπολεσθέν. Ὁ δεύτερος εἶναι σύγχρονος τοῦ Frontinus, παλαίμαχος μιᾶς ἐκστρατείας γενομένης ὑπὸ τὸν Τραϊανόν, συγγράψας ἓν ἄλλο ἔργον τοῦ ἰδίου τύπου, ἐπίσης ἀπολεσθέν. Οἱ ἄλλοι εἶναι πρόσωπα τελείως ἄγνωστα, ἴσως δὲ καὶ ἀμφιβόλου ὑπάρξεως.

Ἡ ἐξέτασις τοῦ Κώδικος τούτου φανερώνει ὅτι ὅλοι ἐκεῖνοι, οἱ ὁποῖοι συνέγραψαν τὰ μέρη του, ἠκολούθησαν τὰ ἴχνη τοῦ Ἥρωνος (ἢ κάποιου ἀρχαιοτέρου συγγραφέως, ἀπὸ τὸν ὁποῖον πιθανῶς εἶχεν ἀντλήσει καὶ ὁ ἀλεξανδρινὸς γεωδαίτης). Μεταξὺ τῶν προβλημάτων, ποὺ περιέχονται εἰς τὸν Κώδικα, περιοριζόμεθα ν' ἀναφέρωμεν τὴν ἀναζήτησιν ὀρθογωνίου τριγώνου, τοῦ ὁποίου δίδεται ἡ ὑποτείνουσα α καὶ τὸ ἐμβαδὸν Α. Πρόκειται κατ' οὐσίαν περὶ τῆς λύσεως ἑνὸς συστήματος τῆς μορφῆς:

$$x^2 + y^2 = \alpha^2$$

$$xy = 2A,$$

ἡ ὁποία δὲν ἀπαντᾶται εἰς τὸν Διόφαντον. Τὸ σύστημα τοῦτο ἀνάγεται εἰς τὸ ἰσοδύναμον:

$$x + y = \pm\sqrt{\alpha^2 + 4A}$$

$$x - y = \pm\sqrt{\alpha^2 - 4A},$$

ἐκ τοῦ ὁποίου ὁ Nipsus — ὑπὸ τὸ ὄνομα τοῦ ὁποίου ἔχει καταχωρηθῆ τὸ πρόβλημα — ἐξάγει τὰς ἁρμοζούσας τιμὰς τῶν ἀγνώστων εἰς μίαν εἰδικὴν περίπτωσιν.

Ἐνῷ τὸ μεγαλύτερον μέρος τῶν περιεχομένων τοῦ Κώδικος στερεῖται πρωτοτυπίας, χωρὶς ὅμως νὰ περιέχῃ ἀνακριβείας, ὑπάρχει ἐν τούτοις ἕνα χωρίον, τὸ ὁποῖον δὲν ἀποδεικνύει παρὰ ἔλλειψιν νοημοσύνης ἐκ μέρους ἐκείνου ποὺ τὸ ἔγραψεν. Ἐννοοῦμεν τὸ χωρίον ἐκεῖνο, ὅπου ὁ συγγραφεὺς διὰ νὰ ὑπολογίσῃ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου δεδομένης πλευρᾶς ἀνατρέχει εἰς τὴν ἔκφρασιν, ποὺ εἶναι ἤδη γνωστὴ ἀπὸ τῶν χρόνων τοῦ Ὑψικλέους, τῶν πολυγώνων ἀριθμῶν. Αὐτὸ εἶναι τὸ πρῶτον αὐθεντικὸν χονδροειδὲς σφάλμα ἐξ ὅσων ἀπαντῶνται εἰς τὰ μαθηματικὰ κείμενα.

Εἰς ἀντιστάθμισμα, τρόπον τινα, εὑρίσκομεν εἰς τὸν ἴδιον Κώδικα, ἐκτὸς τῶν γνωστῶν ἐκφράσεων διὰ τὸ ἄθροισμα τῶν διαδοχικῶν ἀκεραίων

καὶ διὰ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των, διὰ πρώτην φορὰν τὴν ἀνάλογον ἔκφρασιν διὰ τὸ ἄθροισμα τῶν κύβων:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

Μολονότι ληφθεῖσα ἴσως ἀπὸ ἄλλο ἑλληνικὸν ἔργον, γραφὲν εἰς συμπλήρωσιν ἢ σχολιασμὸν τῆς Ἀριθμητικῆς τοῦ Νικομάχου (§ 86), ἐντούτοις ἡ ἔκφρασις αὕτη ἤξιζε ν' ἀναγραφῇ ἐδῶ ὡς μία μοναδικὴ προσθήκη εἰς τὰς μαθηματικὰς γνώσεις, τὰς ὁποίας δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ἀπὸ τὰ κατάλοιπα τῶν ρωμαίων εἰδικῶν περὶ τὴν τοπογραφίαν.

Τὰ ἔργα τῶν μετρίων τούτων ὑπαλλήλων, ἐστερημένα πρωτοτυπίας καὶ μὴ ἔχοντα ἀξιώσεις, ἐφαίνοντο προωρισμένα νὰ χρησιμεύσουν ἀποκλειστικῶς ὡς βοηθήματα τῶν ὑπαλλήλων εἰς τὰς νέας ἐπικρατείας, αἱ ὁποῖαι ἀνέκυψαν ἐπὶ τῶν ἐρειπίων τῆς ρωμαϊκῆς αὐτοκρατορίας. Ἀλλὰ μέσα εἰς τὴν ὠχρὰν ἀθλιότητα τῶν χρόνων, τοὺς ὁποίους πρόκειται μετ' ὀλίγον νὰ ἐξετάσωμεν, τὰ ἔργα αὐτὰ ἦσαν ἐν τούτοις προωρισμένα νὰ γίνουν περιζήτητα ἀκόμη καὶ ἀπὸ ἐκείνους, οἱ ὁποῖοι, λόγῳ ἀνωτέρας πνευματικῆς ἀναπτύξεως, ἐκλήθησαν νὰ καταλάβουν ἐξεχούσας θέσεις εἰς τὰς ἰθυνούσας τάξεις τῆς νέας κοινωνίας, ἥτις διεμορφώνετο ἐπὶ τῶν ἐρειπίων τῆς αὐτοκρατορίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VIII

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΕΙΣ ΤΗΝ ΕΥΡΩΠΗΝ ΚΑΤΑ ΤΟΥΣ ΣΚΟΤΕΙΝΟΥΣ ΧΡΟΝΟΥΣ*

Κασσιόδωρος, Βοήθιος, Ἰσίδωρος

105. Μὲ τὴν ἀνακήρυξιν τοῦ Ὀδοάκρου εἰς «βασιλέα φυλῶν» (rex gentium), ἡ ὁποία ἔλαβε χώραν εἰς τὴν Pavia τὴν 23ην Αὐγούστου τοῦ ἔτους 476, κατελύθη ἐπισήμως ἡ Ρωμαϊκὴ Αὐτοκρατορία τῆς Δύσεως καὶ ἐγκαινιάζεται ἡ περίοδος τῶν βαρβάρων (Ἔρουλοι, Γότθοι, Λογκοβάρδοι) καὶ ἡ θλιβερὰ ἐποχὴ τῶν ξένων κατακτήσεων ἐν Ἰταλίᾳ, περίοδος κατὰ τὸ μέγιστον μέρος τῆς ὁποίας ὁ λατινικὸς πολιτισμὸς εὑρέθη εἰς τὴν ἀνάγκην νὰ διεξαγάγῃ ἀγῶνας τραγικοὺς καὶ ὄχι πάντοτε νικηφόρους ἐναντίον τοῦ σκοταδισμοῦ φυλῶν ἀγροίκων καὶ ἀμαθῶν,

«τῶν ὁποίων ἀνδρεία ἦταν τὸ πλῆθος,
φρόνησις ἡ ἐπιθετικὴ μανία,
δίκαιον τὸ αἷμα, καὶ δόξα των
ἡ ἔλλειψις κάθε ἀνθρωπισμοῦ».

Δὲν εἶναι ἄσχετα μὲ τὴν ἱστορίαν μας δύο μακρυνὰ ἐπεισόδια τῆς θλιβερᾶς ἐκείνης ἐποχῆς, πρωταγωνισταὶ τῶν ὁποίων ὑπῆρξαν δύο ὀνομαστοὶ ἄνδρες, διαδραματίσαντες κάποιον σημαίνοντα ρόλον εἰς τὴν ἱστορίαν τοῦ πολιτισμοῦ. Πρόκειται διὰ τὸν Μάγνον Αὐρήλιον Κασσιόδωρον (Cassiodorus, γενν. περίπου τὸ 475, ἀποθ. τὸ 570) καὶ τὸν Ἀνίκιον Μάνλιον Σεβερῆνον Βοήθιον (Boethius, γενν. μεταξὺ 480 καὶ 482, ἀποθ. 524).

Ὁ πρῶτος, καταγόμενος ἐκ Νοτίου Ἰταλίας, κατὰ τὸ ἔτος 500, ὅτε ἦτο μόλις εἰκοσαετής, προσελήφθη ὡς ἰδιαίτερος γραμματεὺς τοῦ Θευδερίχου, ὀλίγον μετὰ τὴν στέψιν τούτου ὡς βασιλέως τῶν Γότθων καὶ ὑπῆρξε σύμβουλος αὐτοῦ, μὲ μεγάλην ἐπιρροήν, μέχρι τοῦ θανάτου τοῦ ἡγεμόνος του. Ἀπεσύρθη κατόπιν εἰς τὸ μοναστήριον τοῦ Montecassino,

* Κατὰ τὴν περίοδον ταύτην ἐξηκολούθησεν ἡ χρῆσις τῆς γραπτῆς ἀριθμήσεως τῶν Ρωμαίων, τροποποιηθεῖσα κατὰ διαφόρους τρόπους καὶ κατὰ τὸ μᾶλλον ἢ ἧττον ἐπιτυχῶς. Λεπτομέρειαι σχετικαὶ δύνανται νὰ ληφθοῦν ἀπὸ τὸ ἄρθρον τοῦ Smith (βλ. ὑποσημείωσιν § 100).

διὰ ν' ἀφοσιωθῇ ἀποκλειστικῶς εἰς τὴν μελέτην καὶ τὴν περισυλλογήν. Καρπὸς τῶν ἐπιμόνων ἐκείνων κόπων του εἶναι μία ἐγκυκλοπαιδεία εἰς ἑπτὰ βιβλία, φέρουσα τὸν τίτλον De artibus ac disciplinis liberalium literarum (περὶ τεχνῶν καὶ ἐπιστημῶν ἐλευθέρας παιδείας), ἡ ὁποία παρουσιάζει καταφανῆ ὁμοιότητα μὲ τὸ ἀνάλογον ἔργον τοῦ Μαρκιανοῦ Καπέλλα (§102), καθ' ὅσον πραγματεύεται κατὰ σειρὰν τὰ ἑξῆς θέματα: Γραμματικήν, Ρητορικήν, Διαλεκτικήν· κατόπιν, 'Αριθμητικήν, Μουσικήν, Γεωμετρίαν καὶ 'Αστρονομίαν (δηλαδὴ κλάδους ἀποτελοῦντας τὴν τρίοδον καὶ τετράοδον). Εἶναι ἕνα ἀπὸ τὰ πολυάριθμα ἐκεῖνα ἀπανθίσματα, εἰς τὰ ὁποῖα ὁ συγγραφεύς, μὴ ἔχων τὴν δύναμιν νὰ ἐξερευνήσῃ νέας χώρας, περιορίζεται εἰς τὴν περιγραφὴν ἐκείνων, τὰς ὁποίας ἄλλοι ἀνεκάλυψαν.

Πολὺ ὑψηλοτέρα ὑπῆρξεν ἡ διάνοια, ἀλλὰ πολὺ σκληροτέρα ὑπῆρξεν ἡ τύχη τοῦ Β ο η θ ί ο υ, ὁ ὁποῖος ἀποκαλεῖται δικαίως «ὁ τελευταῖος τῶν ἀρχαίων Ρωμαίων» καὶ θεωρεῖται ὡς ὁ πρῶτος τῶν σχολαστικῶν φιλοσόφων. Γεννηθεὶς εἰς τὴν Ρώμην ἀπὸ ἐξέχουσαν οἰκογένειαν καὶ παραμείνας ὀρφανὸς εἰς τρυφερὰν ἡλικίαν, ἐφείλκυσε τὴν προσοχήν, κατέκτησε τὴν συμπάθειαν καὶ ἐπέτυχε τὴν προστασίαν τοῦ πατρικίου Συμμάχου, τοῦ ὁποίου κατόπιν ἔγινε γαμβρός. 'Η φήμη τὴν ὁποίαν πολὺ ἐνωρὶς ἀπέκτησε, λόγῳ τοῦ πνεύματος καὶ τοῦ χαρακτῆρος του, ἔφθασεν εἰς τὰ ὦτα τοῦ Θευδερίχου, ὁ ὁποῖος τὸν ἐκάλεσεν εἰς τὴν ἰδιαιτέραν του ὑπηρεσίαν. Συκοφαντηθεὶς ὅμως ἀπὸ ἐμπαθεῖς αὐλοκόλακας, ζηλοτυποῦντας διὰ τὴν ἐπιρροήν, τὴν ὁποίαν ἤσκει οὗτος ἐπὶ τῆς πορείας τῶν δημοσίων πραγμάτων, ἐρρίφθη εἰς τὰς φυλακάς, ὅπου ὑπεβλήθη εἰς βασανιστήρια, τῶν ὁποίων ἡ περιγραφὴ προκαλεῖ τὸν τρόμον καὶ τὴν φρίκην ἐκ τῶν ὁποίων τέλος ἀπέθανε (524)*.

Δὲν εἶναι ὀλιγώτερον σκληρὰ ἡ τύχη, τὴν ὁποίαν εἶχε καὶ ὁ Σύμμαχος, τοῦ ὁποίου μοναδικὸν ἔγκλημα ὑπῆρξεν, ὅτι ἔκλαυσε δημοσίᾳ τὸν θάνατον ἑνὸς ἐνδόξου καὶ ἀτυχοῦς συγγενοῦς του.

Βαθὺς γνώστης τῆς ἑλληνικῆς γραμματείας ὁ Βοήθιος διεκήρυξε καὶ ἀνοικτὰ ὑπεστήριξε τὴν ἀνάγκην ἐπιστροφῆς τῆς ἀνθρωπότητος εἰς τὰς

---

* 'Ενεταφιάσθη εἰς Παβίαν καὶ εἰς τὴν ἐκκλησίαν τοῦ 'Αγ. Πέτρου εἰς τὸν Χ ρ υ σ ο ῦ ν Ο ὐ ρ α ν ό ν, ὅπως διαμνημονεύει ὁ Dante εἰς τοὺς ἀκολούθους στίχους:

«'Η ἅγια ψυχή, πού τὴν ψευτιά τοῦ κόσμου
δείχνει σὲ ὅποιον νογάει καλά τί λέει·
τὸ σῶμα ποὖθε διόξαντη, θαμμένο
στὴ Χρυσόθολη· κι' ἦρθεν ἐδῶ ν' ἀρνέψει
ἀπὸ τὴν ἐξοριά καὶ τὸ μαρτύριο»
(Παράδεισος Χ, 127-9, κατὰ μετάφρασιν Ν. Καζαντζάκη)

'Ο θεῖος ποιητὴς τοποθετεῖ τὸν Βοήθιον μεταξὺ τῶν δώδεκα μεγίστων λογίων τῆς Θεολογίας.

γνησίας ἑλληνικὰς πηγὰς καὶ λέγεται, ὅτι εἰργάσθη πρὸς αὐτὴν τὴν κατεύθυνσιν (ὅσον ἀφορᾷ τὰς ἀκριβεῖς ἐπιστήμας) μεταφράζων εἰς λατινικὴν γλῶσσαν μερικὰ ἔργα ταῦ Πυθαγόρου (;), τοῦ Πτολεμαίου, τοῦ Νικομάχου καὶ τοῦ Εὐκλείδου.

Ἡ πρώτη καὶ ἀναμφισβήτητος συμβολὴ τοῦ Βοηθίου, ἂν ὄχι εἰς τὴν πρόοδον, τοὐλάχιστον εἰς τὴν διάδοσιν τῶν μαθηματικῶν γνώσεων, ἀντιπροσωπεύται ἀπὸ τὸ ἔργον του Μαθήματα ἀριθμητικῆς, περὶ τοῦ ὁποίου εἶναι καθῆκον μας νὰ ὁμιλήσωμεν δι' ὀλίγων, ἂν καὶ ὅσοι γνωρίζουν τὸν Νικόμαχον δὲν πρόκειται νὰ εὕρουν εἰς τὸ ἔργον τοῦ Βοηθίου παρὰ ἐλάχιστα νέα πράγματα.

Ὁ Βοήθιος εἰς τὴν ἀρχὴν τῆς πραγματείας του διακρίνει τὰ ἀντικείμενα τῆς γνώσεώς μας εἰς «σύνολα» καὶ «μεγέθη», παρατηρεῖ δὲ ὅτι τὰ πρῶτα δύνανται νὰ θεωρηθοῦν μόνα ἢ ὁμοῦ μὲ ἄλλα πράγματα, ἐνῷ τὰ δεύτερα δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ἐν ἠρεμίᾳ ἢ ἐν κινήσει. Περὶ τῶν πρώτων πραγματεύονται ἡ «Ἀριθμητική» (ἡ ὁποία ἐξετάζει τὰ σύνολα καθ' ἑαυτὰ) καὶ ἡ «Μουσική» (ἡ ὁποία τὰ ἐξετάζει ἐν συναφείᾳ πρὸς ἄλλας ὀντότητας), ἐνῷ περὶ τῶν μεγεθῶν ἀσχολοῦνται ἡ «Γεωμετρία» καὶ ἡ «Ἀστρονομία», ἐκ τῶν ὁποίων ἡ πρώτη ἐξετάζει τὰ μεγέθη ἐν ἠρεμίᾳ, ἡ δευτέρα ἐν κινήσει. Μεταξὺ τῶν τεσσάρων τούτων κλάδων (οἱ ὁποῖοι ἀποτελοῦν ὅ,τι ὁ Βοήθιος ἀποκαλεῖ quadrivium, — τετραόδιον ἢ τετράοδος —, ὡς πρόγραμμα τῆς ἐπιστημονικῆς παιδείας, ἐνῷ ἡ Γραμματική, Ρητορικὴ καὶ Διαλεκτικὴ ἀπετέλουν τὸ trivium — τρίοδος ἢ τριόδιον — ἤτοι τὸ πρόγραμμα τῆς κλασσικῆς παιδείας) τὴν πρώτην θέσιν διεκδικεῖ ἡ «Ἀριθμητική», καθ' ὅσον ἡ ἔννοια τοῦ ἀριθμοῦ ὑπεισέρχεται καὶ εἰς τοὺς ἄλλους τρεῖς. Ἐπειδὴ δὲ ἡ μελέτη τῆς κινήσεως τῶν ἄστρων ἀπαιτεῖ γεωμετρικὰς γνώσεις, ὁ Βοήθιος συμπεραίνει, ὅτι ἡ τάξις κατὰ τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ διδάσκωνται τὰ μαθήματα αὐτὰ εἶναι ἡ ἀκόλουθος: Ἀριθμητική, Μουσική, Γεωμετρία, Ἀστρονομία. Σκοπός του ἦτο προφανῶς νὰ συγγράψῃ μεθοδικὴν ἀνάπτυξιν δι' ἕνα ἕκαστον κλάδον χωριστά. Ἔφθασαν πράγματι μέχρις ἡμῶν οἱ δύο πρῶτοι, ἐκ τῶν ὁποίων καταφαίνεται ἡ πλήρης προσκόλλησις τοῦ συγγραφέως εἰς τὰς ἰδέας τῶν ἀνακαινιστῶν τοῦ Πυθαγόρου καὶ τοῦ Πλάτωνος.

Ἂν καὶ ἡ Ἀριθμητικὴ τοῦ Βοηθίου δὲν ἀποτελεῖ μετάφρασιν ἐκείνης τοῦ Νικομάχου (θὰ ἦτο ἄλλωστε περιττή, ἀφοῦ τοιαύτη ἐγένετο ἤδη ἀπὸ τὸν Ἀπουλαῖον, (§ 102), ἐν τούτοις δὲν εἶναι κατ' οὐσίαν παρὰ μία ἀνακατασκευὴ τοῦ περιεχομένου της, ἀφοῦ ἐπαναλαμβάνει τὰς μακρὰς διερευνήσεις ἐπὶ τῶν διαφόρων κατηγοριῶν τῶν ἀριθμῶν καὶ τῶν ἰδιοτήτων των ὡς καὶ τῶν ἀναλογιῶν, αἱ ὁποῖαι δύνανται νὰ σχηματισθοῦν μὲ ἀκεραίους ἀριθμούς, πράγματα τὰ ὁποῖα συνηντήσαμεν ἤδη εἰς τοὺς Ἕλληνας ἀριθμητικοὺς καὶ ἰδίως εἰς τὸν Νικόμαχον τὸν Γερασηνόν.

106. Ὑπάρχουν ἄραγε ἢ τοὐλάχιστον ἐγράφησαν αἱ ἀνάλογοι πραγματεῖαι τῶν δύο ἄλλων κλάδων τῆς τετραόδου; Ὅσον ἀφορᾷ τὴν Ἀστρονομίαν ἡ ἀπάντησις εἶναι ὁμοφώνως ἀρνητική, καθ' ὅσον δὲν εὑρέθη μέχρι σήμερον κείμενον τοιούτου περιεχομένου, φέρον τὸ ὄνομα τοῦ ἀτυχοῦς φιλοσόφου.

Πολὺ δυσχερέστερον εἶναι τὸ ἀνάλογον ζήτημα ὅσον ἀφορᾷ τὴν Γεωμετρίαν, διότι πολλὰ χειρόγραφα εἶναι γνωστά, ἀναγόμενα εἰς τὸν XI αἰῶνα, τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦνται ἀπὸ γεωμετρικὴν ὕλην, κατανεμημένην εἰς δύο βιβλία, ἀποδιδόμενα ἀκριβῶς εἰς τὸν Βοήθιον. Εἰς τὸ βιβλίον I ἀπαντῶνται κυρίως λατινικαὶ μεταφράσεις, σχεδὸν κατὰ λέξιν, τῶν ὁρισμῶν, μὲ τοὺς ὁποίους ἀρχίζουν τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου, καὶ τῶν ἐκφωνήσεων τῶν προτάσεων τῶν περιεχομένων εἰς τὰ πρῶτα τέσσαρα βιβλία τῆς μεγάλης ἐκείνης συγγραφῆς. Αἱ ἐκφωνήσεις συνοδεύονται ἀπὸ τὰ σχετικὰ σχήματα, οὐχὶ ὅμως ἀπὸ ἐπεξηγήσεις, σχόλια ἢ ἀποδείξεις. Ἀξίζει νὰ σημειωθῇ, ὅτι οἱ ἀρχαιότεροι ἐκδόται τοῦ ἐν λόγῳ ἀπανθίσματος ἔθεσαν εἰς τὴν εἰκονογράφησιν τῆς προτάσεως XI τοῦ IV βιβλίου (εἰς δοθέντα κύκλον νὰ ἐγγραφῇ κανονικὸν πεντάγωνον) παρὰ τὸ κυρτὸν πεντάγωνον καὶ ἕνα ἀστεροειδές. Τὸ γεγονὸς τοῦτο ὡδήγησε μερικοὺς εἰς τὸ συμπέρασμα, ὅτι ὁ Βοήθιος ὑπῆρξεν ὁ πρῶτος ποὺ διέδωσε τὴν γνῶσιν ἑνὸς σχήματος, μελετηθέντος ἤδη ἀπὸ τὸν Πυθαγόραν (§ 23), περιελθόντος ὅμως κατόπιν εἰς λήθην. Παρὰ ταῦτα, ἡ ἐξέτασις τῶν καλυτέρων κωδίκων, εἰς τοὺς ὁποίους περιέχεται τὸ ἔργον τοῦ Βοηθίου, ἀπέδειξεν, ὅτι τὸ ἀστεροειδὲς πολύγωνον προσετέθη αὐθαιρέτως ἀπὸ ἀναξιοπίστους ἀντιγραφεῖς, οἱ ὁποῖοι ἤντλουν ἐξ ἄλλων πηγῶν.

Τὸ βιβλίον II τῆς οὕτω καλουμένης Γεωμετρίας τοῦ Βοηθίου συνίσταται εἰς γνώσεις τοπογραφίας, αἱ ὁποῖαι συμπίπτουν, εἰς τὰς ἀληθείας καὶ εἰς τὰς πλάνας, μὲ ὅσα περιέχονται εἰς τὸν Ἀρκεριανὸν Κώδικα (Codex Arcerianus). Συνάγεται ἐκ τούτου ὅτι εὑρισκόμεθα ἐνώπιον ἑνὸς ἔργου στερουμένου ὀργανικῆς ἑνότητος, εἰς τὸ ὁποῖον ὁ δημιουργός του ἔδωσεν ὡς συγγραφέα τὸν Βοήθιον, εἴτε ἀπὸ μίαν ἀφελῆ ἀπροσεξίαν, εἴτε διὰ νὰ θέσῃ τὸ βιβλίον του ὑπὸ τὴν προστασίαν ἑνὸς ἐνδόξου ὀνόματος, μὲ τὴν αὐταπάτην ὅτι μία σημαία ἄσπιλος θὰ ἐπροστάτευεν ἐπαρκῶς ἕνα λαθραῖον ἐμπόρευμα καὶ ὅτι μία ἀδιαφιλονίκητος αὐθεντία θ' ἀπέδιδεν εἰς τὸ ἔργον τὴν σπουδαιότητα, τῆς ὁποίας τοῦτο ἐστερεῖτο.

Ἐν κατακλεῖδι, τὸ ἔργον μὲ τὸ ὁποῖον ἀσχολούμεθα ἔχει ἐσωτερικὴν ἀξίαν τόσον πενιχράν, ὥστε ἀσφαλῶς δὲν θὰ εἶχεν ἑλκύσει τόσον πολὺ τὴν προσοχὴν τῶν ἱστορικῶν, ἐὰν δὲν περιεῖχεν εἰς τὸ τέλος τοῦ πρώτου βιβλίου μίαν σελίδα, ἡ ὁποία, ἐὰν εἶναι αὐθεντική, δύναται ν' ἀναγάγῃ τὴν ἐπινόησιν τῶν ἐν χρήσει σήμερον συμβόλων διὰ τὴν γραφὴν τῶν

ἀριθμῶν 1, 2, 3, . . . , 9 (ὄχι τὸ 0), εἰς τοὺς μαθητὰς τοῦ Πυθαγόρου, ὄχι βεβαίως ἐκείνους οἱ ὁποῖοι συνηθροίζοντο διὰ ν' ἀκούσουν τὸν λόγον του, ἀλλὰ τοὺς μεταγενεστέρους πιστοὺς τῶν δογμάτων του. Χωρὶς νὰ ἐπιμείνωμεν εἰς τὴν ἄποψιν ὅτι οἱ ἐν λόγῳ χαρακτῆρες ἐνδέχεται νὰ προσετέθησαν ἀπὸ κάποιον μεταγενέστερον ἀντιγραφέα, παρατηροῦμεν, ὅτι δὲν ἀποκλείεται τὰ σύμβολα αὐτὰ νὰ ἦλθον ἐξ Ἰνδιῶν εἰς τὴν Εὐρώπην, μέσῳ ἐμπορευομένων περιηγητῶν, οἱ ὁποῖοι μὲ τὰς συναλλαγάς των διετήρουν πάντοτε ζωηρὰς σχέσεις μεταξὺ Ἀνατολῆς καὶ Δύσεως. Ἐπειδὴ ὅμως εἰς τὴν οὕτω καλουμένην Γεωμετρίαν τοῦ Βοηθίου γίνεται ὑπαινιγμὸς διὰ μίαν μέθοδον ἀναπτυχθεῖσαν ἀπὸ ἐμβριθεῖς μελετητάς, δὲν εἶναι διόλου ἀπίθανον τὰ σύμβολα αὐτὰ νὰ ἐπενοήθησαν εἰς τὴν Ἑλλάδα, μέσα εἰς τὰ ἐντευκτήρια τῶν νεοπυθαγορείων, καὶ νὰ διεδόθησαν ἐκεῖθεν πρὸς ὅλας τὰς διευθύνσεις, ὅπως ἀκριβῶς διαδίδονται τὰ κύματα τὰ παραγόμενα εἰς τὴν ἐπιφάνειαν ἠρεμούντων ὑδάτων ἀπὸ τὴν πτῶσιν ἑνὸς λίθου.

Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον εἶναι δυνατὸν νὰ ἔγιναν γνωστὰ εἰς τοὺς Πέρσας, οἱ ὁποῖοι πιθανῶς τὰ ἐδίδαξαν εἰς τοὺς Ἰνδοὺς καὶ κατόπιν εἰς τοὺς Ἄραβας μετὰ τὴν μουσουλμανικὴν κατάκτησιν. Ἀπὸ τοὺς Ἄραβας τῆς Ἀνατολῆς θὰ ἐπέρασαν ἴσως εἰς τοὺς Βυζαντινοὺς καὶ τοὺς Ἄραβας τῆς Δύσεως, διὰ μέσου δὲ τῶν τελευταίων εἰσέδυσαν εἰς τὴν Ἰσπανίαν, ὅπου τέλος περιῆλθον εἰς γνῶσιν τοῦ Γκερβέρτου (§ 110), ὁ ὁποῖος τόσον εἰργάσθη διὰ τὴν διάδοσιν αὐτῶν εἰς τὴν Εὐρώπην. Ἐκ τῆς ἰδίας πηγῆς τὰ ἔμαθεν ἄραγε καὶ ὁ Βοήθιος; Τίποτε δὲν ἐπιβάλλει νὰ τὸ ἀποκρούσωμεν, ἀλλὰ καὶ τίποτε δὲν ὑπάρχει εἰς τὸ βιβλίον, ποὺ φέρει τὸ ὄνομά του, ἐπιτρέπον νὰ τὸ βεβαιώσωμεν.*

Ἐξ ἄλλου, ἐπὶ τῆς αὐθεντικότητος τοῦ κειμένου ἀνεφύησαν μακραὶ διαφωνίαι, αἱ ὁποῖαι λέγομεν συνήθως, ὅτι ἀποτελοῦν τὸ «Βοηθιακὸν ζήτημα». Δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι μετὰ τὸν θάνατον τοῦ M. Chasles (1793-1880), ὁ ὁποῖος ὑπῆρξεν ὁ γενναιότερος ὑποστηρικτὴς τῆς αὐθεντικότητος, τὸ ζήτημα τοῦτο ἐτερματίσθη μὲ ὁμόφωνον ἀναγνώρισιν ὅτι ἡ οὕτω λεγομένη Γεωμετρία τοῦ Βοηθίου δὲν ἔχει δικαίωμα νὰ φέρῃ τὸ ὄνομα ἐκείνου, ὁ ὁποῖος ἔγραψε τὸ Philosophiae consolatio. Καὶ διὰ νὰ πείσωμεν

* Ἐπὶ τοῦ ζητήματος τῆς προελεύσεως τοῦ ἐν χρήσει σήμερον ἀριθμητικοῦ συστήματος ἔχομεν ἐμπεριστατωμένας ἐργασίας τοῦ N. Bubnow· τὸ μεγαλύτερον μέρος τῶν σχετικῶν δημοσιευμάτων του ἔχουν γραφῆ εἰς ρωσικὴν γλῶσσαν. Ἐξαίρεσιν ἀποτελεῖ τὸ βιβλίον, ποὺ φέρει τὸν τίτλον Arithmetische Lebstständigkeit der europäischen Kultus (Berlin, 1944). Τὸ πλῆθος ὅμως τῶν παραπομπῶν εἰς ἄλλα ἔργα, τὰ ὁποῖα γενικῶς εἶναι ἀπρόσιτα, καθιστᾷ δύσκολον νὰ κρίνωμεν κατὰ πόσον εἶναι ἀποδεκτὴ ἡ θέσις ἡ ὑποστηριζομένη ἐκεῖ.

τὸν ἀναγνώστην, ὅτι τὸ συμπέρασμα τοῦτο ὑπαγορεύεται ὑπὸ τῆς φρονήσεως, ἀναφέρομεν τὸ γεγονὸς ὅτι ἕνα βιβλίον, γραφὲν μεταξὺ 1163 καὶ 1168, φέρει τὸν ἀκόλουθον τίτλον: «Εἰς τὸ βιβλίον τοῦτο περιέχεται ὁλόκληρος ἡ τετράοδος, δηλαδὴ ἡ Ἀριθμητικὴ τοῦ Βοηθίου, ἡ Ἀστρονομία, ἡ Μουσικὴ τοῦ Βοηθίου, ἡ Γεωμετρία τοῦ Εὐκλείδου» (Monatshefte f. Math. u. Phys., t VIII, 1897, σ. 194). Ἐὰν λοιπὸν ὁ Βοήθιος εἶχε γράψει τὸ προτεινόμενον ἔργον εἰς τὴν τετράοδον, διὰ ποῖον λόγον θ' ἀπεκλείοντο ἀπὸ τὸ ἀνωτέρω βιβλίον τὰ τμήματα ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα εἶχεν οὗτος ἀφιερώσει εἰς τὴν Γεωμετρίαν καὶ τὴν Ἀστρονομίαν;

Κατὰ τὴν γνώμην μας, ἡ οὕτω καλουμένη Γεωμετρία τοῦ Βοηθίου πρέπει νὰ θεωρηθῇ ὡς ἕνα συμπίλημα, συντεθὲν πέντε αἰῶνας μετὰ τὸν θάνατόν του ἀπὸ πρόσωπον χαμηλῆς συνειδήσεως καὶ πτωχῆς διανοίας, διὰ τὸ ὁποῖον ἡ εἰς τὴν λήθην παραμονὴ τοῦ ὀνόματός του εἶναι μία πολὺ ἐλαφρὰ τιμωρία. Δὲν συντρέχει λοιπὸν λόγος νὰ ἐνδιατρίψωμεν περισσότερον ἐπὶ τοῦ ἔργου ἑνὸς πλαστογράφου (κατά τινας πρόκειται περὶ ἑνὸς μοναχοῦ τῆς Λωρραίνης τοῦ XI αἰῶνος), τοῦ ὁποίου ἡ πρᾶξις δύναται ἴσως νὰ εὕρῃ κάποιαν δικαιολογίαν, μόνον ἂν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν, ὅτι ὁ σεβασμὸς πρὸς τὰ προϊόντα τοῦ πνεύματος ἀποτελεῖ συναισθηματικὸν στοιχεῖον τῶν νεωτέρων χρόνων.

Ἀλλὰ πρὶν τὸ ἐγκαταλείψωμεν ἀξίζει τὸν κόπον νὰ ἐπισημάνωμεν τὴν παρουσίαν δύο λέξεων digitus (δάκτυλος) καὶ articulus (ἄρθρωσις), αἱ ὁποῖαι χρησιμοποιοῦνται διὰ νὰ δηλώσουν ἀντιστοίχως ἕνα ἀριθμὸν μικρότερον τοῦ 10, ἢ ἕνα πολλαπλάσιον τοῦ 10, καὶ τὴν λεγομένην «πυθαγόρειον τράπεζαν», ὅπως ὠνομάζετο ὁ ἄβαξ (κατὰ κακὴν ἑρμηνείαν, ἐθεωρήθη μετέπειτα ὁ ὅρος οὗτος ταυτόσημος πρὸς τὸν πίνακα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ). Δὲν πρέπει δὲ νὰ παρασιωπήσωμεν, ὅτι κατὰ τὴν διάρκειαν τῶν ἐριστικῶν συζητήσεων περὶ τῆς αὐθεντικότητος τῆς εἰς τὸν Βοήθιον ἀποδιδομένης Γεωμετρίας, ἐνεφανίσθη εἰς τὴν ἱστορίαν ἕνα νέον πρόσωπον, κάποιος Λατῖνος Ἀρχύτας, ἐφευρέτης τῆς μεθόδου κατασκευῆς ὀρθογωνίου τριγώνου μὲ ἀκεραίους ἀριθμούς, τὴν ὁποίαν μέθοδον ἀπεδώσαμεν ἤδη εἰς τὸν Πλάτωνα (§ 85). Δὲν ἐβράδυναν ὅμως ν' ἀναγνωρίσουν εἰς τὸ πρόσωπον τοῦτο μίαν ἁπλῆν μεταμφίεσιν τοῦ διασήμου Ταραντίνου, εἰς τὸν ὁποῖον ἴσως νὰ ὀφείλεται ἡ ἐπινόησις τῆς ἐν λόγῳ μεθόδου.

Τέλος εἶναι σκόπιμον νὰ τονίσωμεν, ὅτι τὸ ὄνομα τοῦ Βοηθίου (ὅπως ἄλλωστε τοῦ Πυθαγόρου καὶ τοῦ Γκερβέρτου) ἔχει συνδεθῆ μὲ ἕνα ἀριθμητικὸν παίγνιον καλούμενον «ἀριθμομαχία»[50], περὶ τοῦ ὁποίου πολλὰ ἐγράφησαν κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ Μεσαίωνος. Ἐὰν ἡ παράδοσις εἶναι σύμφωνος πρὸς τὴν ἀλήθειαν, ὁ Βοήθιος ἐπενόησε καὶ ἐχρησιμοποίησε

τοῦτο, διὰ νὰ εὕρῃ τρόπον νὰ ὑποφέρῃ τὰς μακρὰς ὥρας τῆς παραμονῆς του εἰς τὴν φυλακήν*.

107. Ἡ μελέτη τῶν μαθηματικῶν ἔργων ἑνὸς προσώπου μεγίστης φήμης, ὅπως ἦτο ὁ Βοήθιος, ἐν συνδυασμῷ μὲ τὴν διαπίστωσιν παντελοῦς ἐλλείψεως πρωτοτυπίας, προκαλεῖ μίαν τόσον λυπηρὰν διάψευσιν ἐλπίδων, ὥστε δύναται κανεὶς εὐκόλως, παρασυρόμενος ἀπὸ τὸν πειρασμόν, νὰ συγκαταριθμήσῃ μεταξὺ τῶν παρανόμως ἰδιοποιουμένων φημῶν καὶ ἐκείνην τοῦ ἀτυχοῦς θύματος τοῦ Θευδερίχου. Πρόκειται περὶ ἑνὸς συναισθήματος, τὸ ὁποῖον συχνὰ δοκιμάζομεν, ὅταν εὑρισκώμεθα ἐνώπιον τῶν σπανίων ἐκείνων προσωπικοτήτων, τῶν ὁποίων ἡ φήμη ἠδυνήθη νὰ διαπεράσῃ τὰ μεσαιωνικὰ σκότη καὶ νὰ φθάσῃ μέχρις ἡμῶν. Καθῆκον ἔχομεν ν' ἀντιστῶμεν εἰς παρόμοιον συναίσθημα, διότι τοῦτο εἶναι ἀποτέλεσμα ἀνακριβοῦς ἐκτιμήσεως τῶν συνθηκῶν τῆς ζωῆς εἰς μίαν ἀπὸ τὰς σκοτεινοτέρας ἐποχάς, ποὺ ἀναφέρει ἡ ἱστορία.** Ἀρκεῖ νὰ σκεφθῶμεν πράγματι, ὅτι τὴν ἐποχὴν ἐκείνην τὸ ν' ἀφοσιωθῇ κανεὶς εἰς τὴν ἀπερίσπαστον ἔρευναν τῆς ἀληθείας δὲν ἦτο κάτι εὐνοούμενον ἀπὸ τὴν κοινὴν γνώμην ἢ τὰς ἀποκατεστημένας ἀρχάς, ἀλλὰ κάτι τὸ ὁποῖον ἀπῄτει ἀπὸ τοὺς σοφοὺς νὰ πλεύσουν θαρραλέως ἐναντίον τοῦ ρεύματος. Διὰ τοῦτο ὅσοι ᾐσθάνοντο ἐκ φύσεως κλίσιν πρὸς τὴν ἐπιστημονικὴν ἔρευναν ἔπρεπε νὰ ἦσαν διστακτικοί, προκειμένου νὰ ριψοκινδυνεύσουν εἰς μίαν ὁδόν, ἡ ὁποία ὄχι μόνον δὲν θὰ προσεπόριζεν εἰς αὐτοὺς τιμὰς καὶ δόξαν, ἀλλ' οὐδὲ μικρὸν κύκλον ἀκροατῶν ἢ ἀναγνωστῶν. Ἐπὶ πλέον αἱ ἀλλεπάλληλοι ἐπιδρομαὶ τῶν βαρβάρων, οἱ πόλεμοι, αἱ λεηλασίαι καὶ τὰ τοιαῦτα, ἠμπόδιζον τὴν διαμόρφωσιν τοῦ ἠρέμου ἐκείνου περιβάλλοντος, τὸ ὁποῖον θεωρεῖται ἀπαραίτητος προϋπόθεσις διὰ μίαν ἄνετον ἐξερεύνησιν τῆς ἀληθείας. Ὅσοι εἶναι εἰς θέσιν, ἐπὶ τῶν ἡμερῶν μας, νὰ ἐκτιμήσουν τὰ καταστρεπτικὰ ἀποτελέσματα μιᾶς γενικῆς ἀναστατώσεως διαρκείας μικροτέρας τῶν πέντε ἐτῶν, δὲν θὰ ἐκπλαγοῦν διαπιστώνοντες παρόμοια ἀποτελέσματα, εἰς κλίμακα μάλιστα ἑκατονταπλασίαν, μιᾶς ἀναλόγου καταστάσεως πραγμάτων, διαρκείας δέκα περίπου αἰώνων. Ἐὰν δὲ σκεφθῶμεν ὅτι τὴν ἐποχὴν ἐκείνην ὁ διανοούμενος ἦτο

---

* Τὰ ἔργα τοῦ Βοηθίου συμβουλεύονται ἐπωφελῶς ὅσοι ἐνδιαφέρονται διὰ τὴν μαθηματικὴν ὁρολογίαν, τῆς ὁποίας ἐγίνετο χρῆσις εἰς τὰς λατινικὰς χώρας τῆς ἐποχῆς ἐκείνης. Ἀκριβῶς μὲ αὐτὸν τὸν σκοπόν, ἡ Ἀ ρ ι θ μ η τ ι κ ὴ τοῦ Βοηθίου ὑπεβλήθη εἰς μίαν ἀνάλυσιν ἀπὸ τὸν B. Veratti, καρπὸς τῆς ὁποίας ὑπῆρξεν ἡ ἐπιμελὴς πραγματεία του: Sopra la terminologia matematica degli scrittori latini (Mem. dell Accademia di Modeno, t. V, 1863).

** Ὁ Mischaud, ἕνας ἀπὸ τοὺς βαθυτέρους γνώστας τῆς ἱστορικῆς ταύτης περιόδου, ἐξέφρασε τὴν γνώμην, ὅτι ἡ ἀξία της ἔναντι τοῦ πολιτισμοῦ στηρίζεται εἰς τρία C.C.C: Canzoni, Cattedrali, Crociate (τραγούδια, μητροπόλεις, σταυροφορίαι).

δέσμιος τῆς ἀνάγκης ν' ἀποκαταστήσῃ μίαν συμφωνίαν μεταξὺ τῶν ἐπιστημονικῶν του πορισμάτων καὶ τῶν ἀρχῶν ἐκείνων, αἱ ὁποῖαι ἐπιστεύοντο καὶ διεκηρύσσοντο ὡς θεῖαι ἀποκαλύψεις, θ' ἀντιληφθῶμεν τὸν λόγον διὰ τὸν ὁποῖον ἦσαν, κατ' ἀνάγκην, πολὺ ὀλίγα τὰ πρόσωπα ἐκεῖνα, ποὺ εἶχον τὸ θάρρος νὰ προκαλέσουν νέα ἐπεισόδια εἰς τὸν αἰώνιον ἀνταγωνισμὸν μεταξὺ ἐπιστήμης καὶ πίστεως.

Λαμβάνοντες λοιπὸν ὑπ' ὄψιν ὅλας αὐτὰς τὰς δυσμενεῖς περιστάσεις, δὲν δυνάμεθα παρὰ νὰ συμπεράνωμεν ὅτι ὁ Κασσιόδωρος, ὁ Βοήθιος καὶ οἱ ἄλλοι, μὲ τοὺς ὁποίους ἐν συνεχείᾳ θ' ἀσχοληθῶμεν, μὲ τὸ νὰ προσπαθήσουν καὶ νὰ ἐπιτύχουν νὰ κρατήσουν ἀνημμένην μίαν μικρὰν φλόγα ἐν μέσῳ φοβερᾶς λαίλαπος, εἶναι ἄξιοι μεγάλης τιμῆς καὶ εὐγνωμοσύνης ἐκ μέρους τοῦ πολιτισμοῦ, ἐὰν ὄχι μάλιστα μεγαλυτέρας τῆς ὀφειλομένης εἰς πολλοὺς μεγάλους, οἱ ὁποῖοι εἰς καλυτέρους καιροὺς ἐπέτυχον ν' αὐξήσουν διὰ τῆς πρωτοτύπου συμβολῆς των τὴν ἐπιστημονικὴν κληρονομίαν τῆς ἀνθρωπότητος.

108. Μεταξὺ τῶν προσώπων τούτων τῶν ἀξίων εὐγνωμοσύνης ποὺ ἔζησαν εἰς ἐποχὴν κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ Εὐρώπη εὑρίσκετο εἰς τὸ ναδὶρ τῆς παιδείας (μεταξὺ VI καὶ VII αἰῶνος), συναντῶμεν ἕνα Ἱσπανόν, γεννηθέντα εἰς Καρχηδόνα ἢ Σεβίλλην περὶ τὸ 560 καὶ ἀποθανόντα εἰς τὴν τελευταίαν ταύτην πόλιν κατὰ τὸ 663. Διατελέσας ἐπίσκοπος τῆς Σεβίλλης μέχρι τὸ 601, φέρεται συχνὰ ὑπὸ τὸ ὄνομα Ἰσίδωρος τῆς Σεβίλλης, κατὰ τὴν μεσαιωνικὴν συνήθειαν νὰ ὀνομάζουν τὰ ἐνδοξότερα πρόσωπα τῆς ἐκκλησίας ἐν συνδυασμῷ μὲ τὸν τόπον, ὅπου ἐσημείωσαν τὸ ἀπόγειον τῆς σταδιοδρομίας των. Τοῦ ἀνδρὸς τούτου, περιφήμου ὡς διανοουμένου καὶ ἐκπαιδευτικοῦ, ὑπάρχει ἕνα ἔργον, χαρακτῆρος ἐγκυκλοπαιδικοῦ, φέρον τὸν τίτλον Origines (ἀρχαί). Τὸ ἔργον εἶναι ἀνάλογον πρὸς ἐκεῖνα τοῦ Καπέλλα καὶ Κασσιοδώρου, ἔχει ὅμως ἕνα ἰδιάζοντα χαρακτῆρα, ὁ ὁποῖος ὀφείλεται εἰς τὴν ἐπιχειρουμένην ἀναζήτησιν (κατὰ τὸ μᾶλλον ἢ ἧττον εὔστοχον) τῆς ἐτυμολογίας τῶν χρησιμοποιουμένων ὅρων. Καὶ ἐπειδὴ εἰς τὸ ἔργον τοῦτο ἐξετάζονται διαδοχικῶς ὅλοι οἱ κλάδοι οἱ ἀποτελοῦντες τὸν κύκλον τοῦ ἐπιστητοῦ τῆς ἐποχῆς ἐκείνης, δὲν ἦτο δυνατὸν νὰ ἐξαιρεθοῦν οἱ κλάδοι οἱ ἀποτελοῦντες τὴν καθιερωμένην τετράοδον. Μολονότι ὁ εὐρυμαθὴς ἐπίσκοπος δὲν ἔκαμε καμμίαν προσωπικὴν συμβολὴν εἰς τὴν ἐπιστήμην τῆς ἐποχῆς του, εἶναι ἄξιον ἐξάρσεως, πρὸς τιμήν του, τὸ φιλομαθηματικὸν πνεῦμα ὑπὸ τὸ ὁποῖον ἔγραψε καὶ τὸ ὁποῖον εἶναι εὐδιάκριτον εἰς φράσεις, ὅπως π.χ. αἱ ἀκόλουθοι: «Ἀφαιρέσατε τὸν ἀριθμὸν ἀπὸ ὅλα τὰ πράγματα καὶ τὰ πάντα καταστρέφονται. Ἀφαιρέσατε ἀπὸ τὴν ἀνθρωπότητα τὸν λογισμὸν καὶ ὁλόκληρος βυθίζεται εἰς τυφλὴν ἀμάθειαν. Οὔτε διαφέρει ἀπὸ τὰ λοιπὰ ζῷα ἐκεῖνος, ὁ ὁποῖος ἀγνοεῖ τοῦ λογισμοῦ τὴν χρῆσιν».

Βέδας καὶ Ἀλκουΐνος

109. Παρόμοια συναισθήματα ἔτρεφε πρὸς τὴν Ἀριθμητικὴν καὶ ὁ αἰδέσιμος Βέδας (Beda venerabilis ἢ Bede, γεννηθεὶς εἰς τὴν Ἰρλανδίαν περὶ τὸ 673 καὶ ἀποθανὼν ἐκεῖ τὴν 26 Μαΐου 735), ὁ ὁποῖος ἐκτὸς ἄλλων συγγραφῶν του, ἀφιερωμένων εἰς τὰς φυσικὰς ἐπιστήμας καὶ εἰς τὴν μέτρησιν τοῦ χρόνου (De temporum ratione), κατέλιπε καὶ δύο ἔργα μαθηματικοῦ περιεχομένου. Ἕνα ἐξ αὐτῶν (De ratione unciarum, λογισμὸς δωδεκατημορίων) πραγματεύεται τὰς πράξεις μὲ τοὺς κλασματικοὺς ἀριθμοὺς τῶν Ρωμαίων, τὸ δὲ ἄλλο (De computo vel loquela digitorum, λογισμὸς ἢ διάλεκτος τῶν δακτύλων), διδάσκει μίαν μέθοδον παραστάσεως τῶν ἀριθμῶν διὰ τῆς χρήσεως τῶν χειρῶν. Πρόκειται περὶ ἑνὸς συστήματος, τὸ ὁποῖον εἶχεν εὐρεῖαν διάδοσιν καὶ ἀπέκτησε μεγάλην φήμην. Εἰς τὴν βάσιν αὐτοῦ εὑρίσκεται σιωπηρῶς ὁ ἀριθμὸς 10, πρᾶγμα διόλου περίεργον, ἀφοῦ στηρίζεται εἰς τὴν χρῆσιν τῶν δακτύλων. Διὰ νὰ δώσωμεν μίαν ἰδέαν τοῦ ἐν λόγῳ συστήματος, θὰ εἴπωμεν ὅτι ὁ Βέδας καθιερώνει μερικὰς χειρονομίας, ἐκτελεστέας διὰ τῆς ἀριστερᾶς χειρός, πρὸς παράστασιν τῶν ἀριθμῶν 1,2,..,9, 10, 20, . . , 90. Ἐὰν αἱ αὐταὶ χειρονομίαι ἐκτελεσθοῦν διὰ τῆς δεξιᾶς χειρός, παριστοῦν κατ' ἀντιστοιχίαν τοὺς ἀριθμοὺς 1000, 2000,..., 9000, 100, 200, . . ., 900. Ἄλλαι χειρονομίαι τῆς ἀριστερᾶς χειρὸς δηλοῦν ἀντιστοίχως τοὺς ἀριθμοὺς 10.000, 20.000,..., 90.000, ἐνῷ αἱ ἀντίστοιχοι τῆς δεξιᾶς τὰ 9 πρῶτα πολλαπλάσια τοῦ 100.000. Διὰ νὰ δηλωθοῦν τὰ ἑπόμενα πολλαπλάσια τοῦ ἀριθμοῦ τούτου, ἀπαιτεῖται ἡ χρῆσις καὶ τῶν δύο χειρῶν. Ὅπως βλέπομεν πρόκειται περὶ μεθόδου, ὁμοίας πρὸς ἐκείνην ἡ ὁποία χρησιμοποιεῖται διὰ τὴν ἐπικοινωνίαν μὲ τοὺς κωφαλάλους καὶ τῆς ὁποίας ἡ ἀξία ἐλαττοῦται πολύ, ὅσον αὐξάνει τὸ μέγεθος τῶν ἀριθμῶν.

110. Τὸ ἔτος 735, κατὰ τὸ ὁποῖον ἀπέθανεν ὁ Βέδας εἶδε τὸ φῶς εἰς Yorkshire ἕνας ἄλλος διάσημος Ἀγγλοσάξων, ὁ Ἀλκουΐνος, ὁ ἐξοχώτερος ἐκπρόσωπος τῆς καρολιδείου ἀναγεννήσεως. Περὶ αὐτοῦ ἀναφέρεται εἰς τὴν ἱστορίαν ἡ συνάντησίς του — εἰς Πάρμαν τὸ 782 — μὲ τὸν μοναδικὸν μέγαν μονάρχην τῆς ἐποχῆς ἐκείνης, ὁ ὁποῖος κατώρθωσε ν' ἀφίσῃ εἰς τὴν νομοθεσίαν ἴχνη διαρκοῦς ἀξίας καὶ χρησιμότητος (ἐννοοῦμεν τὸν Κάρολον τὸν Μέγαν ἢ Καρλομάγνον, 742 - 814). Ἡ συνδιάλεξις τῶν δύο ἀνδρῶν δὲν ἦτο βεβαίως ἄσχετος πρὸς τὰς προσπαθείας (αἱ ὁποῖαι καίτοι παραμείνασαι ἄκαρποι, δὲν στεροῦνται ἀξίας) τοῦ βασιλέως τῶν Φράγκων νὰ καταστήσῃ εἰς τοὺς ὑπηκόους του ὀλιγώτερον ἐλλιπῆ καὶ χλιαρὰν τὴν ἔφεσιν πρὸς τὴν μόρφωσιν. Προωρισμένος νὰ εἰσέλθῃ βραδύτερον εἰς τὸ μοναστήριον τῆς Tours, ὁ Ἀλκουΐνος εἰργάσθη μὲ ἐξαιρετικὸν ζῆλον διὰ τὴν πρόοδον τῶν

σχολείων καὶ τῆς βιβλιοθήκης, ποὺ ἐλειτούργουν ἐκεῖ, ὅπου καὶ ἀπέθανε τὴν 19ην Μαΐου 804.

Τὸ ἔργον του Propositiones ad acuendos juvenes (θέματα πρὸς ἄσκησιν τῶν νέων), εἰς τὸ ὁποῖον ὁ Ἀλκουΐνος ὀφείλει τὴν θέσιν του εἰς τὴν ἱστορίαν τῶν μαθηματικῶν (παρὰ τὸ γεγονὸς ὅτι δὲν ἐλλείπουν ἐξ αὐτοῦ τὰ σφάλματα καὶ ὅτι ἡ πατρότης του δὲν εἶναι δυνατὸν ν' ἀπαλλαγῇ ἀπὸ ὡρισμένας ἀμφιβολίας), ἀποτελεῖ μίαν πολύμορφον συλλογὴν προβλημάτων, ἐκ τῶν ὁποίων μερικὰ εἶναι καθαρῶς ἀριθμητικά, ἄλλα δὲ ἔχουν ὡς σκοπὸν τὸν ὑπολογισμὸν ἐμβαδῶν. Ἕνα μέρος τοῦ ἔργου ἔχει ἀναμφισβητήτως γεῦσιν ἑλληνικήν, ἄλλα μέρη τούτου ἔχουν καταφανῶς ρωμαϊκὴν προέλευσιν. Πρόκειται περὶ μιᾶς συλλογῆς, ἀπὸ τὴν ὁποίαν δὲν ἐλλείπουν ζητήματα ξένα πρὸς τὰ ἐπιστημονικὰ μαθηματικά, εἴτε διότι ἀποτελοῦν ἀπήχησιν ἀρχαίου μυστικισμοῦ, εἴτε διότι ἀνήκουν εἰς τὴν τάξιν τῶν παραδόξων ἐκείνων αἰνιγμάτων, τὰ ὁποῖα ἀκόμη καὶ σήμερον προσφέρουν εὐχαρίστησιν εἰς τοὺς ἀργοσχόλους. Περιοριζόμεθα ν' ἀναφέρωμεν μεταξὺ τῶν τελευταίων τούτων τὸ πολὺ γνωστὸν πρόβλημα τῆς διαμετακομίσεως, χωρὶς δυσαρέστους συνεπείας, ἑνὸς λύκου, ἑνὸς προβάτου καὶ ἑνὸς λαχάνου, μέσῳ μιᾶς λέμβου, ἡ ὁποία εἶναι τόσον μικρά, ὥστε ἕνα μόνον ἐξ αὐτῶν δύναται νὰ παραλάβῃ καθ' ἑκάστην μεταφορὰν ἀπὸ τῆς μιᾶς ὄχθης τοῦ ποταμοῦ εἰς τὴν ἄλλην.

Γκερβέρτος

111. Ἕνας πλήρης κατάλογος τῶν προσώπων ἐκείνων, τὰ ὁποῖα εἰς τὴν καρδίαν τοῦ Μεσαίωνος ἔστρεψαν τὴν σκέψιν πρὸς τὰς ἀκριβεῖς ἐπιστήμας θὰ περιελάμβανε τὰ ὀνόματα τῶν Remigio d' Auxerre (ἀποθ. 908), Odo de Gluny (γ. 879, ἀποθ. 942 ἢ 943), Abbo de Fleury (γ. εἰς Ὀρλεάνην, ἀποθ. 1003 ἢ 1004), τὰ ὁποῖα μαρτυροῦν ὅτι ἀπὸ τῆς ἐποχῆς ἐκείνης, μιᾶς τῶν σκοτεινοτέρων τῆς ἱστορίας, ἡ Γαλλία εἶχε λάβει συνείδησιν τῆς ἀνάγκης νὰ ἀναπτυχθῇ ἡ ἐπιστημονικὴ παιδεία καὶ συγχρόνως εἶχεν εὕρει ἐντός της τὴν δύναμιν νὰ συνεργασθῇ πρὸς ἐπιτυχίαν ἑνὸς τόσον εὐγενοῦς σκοποῦ.

Ἐὰν δὲν σταματῶμεν διὰ νὰ περισυλλέξωμεν τὰ ἴχνη τῶν ἔργων των, τοῦτο συμβαίνει διότι, κατὰ τὸ δεύτερον ἥμισυ τοῦ Χ αἰῶνος, ἀνεφάνη ἐκεῖ μία προσωπικότης πολὺ μεγαλυτέρας δυνάμεως, ὁ Γ κ ε ρ β έ ρ τ ο ς. Γεννηθεὶς καὶ ἐκπαιδευθεὶς εἰς τὸ Aurilliac, ἀφιερώθη εἰς τὸ ἐκκλησιαστικὸν στάδιον. Εἶναι διαδεδομένη ἡ γνώμη, ἂν καὶ ἀσθενῶς θεμελιωμένη, ὅτι περὶ τὸ ἔτος 967 διέτρεξε τὴν Ἱσπανίαν, τρία δὲ ἔτη βραδύτερον τὸν εὑρίσκομεν εἰς τὴν Ρώμην καὶ κατὰ τὴν δεκαετίαν 972 - 982 εἰς τὴν ἐπισκοπὴν τῶν Reims. Συναντηθεὶς βραδύτερον εἰς τὴν Ραβένναν μὲ τὸν αὐτοκράτορα Ὄθωνα II,

σχολείων καὶ τῆς βιβλιοθήκης, ποὺ ἐλειτούργουν ἐκεῖ, ὅπου καὶ ἀπέθανε τὴν 19ην Μαΐου 804.

Τὸ ἔργον του Propositiones ad acuendos juvenes (θέματα πρὸς ἄσκησιν τῶν νέων), εἰς τὸ ὁποῖον ὁ Ἀλκουῖνος ὀφείλει τὴν θέσιν του εἰς τὴν ἱστορίαν τῶν μαθηματικῶν (παρὰ τὸ γεγονὸς ὅτι δὲν ἐλλείπουν ἐξ αὐτοῦ τὰ σφάλματα καὶ ὅτι ἡ πατρότης του δὲν εἶναι δυνατὸν ν' ἀπαλλαγῇ ἀπὸ ὡρισμένας ἀμφιβολίας), ἀποτελεῖ μίαν πολύμορφον συλλογὴν προβλημάτων, ἐκ τῶν ὁποίων μερικὰ εἶναι καθαρῶς ἀριθμητικά, ἄλλα δὲ ἔχουν ὡς σκοπὸν τὸν ὑπολογισμὸν ἐμβαδῶν. Ἕνα μέρος τοῦ ἔργου ἔχει ἀναμφισβητήτως γεῦσιν ἑλληνικήν, ἄλλα μέρη τούτου ἔχουν καταφανῶς ρωμαϊκὴν προέλευσιν. Πρόκειται περὶ μιᾶς συλλογῆς, ἀπὸ τὴν ὁποίαν δὲν ἐλλείπουν ζητήματα ξένα πρὸς τὰ ἐπιστημονικὰ μαθηματικά, εἴτε διότι ἀποτελοῦν ἀπήχησιν ἀρχαίου μυστικισμοῦ, εἴτε διότι ἀνήκουν εἰς τὴν τάξιν τῶν παραδόξων ἐκείνων αἰνιγμάτων, τὰ ὁποῖα ἀκόμη καὶ σήμερον προσφέρουν εὐχαρίστησιν εἰς τοὺς ἀργοσχόλους. Περιοριζόμεθα ν' ἀναφέρωμεν μεταξὺ τῶν τελευταίων τούτων τὸ πολὺ γνωστὸν πρόβλημα τῆς διαμετακομίσεως, χωρὶς δυσαρέστους συνεπείας, ἑνὸς λύκου, ἑνὸς προβάτου καὶ ἑνὸς λαχάνου, μέσῳ μιᾶς λέμβου, ἡ ὁποία εἶναι τόσον μικρά, ὥστε ἕνα μόνον ἐξ αὐτῶν δύναται νὰ παραλάβῃ καθ' ἑκάστην μεταφορὰν ἀπὸ τῆς μιᾶς ὄχθης τοῦ ποταμοῦ εἰς τὴν ἄλλην.

Γκερβέρτος

111. Ἕνας πλήρης κατάλογος τῶν προσώπων ἐκείνων, τὰ ὁποῖα εἰς τὴν καρδίαν τοῦ Μεσαίωνος ἔστρεψαν τὴν σκέψιν πρὸς τὰς ἀκριβεῖς ἐπιστήμας θὰ περιελάμβανε τὰ ὀνόματα τῶν Remigio d' Auxerre (ἀποθ. 908), Odo de Gluny (γ. 879, ἀποθ. 942 ἢ 943), Abbo de Fleury (γ. εἰς Ὀρλεάνην, ἀποθ. 1003 ἢ 1004), τὰ ὁποῖα μαρτυροῦν ὅτι ἀπὸ τῆς ἐποχῆς ἐκείνης, μιᾶς τῶν σκοτεινοτέρων τῆς ἱστορίας, ἡ Γαλλία εἶχε λάβει συνείδησιν τῆς ἀνάγκης νὰ ἀναπτυχθῇ ἡ ἐπιστημονικὴ παιδεία καὶ συγχρόνως εἶχεν εὕρει ἐντός της τὴν δύναμιν νὰ συνεργασθῇ πρὸς ἐπιτυχίαν ἑνὸς τόσον εὐγενοῦς σκοποῦ.

Ἐὰν δὲν σταματῶμεν διὰ νὰ περισυλλέξωμεν τὰ ἴχνη τῶν ἔργων των, τοῦτο συμβαίνει διότι, κατὰ τὸ δεύτερον ἥμισυ τοῦ Χ αἰῶνος, ἀνεφάνη ἐκεῖ μία προσωπικότης πολὺ μεγαλυτέρας δυνάμεως, ὁ Γκερβέρτος. Γεννηθεὶς καὶ ἐκπαιδευθεὶς εἰς τὸ Aurilliac, ἀφιερώθη εἰς τὸ ἐκκλησιαστικὸν στάδιον. Εἶναι διαδεδομένη ἡ γνώμη, ἂν καὶ ἀσθενῶς θεμελιωμένη, ὅτι περὶ τὸ ἔτος 967 διέτρεξε τὴν Ἱσπανίαν, τρία δὲ ἔτη βραδύτερον τὸν εὑρίσκομεν εἰς τὴν Ρώμην καὶ κατὰ τὴν δεκαετίαν 972 - 982 εἰς τὴν ἐπισκοπὴν τῶν Reims. Συναντηθεὶς βραδύτερον εἰς τὴν Ραβένναν μὲ τὸν αὐτοκράτορα Ὄθωνα ΙΙ,

διήγειρεν εἰς τὴν ψυχὴν τούτου τόσον θαυμασμόν, ὥστε ὁ αὐτοκράτωρ ἐκεῖνος τὸν ἔθεσεν ἐπικεφαλῆς τοῦ ἀββαείου τοῦ Bobbio (εἰς Λομβαρδίαν), διασήμου διὰ τοὺς βιβλιογραφικοὺς θησαυροὺς τῆς βιβλιοθήκης του. Ἐκεῖ ἔλαβεν ἀσφαλῶς γνῶσιν τοῦ περιεχομένου τῶν φύλλων, ποὺ ἀποτελοῦν σήμερον τὸν Codex Arcerianus, καὶ ἴσως συνέγραψε τὴν Γεωμετρίαν ἐκείνην, ἡ ὁποία, εἰς ἕνα κώδικα τοῦ Χ αἰῶνος, φέρει τὸ ὄνομά του. Ἀποθανόντος τοῦ Ὄθωνος, ἐπανῆλθεν εἰς Reims ὡς κεφαλὴ τῆς ἐκεῖ μητροπόλεως. Τὸ 996 μετέβη εἰς τὴν Ρώμην ὡς σύμβουλος τοῦ πάπα Γρηγορίου V, κατὰ θέλησιν τοῦ ὁποίου ἐγένετο ἐπίσκοπος Ραβέννης (998). Ἀνυψωθεὶς τέλος εἰς τὸ ὑπέρτατον ἐκκλησιαστικὸν ἀξίωμα τὴν 2αν Ἀπριλίου 999, προσέλαβε τὸ ὄνομα Σίλβεστρος II. Ἀπέθανε τὴν 12ην Μαΐου 1003.

Παραλλήλως πρὸς τὴν εὐρυμάθειάν του, ἡ ὁποία ἐθεωρεῖτο ἀπεριόριστος, ἐπέτυχε νὰ καλλιεργήσῃ μίαν ἁγνότητα ἠθῶν, ἀνωτέραν παντὸς ἐγκωμίου, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον εἶναι τόσον περισσότερον ἀξιοσημείωτον, ὅσον εἶναι βέβαιον ὅτι ἔζησεν εἰς μίαν ἐποχὴν τοιαύτης ἠθικῆς καταπτώσεως εἰς ὅλα τὰ κοινωνικὰ στρώματα, οὐδενὸς ἐξαιρουμένου, ὥστε δὲν ἦτο ἄστοχος ὁ δοθεὶς εἰς τὴν ἐποχὴν αὐτὴν χαρακτηρισμὸς τῆς πορνοκρατίας.

Εἰς τὴν ὑψηλὴν καὶ γενικὴν ὑπόληψιν, ἡ ὁποία περιέβαλλε τὸν Γκερβέρτον, δὲν ἀνταποκρίνεται βεβαίως ἀνάλογος στάθμη εἰς τὰ ἐπιτεύγματά του ὡς μαθηματικοῦ. Διότι ἡ Γεωμετρία, ἡ ὁποία τοῦ ἀποδίδεται δὲν προχωρεῖ πέραν τῶν γνώσεων, τὰς ὁποίας κατεῖχον ἤδη οἱ σύγχρονοι τοῦ Πλάτωνος. Εἶναι ἔργον συντεταγμένον κατὰ μέγα μέρος μὲ βάσιν τὰ κείμενα τῶν Ρωμαίων ἀγρονόμων τοπογράφων, τῶν ὁποίων ἀντανακλᾷ τὴν μέθοδον χωρὶς μάλιστα ν' ἀπορρίπτῃ καὶ τὰ σφάλματά των.

Ὅσον ἀφορᾷ τὰ ἀριθμητικὰ κείμενα, τὰ ὁποῖα φέρουν τὸ ὄνομά του, ταῦτα ἀφοροῦν ἀποκλειστικῶς τὴν τεχνικὴν τοῦ ὑπολογισμοῦ, τουτέστι ἕνα κλάδον χρήσιμον διὰ τὰς πρακτικὰς ἀνάγκας τῆς ζωῆς, ἀλλ' ἐπιστημονικῆς βαρύτητος τόσον μετρίας, ὥστε οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες, ὅπως εἴπομεν ἤδη, οὐδέποτε κατεδέχθησαν νὰ λάβουν τοῦτον ὡς ἀντικείμενον τῶν γραπτῶν ἐργασιῶν των.

Τοιουτοτρόπως ὁ Γκερβέρτος — ἀκόμη καὶ μετὰ τὴν ἀνάγνωσιν μιᾶς ἐπιστολῆς, τὴν ὁποίαν ἀπηύθυνεν ὁ ἴδιος εἰς κάποιον Ardeboldo καὶ εἰς τὴν ὁποίαν μερικοὶ ἱστορικοὶ ἐνόμισαν, ὅτι ἀναγνωρίζουν μίαν ἀξίαν καὶ μίαν σπουδαιότητα, τὰς ὁποίας αὕτη πραγματικῶς δὲν κατέχει — μᾶς δίδει τὴν ἐντύπωσιν ἑνὸς ἀνθρώπου ἀνωτέρου ἀπὸ τὰς γραπτὰς ἐργασίας του. Γεγονὸς παράδοξον, ἀλλ' οὐχὶ σπάνιον, εἰς ἐποχὰς σκοτεινὰς καὶ ταλαιπωρημένας, κατὰ τὰς ὁποίας αἱ ἐξοχώτεραι προσωπικότητες ἦσαν, ἐκ τῶν πραγμάτων, ὑποχρεωμέναι νὰ στρέφουν τὴν δραστηριότητά των εἰς ἀνάγκας περισσότερον ἐπιτακτικὰς ἀπὸ ἐκείνας τοῦ συγγράφειν, ἀκόμη καὶ ὅταν ὠθοῦντο ἀπὸ τὴν εὐγενῆ φιλοδοξίαν νὰ ἐξασφαλίσουν ἕνα καλύτερον μέλ-

λον εἰς τὴν ἀνθρωπότητα, ἡ ὁποία ἀβεβαία καὶ παραπαίουσα, ἐπροχώρει μέσα εἰς τὸ γενικὸν σκότος.

112. Ἐξέρχεται τοῦ προγράμματός μας ἡ περιγραφὴ καὶ ἡ ἀποτίμησις τῆς ἐκπολιτιστικῆς ἐπιρροῆς, τὴν ὁποίαν ἤσκησεν ὁ Γκερβέρτος ἐπὶ τῶν συγχρόνων καὶ ἀμέσως μεταγενεστέρων του. Ὅσον ἀφορᾷ τὴν γεωμετρίαν, ἠμπορεῖ νὰ λάβῃ κανεὶς μίαν ἰδέαν διατρέχων ἕνα ἐγχειρίδιον Πρακτικῆς Γεωμετρίας, γραφὲν κατὰ τὸν XII αἰῶνα καὶ ἐλθὸν προσφάτως εἰς φῶς, καθ' ὅσον ὁλόκληρα κεφάλαια ἔχουν ἀντιγραφῆ ἀπὸ τὸ παρόμοιον ἔργον τοῦ Γκερβέρτου. Τοιαύτη ἐπίδρασις, παρὰ ταῦτα, πόρρω ἀπεῖχεν ἀπὸ τοῦ νὰ ἐπιτύχῃ ὅ,τι ἐδικαιοῦτο κανεὶς νὰ ἐλπίζῃ πρὸς τὸ συμφέρον τῆς ἐπιστήμης, ἀφοῦ δύο καθηγηταὶ τῆς Θεολογίας, ζήσαντες εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ XI αἰῶνος, ἀποκαλύπτονται εἰς προσφάτως δημοσιευθεῖσαν ἀλληλογραφίαν των ἀνίδεοι τῶν πρώτων στοιχείων τῆς γεωμετρίας. Καὶ ἂς σημειωθῇ ὅτι πρόκειται περὶ δύο καλλιεργημένων προσώπων, εὐφυῶν, ἱκανῶν νὰ διαλογίζωνται ὀρθῶς καὶ μὴ ἐστερημένων μαθηματικῆς προπαιδείας. Παρὰ ταῦτα εὑρέθησαν εἰς πλήρη ἀδυναμίαν νὰ συναρμόσουν μίαν στοιχειώδη μαθηματικὴν ἀπόδειξιν, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον, ὡς εἴδομεν, οἱ Ἕλληνες ἦσαν εἰς θέσιν νὰ κάμουν δεκαπέντε αἰῶνας προηγουμένως.

Εἰκάζεται ὅτι καλύτερα ἀποτελέσματα εἶχον αἱ διδασκαλίαι τοῦ Γκερβέρτου εἰς τὸν τομέα τῆς ἀριθμητικῆς, ἐὰν ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ὅτι φέρεται ὡς μαθητής του κάποιος Bernelino, ὁ ὁποῖος εἰς Παρισίους εἶχε γράψει ἕνα χρήσιμον βιβλίον περὶ ἄβακος. Τὸ βιβλίον τοῦτο, κατ' ἀναλογίαν πρὸς ὅλα τὰ μεσαιωνικὰ ἐγχειρίδια τῆς ρωμαϊκῆς λογιστικῆς, δὲν ἀναφέρει τὰς δύο πρώτας πράξεις τῆς ἀριθμητικῆς, λόγῳ τῆς εὐκολίας των, ἐνῷ πραγματεύεται εἰς ἔκτασιν τὸν πολλαπλασιασμὸν καὶ τὴν διαίρεσιν.

Ἑρμᾶννος καὶ Φράνκων
Μπὲν Ἔσδρα καὶ Σαβαζόρντα

113. Ἡ ἐπικρατοῦσα κατάστασις γενικοῦ ληθάργου τῶν πνευμάτων παρέμεινεν ἀμετάβλητος καὶ κατὰ τὸν ἑπόμενον αἰῶνα, κατὰ τὸν ὁποῖον ἤρχισεν ἐγκαινιαζομένη ἡ ἔνδοξος ἐποχὴ τοῦ σχηματισμοῦ τῶν δήμων τῆς Ἰταλίας, καὶ κατὰ τὸν ὁποῖον ὁ κόσμος παρέστη ἔκπληκτος πρὸ τοῦ ἀσυλλήπτου θεάματος ἑνὸς γερμανοῦ μονάρχου, Ἐρρίκου τοῦ IV (1056 - 1106), νὰ προσπίπτῃ ἀνυπόδητος εἰς τοὺς πόδας τοῦ εὐφυεστάτου πάπα Γρηγορίου VII, ἐκλιπαρῶν τὴν συγχώρησίν του !

Μεταξὺ τῶν σπανίων προσώπων, τὰ ὁποῖα ἠσχολήθησαν τότε μὲ τὰς ἀκριβεῖς ἐπιστήμας, ἀναφέρεται πρὸ πάντων ἕνας σουαβὸς κόμης, φέρων τὸ ὄνομα Ἑρμᾶννος (γεν. 1013, ἀποθ. 24 Σεπτ. 1054) καὶ ἐπονομαζόμενος Κολοβὸς (Hermannus Contractus), ἕνεκα φυσικῆς του ἀναπηρίας. Οὗτος,

λον εἰς τὴν ἀνθρωπότητα, ἡ ὁποία ἀβεβαία καὶ παραπαίουσα, ἐπροχώρει μέσα εἰς τὸ γενικὸν σκότος.

112. Ἐξέρχεται τοῦ προγράμματός μας ἡ περιγραφὴ καὶ ἡ ἀποτίμησις τῆς ἐκπολιτιστικῆς ἐπιρροῆς, τὴν ὁποίαν ἤσκησεν ὁ Γκερβέρτος ἐπὶ τῶν συγχρόνων καὶ ἀμέσως μεταγενεστέρων του. Ὅσον ἀφορᾷ τὴν γεωμετρίαν, ἠμπορεῖ νὰ λάβῃ κανεὶς μίαν ἰδέαν διατρέχων ἕνα ἐγχειρίδιον Πρακτικῆς Γεωμετρίας, γραφὲν κατὰ τὸν XII αἰῶνα καὶ ἐλθὸν προσφάτως εἰς φῶς, καθ' ὅσον ὁλόκληρα κεφάλαια ἔχουν ἀντιγραφῆ ἀπὸ τὸ παρόμοιον ἔργον τοῦ Γκερβέρτου. Τοιαύτη ἐπίδρασις, παρὰ ταῦτα, πόρρω ἀπεῖχεν ἀπὸ τοῦ νὰ ἐπιτύχῃ ὅ,τι ἐδικαιοῦτο κανεὶς νὰ ἐλπίζῃ πρὸς τὸ συμφέρον τῆς ἐπιστήμης, ἀφοῦ δύο καθηγηταὶ τῆς Θεολογίας, ζήσαντες εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ XI αἰῶνος, ἀποκαλύπτονται εἰς προσφάτως δημοσιευθεῖσαν ἀλληλογραφίαν των ἀνίδεοι τῶν πρώτων στοιχείων τῆς γεωμετρίας. Καὶ ἂς σημειωθῇ ὅτι πρόκειται περὶ δύο καλλιεργημένων προσώπων, εὐφυῶν, ἱκανῶν νὰ διαλογίζωνται ὀρθῶς καὶ μὴ ἐστερημένων μαθηματικῆς προπαιδείας. Παρὰ ταῦτα εὑρέθησαν εἰς πλήρη ἀδυναμίαν νὰ συναρμόσουν μίαν στοιχειώδη μαθηματικὴν ἀπόδειξιν, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον, ὡς εἴδομεν, οἱ Ἕλληνες ἦσαν εἰς θέσιν νὰ κάμουν δεκαπέντε αἰῶνας προηγουμένως.

Εἰκάζεται ὅτι καλύτερα ἀποτελέσματα εἶχον αἱ διδασκαλίαι τοῦ Γκερβέρτου εἰς τὸν τομέα τῆς ἀριθμητικῆς, ἐὰν ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ὅτι φέρεται ὡς μαθητής του κάποιος Bernelino, ὁ ὁποῖος εἰς Παρισίους εἶχε γράψει ἕνα χρήσιμον βιβλίον περὶ ἄβακος. Τὸ βιβλίον τοῦτο, κατ' ἀναλογίαν πρὸς ὅλα τὰ μεσαιωνικὰ ἐγχειρίδια τῆς ρωμαϊκῆς λογιστικῆς, δὲν ἀναφέρει τὰς δύο πρώτας πράξεις τῆς ἀριθμητικῆς, λόγῳ τῆς εὐκολίας των, ἐνῷ πραγματεύεται εἰς ἔκτασιν τὸν πολλαπλασιασμὸν καὶ τὴν διαίρεσιν.

Ἑρμᾶννος καὶ Φράνκων
Μπὲν Ἔσδρα καὶ Σαβαζόρντα

113. Ἡ ἐπικρατοῦσα κατάστασις γενικοῦ ληθάργου τῶν πνευμάτων παρέμεινεν ἀμετάβλητος καὶ κατὰ τὸν ἑπόμενον αἰῶνα, κατὰ τὸν ὁποῖον ἤρχισεν ἐγκαινιαζομένη ἡ ἔνδοξος ἐποχὴ τοῦ σχηματισμοῦ τῶν δήμων τῆς Ἰταλίας, καὶ κατὰ τὸν ὁποῖον ὁ κόσμος παρέστη ἔκπληκτος πρὸ τοῦ ἀσυλλήπτου θεάματος ἑνὸς γερμανοῦ μονάρχου, Ἐρρίκου τοῦ IV (1056 - 1106), νὰ προσπίπτῃ ἀνυπόδητος εἰς τοὺς πόδας τοῦ εὐφυεστάτου πάπα Γρηγορίου VII, ἐκλιπαρῶν τὴν συγχώρησίν του!

Μεταξὺ τῶν σπανίων προσώπων, τὰ ὁποῖα ἠσχολήθησαν τότε μὲ τὰς ἀκριβεῖς ἐπιστήμας, ἀναφέρεται πρὸ πάντων ἕνας σουαβὸς κόμης, φέρων τὸ ὄνομα Ἑρμᾶννος (γεν. 1013, ἀποθ. 24 Σεπτ. 1054) καὶ ἐπονομαζόμενος Κολοβὸς (Hermannus Contractus), ἕνεκα φυσικῆς του ἀναπηρίας. Οὗτος,

ἀκολουθῶν τὸ παράδειγμα τοῦ Βοηθίου, ἔγραψε περὶ ἄβακος καὶ περὶ ἀριθμομαχίας. Γενικῶς ἔχομεν νὰ κάμωμεν μὲ ἕνα ἀμυδρὸν πλῆθος ἐρανιστῶν, μεταξὺ τῶν ὁποίων εὑρίσκεται κάποιος Gerland ἐκ Besançon, κατόπιν δὲ ὁ Engelbert ἐκ Λιέγης, ὁ Gilbert ἐκ Lisieux, ὁ Raoul ἐκ Laon, ἀδελφὸς τοῦ διασήμου θεολόγου Ἀνσέλμου (1030 - 1117), ὡς ἐπίσης ὁ O'Creat, τὸν ὁποῖον ἔχομεν ἤδη ἀναφέρει ὁμιλοῦντες περὶ Νικομάχου (§ 86) καὶ τὸν ὁποῖον ἕνα μικρὸν ἔργον, ὑφιστάμενον σήμερον, θεωρεῖ μαθητὴν τοῦ Ἀδελάρδου τοῦ ἐκ Bath. Ἀναφέρονται ἀκόμη κάποιος ἄλλος Gerland «ἐκ Λοτεριγκίας καταγόμενος» (Loteringiae oriundus), κατὰ τὸν τρόπον ἐκφράσεως τῶν χειρογράφων τῆς ἐποχῆς καὶ ἄλλοι μικροτέρας σημασίας, τοὺς ὁποίους παρασιωπῶμεν χάριν τῆς συντομίας. Ἡ παρουσία των ἄλλωστε δὲν χρησιμεύει εἰς τίποτε ἄλλο παρὰ εἰς τὴν διαπίστωσιν, ὅτι ἦτο διάχυτος εἰς τὸν τότε κόσμον ἡ ἀνάγκη τῆς εὐρυτέρας διαδόσεως τῶν κανόνων τοῦ ἀριθμητικοῦ λογισμοῦ καὶ τοῦ προσδιορισμοῦ τῶν ἐμβαδῶν ἁπλουστάτων γεωμετρικῶν σχημάτων.

Μεταξὺ τῶν κειμένων, ποὺ ἀνάγονται εἰς τὴν ὑπ' ὄψει χρονικὴν περίοδον ἀξίζει τὸν κόπον νὰ ρίψωμεν ἕνα βλέμμα εἰς τὸ μικρὸν ἔργον κάποιου Francon ἐκ Λιέγης (συγχρόνου τοῦ Ὄθωνος ΙΙΙ), διευθυντοῦ σχολῆς προσηρτημένης εἰς τὴν μητρόπολιν Saint-Lambert. Καὶ τοῦτο διότι τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος ἔργον ὄχι μόνον ἀφορᾷ τὸ ἐνδοξότερον πρόβλημα τῆς γεωμετρίας, ἀλλὰ καὶ διότι χρησιμεύει εἰς τὸ νὰ ἐκτιμήσωμεν ὁποία ἀβυσσαλέα ἀμάθεια ἐξηκολούθει νὰ ἐπισκοτίζῃ τὰ πνεύματα, ἀκόμη καὶ ἐκείνων, τοὺς ὁποίους ἡ φύσις ἐπροίκισε μὲ ἐπαρκῆ διάνοιαν. Τὸ ἐν λόγῳ κείμενον ἐγράφη κατὰ τὴν περίοδον 1036 - 1056, πραγματεύεται τὸν τετραγωνισμὸν τοῦ κύκλου, διαιρεῖται εἰς 6 βιβλία καὶ λαμβάνει ὡς ἀφετηρίαν τὴν πρότασιν, ἡ ὁποία βεβαιώνει, ὅτι ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον εἶναι ἴσος ἀ κ ρ ι β ῶ ς πρὸς 22/7. Ἀπὸ τὴν ἀρχὴν αὐτὴν συνάγεται, ὅτι ἕνας κύκλος μὲ διάμετρον 14 ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον 11×14. Οὕτω τὸ πρόβλημα τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου ἀνάγεται εἰς τὸ πρόβλημα μετασχηματισμοῦ τοῦ ὀρθογωνίου εἰς ἰσοδύναμον τετράγωνον, πρόβλημα τὸ ὁποῖον περιέχεται εἰς τὸν Εὐκλείδην. Ὁ Φ ρ ά ν κ ω ν ὅμως, ὁ ὁποῖος φαίνεται ν' ἀγνοῇ τὴν ὕπαρξιν τῶν Σ τ ο ι χ ε ί ω ν, κατατρίβεται ἐπ' αὐτοῦ εἰς πολλὰς σελίδας, διὰ ν' ἀποδείξῃ ὅτι ἀγνοεῖ τὴν διαφορὰν μεταξὺ ἀκριβοῦς καὶ προσεγγιστικῆς λύσεως ἑνὸς προβλήματος, ὡς καὶ τὴν ἔννοιαν τῶν ἀσυμμέτρων μεγεθῶν, βεβαιώνων ὅτι τὸ πρόβλημα τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου εἶναι «ἀριθμητικῶς ἀδύνατον». Ἀπὸ ποίους συγγραφεῖς ἤντλησεν εἶναι ἄγνωστον, διότι οὐδένα ἀναφέρει εἰς τὸ βιβλίον του, συνεπῶς ἡ εὐθύνη διὰ τὰ σφάλματα ποὺ διαπράττει, πρέπει νὰ τοῦ καταλογισθῇ ἀκεραία.

Πολὺ ἀνώτερος ἀπὸ τοὺς προαναφερθέντας παρουσιάζεται ὁ ἱσπανο-εβραῖος Ἀ β ρ α ὰ μ μ π ὲ ν Ἔ σ δ ρ α (Abraham ben Esdra), γεννηθεὶς εἰς Το-

ledo, ζήσας εἰς Ἱσπανίαν μέχρι τοῦ 1140 καὶ ἀποθανὼν εἰς Ρώμην, ὑπερεβδομηκοντούτης, τὸ 1167. Εἰς τὰ πολλὰ φιλοσοφικὰ ἔργα ποὺ φέρουν τὸ ὄνομά του, ἀπαντῶνται συχνὰ πληροφορίαι καὶ ἀριθμητικαὶ θεωρίαι, αἱ ὁποῖαι ἂν καὶ ἐμπεποτισμέναι ἀπὸ καβαλιστικὰς φαντασιοπληξίας, πιστοποιοῦν τὴν στερεὰν μόρφωσιν τοῦ συγγραφέως.

Τοῦ ἰδίου εἶναι γνωστὸν ἕνα μικρὸν βιβλίον ἀριθμητικῆς εἰς ἑβραϊκὴν γλῶσσαν, τοῦ ὁποίου λατινικὴ μετάφρασις ὑπὸ τὸν τίτλον Liber augmenti et diminutionis, ἐδημοσιεύθη διὰ τοῦ τύπου ὑπὸ τοῦ G. Libri (Hist. des sciences math. en Italie, τόμος I). Ὅτι τὸ βιβλίον τοῦτο ἐξετιμᾶτο δικαίως καὶ πρὸ τῆς μεταφράσεώς του ἀπὸ τοὺς μὴ ὁμοθρήσκους τοῦ συγγραφέως, προκύπτει τόσον ἀπὸ τὴν γενομένην τιμητικὴν μετάφρασιν αὐτοῦ εἰς τὴν λατινικὴν ὅσον καὶ ἀπὸ τὰ πολυάριθμα σωζόμενα χειρόγραφα ἀντίγραφα τούτου.

Εἰς τὴν ἰδίαν φυλὴν ἀνήκει ἐκεῖνος, ὁ ὁποῖος, ἀφοῦ προσεχώρησεν εἰς τὸν Χριστιανισμόν, ἔλαβε τὸ ὄνομα Johannes Hispaniensis (Ἰωάννης ὁ ἐκ Σεβίλλης). Δικαιοῦται δὲ τιμητικῆς μνείας διὰ τὸ ἔργον του Libro alghoarismi de practica aritmeticae, τὸ ὁποῖον ἔγινε πασίγνωστον, μετὰ τὴν ἔκδοσίν του ὑπὸ τοῦ B. Boncompagni.

Τέλος πρέπει νὰ γίνῃ εὔφημος μνεία τοῦ ἔργου ἑνὸς ἄλλου Ἰσραηλίτου, τὸ ὁποῖον εἰς τὴν λατινικὴν μετάφρασιν, ποὺ ἔκαμεν ὁ Platon de Tivoli τὸ 1116, πιθανῶς μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ συγγραφέως, φέρει τὸν τίτλον Liber embadorum Savasordae. Εἶναι ἐγχειρίδιον πρακτικῆς γεωμετρίας, τοῦ ὁποίου τὸ πρωτότυπον ἀνεδημοσιεύθη τὸ 1913, εἶχε δὲ κατὰ τὸν λατινικὸν Μεσαίωνα εὐρεῖαν διάδοσιν. Ὁ Leonardo Fibonacci ἔκαμε χρῆσιν αὐτοῦ διὰ νὰ γράψῃ τὸ ἰδικόν του ἔργον Practica geometriae. Τὸ πρωτότυπον περιέχει, ἐκτὸς τῆς μεταφρασθείσης ὕλης, τὴν εἰσαγωγὴν καὶ ἕνα ἀκόμη τελευταῖον κεφάλαιον, τὰ ὁποῖα ἐφάνησαν εἰς τὸν μεταφραστὴν ὡς ἔχοντα ἐνδιαφέρον μόνον διὰ τοὺς ὁμοθρήσκους τοῦ συγγραφέως. Ἀξιοσημείωτον πάντως εἶναι, ὅτι εἰς τὸ βιβλίον αὐτὸ ἀπαντᾶται, διὰ πρώτην φορὰν εἰς τὸν λατινικὸν Μεσαίωνα, ἡ λύσις τῶν δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων. Ἐπὶ πλέον διὰ τὸν τετραγωνισμὸν τοῦ κύκλου χρησιμοποιεῖται μία σειρὰ συλλογισμῶν, παρουσιάζουσα μεγάλην ὁμοιότητα πρὸς τὴν μέθοδον τῶν ἀδιαιρέτων, τὴν ὁποίαν, ὅπως θὰ ἴδωμεν, ἐδημιούργησε πολὺ βραδύτερον ὁ Cavalieri. Τὸ ὄνομα τοῦ συγγραφέως ἦτο Abraham ben Chija, ἐνῷ Savasorda ἦτο ἁπλοῦς τιμητικὸς τίτλος. Ἔζησεν εἰς Βαρκελώνην καὶ ὀλίγον εἰς τὴν Προβηγκίαν, ἀπέκτησε δὲ μεγάλην καὶ ἐπαξίαν φήμην, διότι ἀνέλαβε νὰ ἐκθέσῃ εἰς τὴν ἑβραϊκήν, χάριν τῶν εἰς Προβηγκίαν διαβιούντων ὁμοεθνῶν του, ὁλόκληρον τὴν μαθηματικὴν ἐπιστήμην τῆς ἐποχῆς του.

Μεταφρασταὶ ἐκ τῆς ἀραβικῆς

114. Κατὰ τὴν ἐποχὴν ταύτην, ἐνῷ τόσον ὀλίγοι καὶ τόσον μέτριοι ὑπῆρξαν οἱ ἄξιοι μνείας συγγραφεῖς, πολυάριθμοι καὶ πολλοῦ λόγου ἄξιοι ὑπῆρξαν οἱ μεταφρασταί, οἱ ὁποῖοι διὰ τοῦ μεταφραστικοῦ ἔργου των ἔθεσαν ἐκ νέου εἰς κυκλοφορίαν ἰδέας καὶ μεθόδους ὀφειλομένας εἰς τοὺς μεγάλους διανοητὰς τῆς Ἀρχαίας Ἑλλάδος καὶ τὰς ὁποίας ἔλαβον ἀφορμὴν νὰ γνωρίσουν κατὰ τὴν διάρκειαν ἀποδημιῶν, τὰς ὁποίας οὗτοι ἐπεχείρουν εἰς τὴν Ἀνατολὴν χάριν ἐκπαιδευτικῶν σκοπῶν.

Μεταξὺ τῶν Ἰταλῶν ἀναφέρεται ὁ Γεράρδος τῆς Κρεμώνης. Γεννηθεὶς περὶ τὸ 1114, ὁ Γεράρδος κατελήφθη ἀπὸ ἀκατανίκητον ἕλξιν πρὸς τὴν ἀστρονομίαν καὶ ἀκριβῶς διὰ νὰ γνωρίσῃ τὸ μέγα ἀστρονομικὸν σύγγραμμα τοῦ Κλαυδίου Πτολεμαίου μετέβη εἰς Τολέδο, ὅπου τὸ 1175 ἐπεράτωσε τὴν μετάφρασιν τῆς Ἀλμαγέστας ἐκ τῆς ἀραβικῆς εἰς τὴν λατινικήν. Ἀλλὰ τὸ ἔργον του δὲν περιωρίσθη μόνον εἰς τοῦτο. Ὀφείλομεν εἰς αὐτὸν καὶ μίαν ἄλλην ἀνάλογον μετάφρασιν τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου (μὴ ἐξαιρουμένων μάλιστα καὶ τῶν οὕτω καλουμένων βιβλίων XIV καὶ XV), μίαν ἄλλην μετάφρασιν τῶν Δεδομένων τοῦ Εὐκλείδου καθὼς καὶ τῆς Σφαιρικῆς τοῦ Θεοδοσίου, εἰς τὴν ὁποίαν μάλιστα προστίθενται καὶ ἄλλα κείμενα, περὶ τῶν ὁποίων θὰ ὁμιλήσωμεν εἰς τὸ κεφάλαιον XI. Δικαία ὅθεν ἡ ἔκφρασις πρὸς αὐτὸν τῆς εὐγνωμοσύνης μας. Ὁ Γεράρδος ἀπέθανε τὸ ἔτος 1187.

Σύγχρονος τοῦ Γεράρδου ὑπῆρξεν ὁ εὐρυμαθής, γνωστὸς εἰς τὴν ἱστορίαν ὑπὸ τὸ ψευδώνυμον Πλάτων Τιμπουρτῖνος ἢ Πλάτων τοῦ Τίβολι, (Platon de Tivoli), τὸ ἀληθὲς ὄνομα τοῦ ὁποίου θὰ παραμείνῃ ἴσως διὰ παντὸς ἄγνωστον. Οὗτος, κατὰ τὸ 1120, μετέφρασεν ἐκ τῆς ἀραβικῆς τὴν Σφαιρικὴν τοῦ Θεοδοσίου καὶ μερικὰ ἄλλα κείμενα, ὀφειλόμενα εἰς τοὺς ὀπαδοὺς τοῦ Μωάμεθ, μεταξὺ τῶν ὁποίων ἐξέχουσαν θέσιν κατέχει ὁ Albategno (§ 146).

Μακρὰ ἐκπαιδευτικὰ ταξίδια ἐπεχείρησεν ἐπίσης ὁ Ἄγγλος Ἀδελάρδος ὁ ἐκ Bath, ὁ ὁποῖος ἐσπούδασε καὶ ἀργότερα ἐδίδαξεν εἰς Γαλλίαν (Tours καὶ Laon). Ὠθούμενος ἀπὸ τὴν δίψαν τῆς μαθήσεως, ἐπεσκέφθη τὴν Αἴγυπτον, τὴν Μικρὰν Ἀσίαν καὶ τὴν Ἱσπανίαν. Τοῦ ὀφείλομεν εὐγνωμοσύνην, διότι διέδωσεν εἰς τὴν Εὐρώπην τὴν γνῶσιν τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, τὰ ὁποῖα οὗτος ἐθαύμαζεν ὑπὸ τὸ ἀραβικὸν ἔνδυμα καὶ τὰ ὁποῖα παρουσίασεν ὁ ἴδιος, περὶ τὸ 1120, ὑπὸ λατινικὴν μορφήν. Μὴ ἱκανοποιημένος δὲ μὲ τὴν ἐργασίαν του αὐτήν, ἐθεώρησε καλὸν νὰ μεταφράσῃ καὶ μερικὰ ἄλλα ἀκόμη, ἀνατολικῆς προελεύσεως ἔργα.

Τῆς αὐτῆς ἰδιοσυγκρασίας εἶναι καὶ ἕνας ἄλλος εὐρυμαθής, φέρων τὸ λατινικὸν ὄνομα Robertus Retinensis, ταυτόσημος πρὸς τὸν Ροβέρτον τοῦ

Chester. Ἔζησεν ἐπὶ μακρὸν εἰς τὴν Ἱσπανίαν ὑπὸ τὴν ἰδιότητα τοῦ ἀρχιδιακόνου τῆς Pamplona, ἀλλὰ κατὰ τὸ 1150 εὑρίσκεται πάλιν εἰς τὴν Ἀγγλίαν. Ἡ τιμητικὴ θέσις, τὴν ὁποίαν κατέχει εἰς τὴν ἱστορίαν τῶν μαθηματικῶν, ὀφείλεται εἰς τὴν ὑπ' αὐτοῦ γενομένην λατινικὴν μετάφρασιν τοῦ σημαντικωτέρου ἔργου ἀλγέβρας, ἐξ ὅσων διέσωσεν ἡ μνήμη τῆς ἱστορίας. Ἐννοοῦμεν τὸ ἔργον, τὸ ὁποῖον ἔγραψεν ὁ Ἄραψ Mohammed ibn Musa ἢ ἄλλως Al-Khowarizmi.

Ἐνῷ γνωρίζομεν πολὺ ὀλίγα ἢ σχεδὸν τίποτε διὰ τὰ περιστατικὰ τῆς ζωῆς τῶν ἀξίων τούτων ἀνδρῶν, μᾶς εἶναι ἀντιθέτως μὲ μεγάλην ἀκρίβειαν γνωστὴ ἡ βιογραφία ἑνὸς τελευταίου ἐξ αὐτῶν, περὶ τοῦ ὁποίου ὀφείλομεν ν' ἀσχοληθῶμεν τὴν στιγμὴν αὐτήν. Πρόκειται διὰ τὸν Γουλιέλμον τοῦ Moerbeke, καλούμενον οὕτω, διότι ἐγεννήθη εἰς τὴν μικρὰν βελγικὴν πόλιν Moerbeke-Lez-Grammont, τὸ 1215 περίπου. Αἰσθανόμενος ἕλξιν πρὸς τὴν μοναστηριακὴν ζωήν, εἰσῆλθεν εἰς τὸ τάγμα τῶν ἀδελφῶν ἱεροκηρύκων τῆς Louvain. Ἀπὸ τὴν πόλιν αὐτὴν μετέβη μετ' ὀλίγον εἰς Κολωνίαν διὰ νὰ παρακολουθήσῃ ἐκεῖ τὰ μαθήματα τοῦ Ἀλβέρτου τοῦ Μεγάλου (1193-1280). Φαίνεται ὅτι ἐταξίδευσεν ἔπειτα εἰς τὴν Ἀνατολὴν μέχρι τοῦ 1268, ὅτε τὸν εὑρίσκομεν εἰς Viterbo ἐφημέριον καὶ ἐξομολογητὴν τοῦ πάπα Κλήμεντος IV, ἀξιώματα τὰ ὁποῖα διετήρησε καὶ ἐπὶ τῶν διαδόχων τοῦ τελευταίου, Γρηγορίου X, Ἰννοκεντίου V καὶ Ἀδριανοῦ V. Τέλος, ὁ πάπας Ἰωάννης XI τὸν διώρισε (1276) ἀρχιεπίσκοπον τῆς Κορίνθου, τὸ δὲ ἀξίωμα τοῦτο διετήρησε κατὰ πᾶσαν πιθανότητα μέχρι τέλους τῆς ζωῆς του, ἐπελθόντος ὀλίγον πρὸ τοῦ 1297.

Ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον βεβαίως μᾶς ἐνδιαφέρει περισσότερον ἐδῶ δὲν εἶναι ἡ εὐδόκιμος σταδιοδρομία του εἰς τὴν ἐκκλησίαν, ἀλλὰ τὸ γεγονὸς ὅτι μετέφρασε, πιθανῶς ἐκ τοῦ ἑλληνικοῦ, ἕνα μέγα μέρος τῶν ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους. Ἰδιαιτέραν μάλιστα σπουδαιότητα ἔχει ἡ μετάφρασις τῶν δύο βιβλίων *Περὶ ὀχουμένων*. Ὁ Nicolò Tartaglia παρουσίασε τὴν ἐργασίαν ταύτην (Βιβλίον I, 1543, Βιβλίον II, 1565) ὡς ἰδικήν του, μὲ τὴν δήλωσιν ὅτι εἶχεν ἀπωλέσει τὸ ἑλληνικὸν κείμενον, ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἐστηρίζετο ἡ ἐργασία του. Ἡ λογοκλοπία ὅμως ἦλθεν εἰς πλῆρες φῶς, ὅταν τὸ 1884 ὁ V. Rose ἀνεκάλυψεν εἰς τὴν βιβλιοθήκην τοῦ Βατικανοῦ τὸ χειρόγραφον τοῦ Βέλγου ἱερέως, ὡς πρῶτον σχέδιον μιᾶς μεταφράσεως, ἀχθείσης εἰς πέρας τὸν Δεκέμβριον τοῦ 1269 καὶ χρῃζούσης μιᾶς ἐπιμελοῦς ἀναψηλαφήσεως. Παρὰ τὰς ἀτελείας της, ἡ ἐργασία τοῦ Γουλιέλμου τοῦ Moerbeke κατέχει ἀδιαφιλονίκητον ἀξίαν, καθ' ὅσον συνέβαλεν εἰς τὴν διάδοσιν τῆς γνώσεως τοῦ Ἀρχιμήδους καὶ τῶν ἀνακαλύψεών του, πολὺ προτοῦ ὁ Heiberg ἀνακαλύψῃ τὸ πρωτότυπον κείμενον *Περὶ ὀχουμένων* εἰς ἕνα παλίμψηστον τῆς Κωνσταντινουπόλεως.

Τὰ πανεπιστήμια

115. Ἐνῷ ἀκόμη ἐκυριάρχουν τὰ μεσαιωνικὰ σκότη καὶ ἐνῷ μόνον εἰς τὰ μοναστήρια ἐλάχιστοι διανοούμενοι ἐρημῖται ἐμελέτων τὰ ἔργα τοῦ Ἀριστοτέλους, ἀνεφάνησαν, διαρκοῦντος τοῦ XII αἰῶνος, αἱ οἰκονομικοῦ χαρακτῆρος συντεχνίαι μεταξὺ διδασκάλων καὶ μαθητῶν διαμενόντων εἰς τὴν ἰδίαν πόλιν, αἱ ὁποῖαι δὲν διέφερον ἀπὸ τὰ σύγχρονα ἀγγλικὰ trade unions καὶ αἱ ὁποῖαι ἔλαβον τὸ ὄνομα «universitas magistrorum et scholariorum». Τὰ ἀρχαιότερα ἐξ αὐτῶν εἶναι : Βολωνίας 1100, Παρισίων 1150, Καίμπριτζ 1210, Πάδοβας 1222, Νεαπόλεως 1224, Βιέννης 1325 κλπ. Ἦτο ἕνας μικρὸς σπόρος, ὁ ὁποῖος μὲ τὴν πάροδον τοῦ χρόνου ἐπέπρωτο νὰ λάβῃ καταπληκτικὴν ἀνάπτυξιν, ἀποβάλλων βαθμηδὸν τὸν ἐμπορικὸν χαρακτῆρα. Ἦτο ἡ ἐμβρυώδης μορφὴ τῶν σημερινῶν ὀργανισμῶν ἀνωτάτης ἐκπαιδεύσεως.

Ἐξελισσόμενος ὑπὸ διάφορα κλίματα ὁ μικρὸς ἐκεῖνος σπόρος ἔδωσε ζωὴν εἰς ὀργανισμοὺς διαφέροντας μεταξύ των ὡς πρὸς τὸν χαρακτῆρα, τὴν δομὴν καὶ τὴν σημασίαν. Ἐνῷ εἰς μερικὰς πόλεις (π.χ. τοὺς Παρισίους) ἡ διακυβέρνησις τοῦ ὀργανισμοῦ εὑρίσκετο ἀποκλειστικῶς εἰς χεῖρας τῶν διδασκάλων, ἀλλαχοῦ (ὅπως π.χ. εἰς Βολωνίαν) ἐλάμβανον ἐπίσης μέρος εἰς τὴν διοίκησιν καὶ οἱ μαθηταί. Τοιουτοτρόπως ἐνῷ μερικαὶ ἕδραι, κατ' ἐπίδρασιν διδασκάλων μεγάλης φήμης, ἐξειδικεύθησαν εἰς ὡρισμένους κλάδους (π.χ. Νομικὴν εἰς Βολωνίαν, Ἰατρικὴν εἰς Σαλέρνον), ἄλλαι ἕδραι περιέλαβον ὅλους τοὺς κλάδους τοῦ ἐπιστητοῦ καὶ ἔλαβον, διὰ τοῦτο, τὸν τίτλον «γενικαὶ σπουδαί».

Ἱδρυθέντες μὲ αὐθόρμητον θέλησιν ἐλευθέρων πολιτῶν οἱ ὀργανισμοὶ οὗτοι προσέλαβον, εἰς τὴν ἀρχήν, χαρακτῆρα λαϊκὸν καὶ δὲν εἶχον κανένα δεσμὸν μὲ πρόσωπα κατέχοντα ἐξουσίαν. Ἐν τούτοις οἱ διευθύνοντες τοὺς ὀργανισμοὺς τούτους ἐθεώρουν σκόπιμον νὰ προστρέχουν εἰς τὰς ἐκκλησιαστικὰς ἐξουσίας διὰ τὴν ἐξασφάλισιν ἁρμοζουσῶν ἑδρῶν ἢ εἰς τὰς κρατικὰς ἀρχὰς διὰ νὰ ἐπιτυγχάνουν διευκολύνσεις παντὸς εἴδους καὶ προνόμια. Μὲ τὸν καιρὸν ἡ ἐκκλησία καὶ τὸ κράτος ἀνεγνώρισαν τὴν ἀνάγκην νὰ ἐπέμβουν πρὸς τὸν σκοπὸν ἐπιβολῆς ἐλέγχου εἰς δυνάμεις πολυτίμους, ἀπὸ τὰς ὁποίας πολλὰ ἠδύναντο νὰ ὠφεληθοῦν, ἀλλὰ καὶ τὰ πάντα νὰ φοβοῦνται.

Δὲν περιλαμβάνεται εἰς τὸ πρόγραμμά μας νὰ παρακολουθήσωμεν, εἰς τὰς διαφόρους φάσεις των, τὴν ἐξέλιξιν τῶν πανεπιστημιακῶν ἱδρυμάτων. Εἴχομεν ὅμως ὑποχρέωσιν νὰ ἐπισημάνωμεν τὴν ἐμφάνισιν τούτων, ἂν μή τι ἄλλο, διότι ἡ δημιουργία τῶν πανεπιστημίων ἀποτελεῖ τὴν σημαντικωτέραν συμβολήν, τὴν ὁποίαν ἠδυνήθη νὰ προσφέρῃ ὁ Μεσαίων εἰς τὴν πρόοδον καὶ τὴν πνευματικὴν ἀνάπτυξιν τῆς ἀνθρωπότητος.

Ἐν τούτοις καίτοι ἀναγνωρίζομεν τὴν ἀδιαφιλονίκητον εὐεργετικὴν

ἐπίδρασιν, τὴν ὁποίαν ἤσκησαν τὰ πανεπιστήμια, εἶναι ἐξ ἄλλου ἀνάγκη νὰ τονισθῇ, ὅτι δὲν ὀφείλεται μόνον εἰς αὐτὰ ὁ τερματισμὸς τῆς σκοτεινῆς παρενθέσεως, τὴν ὁποίαν ἐκπροσωπεῖ ἡ μεσαιωνικὴ βαρβαρότης. Τὸ βαρυσήμαντον τοῦτο ἀποτέλεσμα ὀφείλεται μᾶλλον εἰς τὴν ἐπίδρασιν, τὴν ὁποίαν ἤσκησαν ἐπὶ τοῦ πολιτισμοῦ μας ἄλλαι φυλαί, εἴτε μὲ ἔργα πρωτότυπα, εἴτε μὲ τὴν ἐπαναφορὰν τῆς ἀνθρωπότητος εἰς τὴν μελέτην τῶν ἀθανάτων ἔργων τῶν κορυφαίων ἐκείνων στοχαστῶν, οἱ ὁποῖοι ἐγεννήθησαν ἐπὶ ἑλληνικοῦ ἐδάφους καὶ οἱ ὁποῖοι, ἐξ ὑπαιτιότητος τῶν Ρωμαίων καὶ τῶν βαρβάρων ἐπιδρομέων, περιέπεσαν εἰς τὴν λήθην.

Ποῖοι ἦσαν οἱ λαοὶ οὗτοι, κατὰ ποῖον τρόπον καὶ ἐν τίνι μέτρῳ ἐβοήθησαν τὴν διανόησιν τῆς Δύσεως — τοὐλάχιστον εἰς ὅ,τι ἀφορᾷ τὰς ἀκριβεῖς ἐπιστήμας — νὰ ἐξέλθῃ ἀπὸ τὸν λήθαργον, ἀποτελοῦν τὸ ἀντικείμενον τῶν ὅσων προτιθέμεθα τώρα νὰ ἐκθέσωμεν. Παρατηροῦμεν ἐν τούτοις ἀπὸ τοῦδε, ὅτι τὰ χρονολογικὰ κυρίως δεδομένα, ποὺ εὑρίσκονται εἰς τὴν διάθεσίν μας, εἶναι τόσον πενιχρὰ καὶ ἀβέβαια, ὥστε ἀποβαίνει ματαία κάθε ἐλπὶς νὰ προσδιορίσωμεν μετ' ἀκριβείας τὴν βαρύτητα τοῦ γνωμικοῦ ἐκείνου, τὸ ὁποῖον εἶναι τόσον συμπαθὲς εἰς τοὺς θαυμαστὰς τῆς ἐξω-ευρωπαϊκῆς σοφίας : ex oriente lux (ἐξ ἀνατολῶν τὸ φῶς).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IX

ΤΟ ΚΙΝΕΖΙΚΟΝ ΑΙΝΙΓΜΑ

Προλεγόμενα

116. Ἐπιθυμοῦντες νὰ ἐξακριβώσωμεν κατὰ πόσον κάποια ἀκτὶς φωτός, προερχομένη ἐκ τῆς Ἀσίας, ἔρριψε τὴν λάμψιν της ἐπὶ τῆς Εὐρωπαϊκῆς Ἐπιστήμης, θὰ ὁρμηθῶμεν ἀπὸ τὴν τεραστίαν συσσώρευσιν τῶν λαῶν, οἱ ὁποῖοι ζοῦν εἰς τὴν Ἄπω Ἀνατολήν, ἀφοῦ πρόκειται περὶ πληθυσμῶν καυχομένων διὰ πολιτισμὸν ἀρχαιότατον, ἡλικίας τριάκοντα καὶ πλέον αἰώνων. Αἱ πρῶται πληροφορίαι γύρω ἀπὸ τὰ μαθηματικὰ τῶν Κινέζων ἦλθον εἰς τὴν Εὐρώπην ἀπὸ ἱεραποστόλους, οἱ ὁποῖοι εἰσήγαγον ἐκεῖ τὴν διδασκαλίαν τοῦ Χριστοῦ καὶ ἐξήγαγον γνώσεις, ἱκανὰς ν' ἀφυπνίσουν εἰς ὅλους ὑψηλὸν θαυμασμὸν δι' ἕνα λαόν, ὁ ὁποῖος πολὺ πρὶν ἀπὸ ἡμᾶς ἐφεῦρεν, ὡς λέγεται, τὴν πυξίδα, τὴν πυρίτιδα καὶ τὰ κινητὰ στοιχεῖα τῆς τυπογραφίας. Ἀπὸ τὰς πληροφορίας αὐτὰς ἤντλησεν ἀφθόνως ὁ Montucla[1] (Histoire des Mathématiques, τόμος 1, ἔκδοσις 2α, Paris, ἔτος VII, σ. 448 - 480), ὁ ὁποῖος εἶχε τὴν ἔμπνευσιν νὰ περιγράψῃ τὰς εὐρείας γνώσεις τῶν Κινέζων ἐπὶ τῆς πορείας τῶν ἄστρων, πιστοποιουμένας, ἐκτὸς ἄλλων, ἀπὸ τὴν ἐφεύρεσιν τοῦ χρονολογικοῦ κύκλου, τοῦ φέροντος συνήθως τὸ ὄνομα τοῦ Μέτωνος. Ὅσον ἀφορᾷ τὰ μαθηματικὰ ὁ Montucla περιωρίσθη νὰ βεβαιώσῃ ὅτι οἱ Κινέζοι προηγήθησαν τοῦ Πυθαγόρου εἰς τὴν ἀνακάλυψιν τῆς χαρακτηριστικῆς ἰδιότητος τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου (ἐπὶ τοῦ ὁποίου ὑπάρχουν σοβαροὶ λόγοι ν' ἀμφιβάλλωμεν) καὶ νὰ ὑπενθυμίσῃ ὅτι ὁ Leibnitz, εἰς ἕνα ὑπόμνημά του ὑποβληθὲν τὸ 1703 εἰς τὴν Ἀκαδημίαν τῶν Παρισίων (Mathem. Schriften, II Abth., t III, Halle 1863, σελ. 223 - 7), ἐφήρμοσε δυαδικὴν ἀριθμητικὴν πρὸς ἑρμηνείαν μερικῶν πινάκων περιεχόντων μυστηριώδη σύμβολα, ποὺ θεωροῦνται ἔργα τοῦ Κινέζου αὐτοκράτορος Fo - yi, ζήσαντος πρὸ 40 καὶ πλέον αἰώνων. Ἀλλ' ὁ Montucla, ἐνῷ ἀνεγνώρισεν ὅτι «μόνον εἰς τὴν Ἀστρονομίαν δύνανται οἱ Κινέζοι νὰ διεκδικήσουν δόξαν τινά*», παρατηρεῖ ἐν συνεχείᾳ μὲ καλοπροαίρετον σο-

---

* Ἀκόμη καὶ ὡς πρὸς τὴν διαπίστωσιν ταύτην πρέπει νὰ κάμωμεν ἐπιφύλαξιν, ἀφ' ὅτου ἀπεκαλύφθη ὅτι ἡ ἀρχαιοτέρα ἔκλειψις, τὴν ὁποίαν οἱ Κινέζοι καυχῶνται ὅτι

φιστείαν: «ἔχω τὴν ἐντύπωσιν ὅτι ὁ Κινεζικὸς λαὸς πρέπει νὰ ὑπῆρξε προνομιοῦχος, διότι ἡ πρόοδος τῶν ἐπιστημῶν καὶ ὅλων τῶν εὐεργετικῶν θεσμῶν παρουσιάζει ἐκεῖ μίαν πορείαν ἐντελῶς ἀντίθετον πρὸς ἐκείνην, τὴν ὁποίαν παρουσιάζει εἰς ὅλα τὰ ἄλλα ἔθνη. Εἰς τὰ τελευταῖα βλέπομεν αἰῶνας ὁλοκλήρους βαρβαρότητος νὰ διαρρέουν προτοῦ περάση ἀπὸ τὸν νοῦν τῶν λαῶν ἡ ἰδέα ὅτι ὑφίστανται κἂν ἐπιστῆμαι. . . Εἰς τοὺς Κινέζους τοὐναντίον βλέπομεν ὅτι τὰ πρῶτα ἔργα ἀποκαταστάσεως ἑνὸς λαοῦ καὶ τὰ πρῶτα βήματα μιᾶς θεωρητικῆς ἐπιστήμης, ὅπως εἶναι ἡ Ἀστρονομία, συμβαδίζουν παραλλήλως. . .».

Ἐπὶ χρονικὸν διάστημα πλέον τοῦ ἡμίσεος αἰῶνος ὁ Montucla καὶ οἱ ἐμπνευσταί του ἱεραπόστολοι ἦσαν αἱ μόναι πηγαί, ἐκ τῶν ὁποίων ἤντλουν τὰς πληροφορίας των οἱ περίεργοι νὰ μάθουν ποία ἦτο ἡ κατάστασις τῶν μαθηματικῶν εἰς τὸ Οὐράνιον Κράτος. Τὸ 1856 ὁ K.L. Biernatzki, ἐδημοσίευσεν ἐπὶ τοῦ θέματος ἄρθρον, ἐρανισθὲν ἀπὸ ἕνα ἄλλο δημοσιευθὲν 4 ἔτη προηγουμένως ὑπὸ τοῦ Alexandre Wyllie, τὸ ὁποῖον ἀπετέλεσεν ἔκτοτε τὴν βάσιν ὅλων τῶν μελετῶν ἐν σχέσει μὲ τὰς ἀκριβεῖς ἐπιστήμας εἰς τὴν ἄπω Ἀνατολήν. Ὁ Biernatzki εἶναι ἐν γένει τόσον ἐπιρρεπὴς εἰς τὸ νὰ εὐνοῇ τοὺς Κινέζους, ὥστε θὰ ἔλεγε κανεὶς ὅτι ἔταξεν ὡς σκοπόν του νὰ καταπολεμήση τὴν θέσιν, ποὺ ὑποστηρίζει ὁ John Davies εἰς μίαν ἐξαίρετον μελέτην του διὰ τὴν Κίναν: «οἱ Κινέζοι δὲν κατέχουν καμμίαν ἀληθῆ ἐπιστήμην, τὴν ὁποίαν νὰ ἐδημιούργησαν οἱ ἴδιοι καὶ ὅτι δὲν ἔχουν τοιαύτην κληρονομηθεῖσαν ἀπὸ τοὺς Ἰνδοὺς ἀποδεικνύεται ἀπὸ τὴν εὐκολίαν, μὲ τὴν ὁποίαν ἀφωμοίωσαν τὰς εὐρωπαϊκὰς ἐπιστήμας».

Ἐπειδὴ μᾶς εἶναι ἐντελῶς ἄγνωστα τὰ πρωτότυπα κείμενα ποὺ ἐμελέτησεν ὁ Wyllie καὶ ἐχρησιμοποίησεν ἴσως σιωπηρῶς ὁ Biernatzki, πρέπει νὰ εἴμεθα πολὺ προσεκτικοὶ προτοῦ δεχθῶμεν τὰ συμπεράσματα, εἰς τὰ ὁποῖα οὗτοι κατέληξαν. Τόσον εἶναι τοῦτο ἀληθές, ὥστε πολλὰ ἔτη βραδύτερον ἕνας περίφημος ἀνατολιστὴς (L. A. Sédillot) εἰς μίαν ἐπιστολήν του πρὸς τὸν B. Boncompagni, μὲ θέμα De l' astronomie et des mathématiques chez les Chinois (Bull. di bibl. e storia, ecc, t. I, 1868), ἐξεφράζετο μὲ πλήρη σκεπτικισμὸν γύρω ἀπὸ τὴν ἀξίαν τῶν συμβολῶν, τὰς ὁποίας δῆθεν οἱ Κινέζοι ἐκόμισαν εἰς τὴν ἐπιστήμην ἐν γένει.

Αἱ γνώσεις μας ἐπὶ τοῦ σημαντικοῦ τούτου θέματος παρέμενον σχεδὸν στάσιμοι μέχρι τῆς στιγμῆς κατὰ τὴν ὁποίαν ἐνεφανίσθησαν ἀφ' ἑνὸς μὲν τὸ ἔργον ἑνὸς σοφοῦ Ἰάπωνος, τοῦ Mikami*, καρπὸς ἀπ' εὐθείας μελέτης

προέβλεψαν, δὲν ἦτο ὁρατὴ εἰς ὁλόκληρον τὸ Οὐράνιον Κράτος. Βλ. K. HIRAYAMA & S. OGURA, On the eclipses recorded in the Shu Ching and Shih Ching (Journ. of the phys. math. Soc. in Tokyo, 2a serie, t VIII 1915, σελ. 2 - 8).

* Τὰ ὀνόματα τῶν Κινέζων ἐγράψαμεν κατὰ τὴν γραφὴν τοῦ Mikami, ἡ ὁποία δὲν

ὄχι μόνον τῶν ἔργων τῶν Κινέζων μαθηματικῶν μέχρι σήμερον, ἀλλ' ἀκόμη μερικῶν μεγάλων ἱστορικῶν καὶ βιβλιογραφικῶν συλλογῶν ἀναφερομένων εἰς διανοουμένους ἀκμάσαντας εἰς τὸ Οὐράνιον Κράτος, ἀφ' ἑτέρου δὲ μία σειρὰ ἄρθρων ἑνὸς σοφοῦ Βέλγου ἱεραποστόλου, τοῦ Vanhée.

Μολονότι τὰ δημοσιεύματα αὐτὰ δὲν ἠδυνήθησαν νὰ ἄρουν τὰς ἀβεβαιότητας καὶ ἀμφιβολίας, αἱ ὁποῖαι ἠγέρθησαν ἀπὸ μακροῦ χρόνου, εἰς μέγαν ἀριθμόν, σχετικῶς μὲ τὴν ἀρχαιότητα, τὴν πρωτοτυπίαν καὶ τὴν ἐσωτερικὴν ἀξίαν τῶν μαθηματικῶν γνώσεων τοῦ κινεζικοῦ λαοῦ, παρὰ ταῦτα μόνον ἀπὸ τῆς στιγμῆς, ποὺ τὰ δημοσιεύματα αὐτὰ εἶδον τὸ φῶς, κατέστη δυνατὸν νὰ ἐπιχειρήσωμεν νὰ γράψωμεν μίαν ἱστορίαν τῶν μαθηματικῶν εἰς τὴν μακρυνὴν καὶ μυστηριώδη ἐκείνην χώραν.

Προτοῦ εἰσέλθωμεν εἰς τὴν καρδίαν τοῦ θέματος εἶναι σκόπιμον νὰ προτάξωμεν τὰ ἀκόλουθα.

I. Ὁ κινεζικὸς λαὸς χαρακτηρίζεται ἀπὸ δύο θεμελιώδεις τάσεις, αἵ ὁποῖαι ἀποτελοῦν διὰ τὸν ἱστορικὸν ἐμπόδια σχεδὸν ἀνυπέρβλητα. Δηλαδὴ α) μίαν ἀπεριόριστον ἐθνικὴν ὑπεροψίαν, ὡς ἐκ τῆς ὁποίας μεγαλοποιεῖ σταθερῶς τὰ ἰδικά του ἐπιτεύγματα, φθάνων ἀκόμη καὶ μέχρι ἰδιοποιήσεως τῶν ξένων εὑρημάτων, β) μίαν προγονικὴν λατρείαν καὶ ἕνα ἄμετρον σεβασμὸν πρὸς ὅ,τι ἐσκέφθησαν ἢ ἔγραψαν οἱ πρόγονοι, ὥστε ὅλοι οἱ ἀγαθοὶ Κινέζοι νὰ παρουσιάζουν τὰς ἰδικάς των ἰδέας, ὡς ἁπλᾶ πορίσματα ἀληθειῶν, ἀποδιδομένων εἰς ἐκείνους.

Προστίθεται ὅτι τὰ εὐρωπαϊκὰ ὀνόματα ἔχουν ὑποστῆ τοιαύτην παραμόρφωσιν ὑπὸ τῶν Κινέζων, ὥστε ἔχουν καταντήσει ἀγνώριστα. Ποῖος πράγματι θ' ἀνεγνώριζεν ὑπὸ τὸ ὄνομα Koling τὸν διάσημον L. van Ceulen καί, ἀκόμη χειρότερα, ὑπὸ τὸ ὄνομα Tu - Te - Hei τὸν γνωστότατον πατέρα Jatroux;

Μία ἄλλη δυσκολία, τὴν ὁποίαν συναντᾷ ὁ προτιθεμένος ν' ἀφηγηθῇ τὴν ἱστορίαν τῆς κινεζικῆς σκέψεως, ἀπορρέει ἐκ τοῦ γεγονότος ὅτι τὸ αὐτὸ πρόσωπον χαρακτηρίζεται μὲ ὀνόματα διάφορα. Διότι εἰς ἕνα Κινέζον δίδεται, κατὰ τὴν γέννησίν του, ἕνα ὄνομα, κατὰ τὴν μετάβασίν του εἰς τὸ σχολεῖον δεύτερον ὄνομα καὶ ἕνα ἄλλο διπλοῦν τοῦ δίδεται ὅταν νυμφεύεται. Βραδύτερον δύναται νὰ προσλάβῃ ἕνα ἄλλο ἀκόμη φιλολογικόν, θρησκευτικὸν ἢ ὑπηρεσιακόν, ἀναλόγως τοῦ κοινωνικοῦ του λειτουργήματος. Τέλος τοῦ ἀποδίδεται ἀκόμη ἄλλο ἕνα ὄνομα κατὰ τὸν θάνατόν του, τὸ ὁποῖον μάλιστα δύναται καὶ αὐτὸ νὰ μεταβληθῇ. Ἐν κατακλεῖδι ὁ μὴ δυνάμενος ν' ἀναγνώσῃ τὰ πρωτότυπα ἔργα σπανίως ἐπιτυγχάνει ν' ἀναγνωρίσῃ ἕνα καὶ τὸ αὐτὸ πρόσωπον, τοῦ ὁποίου τὸ ὄνομα ἀποδίδεται μὲ λατινικοὺς χαρα-

---

εἶναι πάντοτε σύμφωνος πρὸς τὴν τηρουμένην ὑπὸ ἄλλων συγγραφέων, ἀναφερομένων εἰς τὴν β ι β λ ι ο γ ρ α φ ί α ν τοῦ παρόντος κεφαλαίου.

κτῆρας κατὰ τρόπον διάφορον, ἐξαρτώμενον ἀπὸ τὸ ἂν ὁ μεταφραστὴς εἶναι Ἰταλός, Γάλλος, Γερμανὸς ἢ Ἄγγλος.

II. Εἰς τὴν ἱστορίαν τοῦ Οὐρανίου Κράτους ἀπαντῶνται μερικαὶ ἀσφαλεῖς χρονολογίαι, τὰς ὁποίας εἶναι σκόπιμον νὰ ἔχωμεν διαρκῶς πρὸ ὀφθαλμῶν. Ἰδοὺ αἱ κυριώτεραι:

α) Ὁ Κομφούκιος, ὁ μέγας ἠθικολόγος καὶ νομοθέτης, ἔζησε κατὰ τὴν περίοδον 551 - 479 π.Χ., ἑπομένως ὑπῆρξεν ὀλίγον προγενέστερος τοῦ Πυθαγόρου.

β) Εἶναι βέβαιον ὅτι κατὰ τὸ ἔτος 213 π.Χ. ὁ αὐτοκράτωρ τῆς IV δυναστείας Shih Hoang - ti διέταξε νὰ ριφθοῦν εἰς τὸ πῦρ ὅλα τὰ ὑφιστάμενα βιβλία καὶ ὅλοι οἱ ἐπιζῶντες σοφοί, καμμίαν ὅμως δὲν ἔχομεν πληροφορίαν ὡς πρὸς τὴν αἰτίαν τοῦ μίσους τούτου ἐναντίον τῶν πνευματικῶν ἀνθρώπων. Ἐν τούτοις ἡ βάρβαρος αὕτη ἀπόφασις μνημονεύεται, διότι προσέφερεν ἕνα εὔκολον «ἄλλοθι» εἰς τοὺς Κινέζους, ὁσάκις ἐκλήθησαν νὰ παρουσιάσουν ἀποδείξεις τῶν μεγάλων ἀνακαλύψεων, τὰς ὁποίας ἀπέδιδον εἰς ἀρχαιοτάτους προγόνους των.

γ) Κατὰ τὸ ἔτος 65 μ.Χ. ὁ Βουδδισμὸς εἰσήχθη ἐπισήμως εἰς τὴν Κίναν. Τὸ γεγονὸς τοῦτο, ἐνῷ κατέστησε στενωτέρας τὰς πνευματικὰς σχέσεις μεταξὺ Κίνας καὶ Ἰνδιῶν, ἐπιμαρτυρεῖ τὴν ὕπαρξιν ἀπὸ μακροῦ χρόνου ἐγκαρδίων σχέσεων μεταξὺ τῶν δύο τούτων μεγάλων ἐθνῶν. Τοιαῦται σχέσεις ἐπιβεβαιώνονται ἀπὸ τὰς πολυτίμους ἀφηγήσεις Κινέζων ταξιδιωτῶν, οἱ ὁποῖοι ἐπεσκέφθησαν τὰς Ἰνδίας κατὰ τὴν διαδρομὴν τῶν αἰώνων V, VII καὶ XII. Εἶναι λοιπὸν πιθανὸν καὶ εἰς τὰ μαθηματικὰ νὰ ἔλαβον χώραν ἀμοιβαῖαι ἐπιδράσεις. Παρὰ ταῦτα οὐδεμία τοιαύτη ἐπίδρασις εἶναι ἱστορικῶς ἐξηκριβωμένη, ἄγνωστος δὲ παραμένει καὶ ἡ φορά, καθ' ἣν ἐξεδηλώθησαν ἐπιδράσεις μεταξὺ Ἀνατολῆς καὶ Δύσεως.

δ) Κατὰ τὸν II αἰῶνα μ.Χ. τὸ ἐμπόριον τῆς μετάξης μεταξὺ Κίνας καὶ Ρωμαϊκῆς αὐτοκρατορίας ἔλαβεν ἀσυνήθη ἔντασιν.

ε) Σχέσεις μεταξὺ Ἀράβων καὶ Κινέζων ἔχουν ἐπισήμως πιστοποιηθῆ ἀπὸ τῆς Δυναστείας Tang (618 - 907 μ.Χ.), πολυάριθμοι δὲ εἶναι αἱ πρεσβεῖαι αἱ σταλεῖσαι ἀπὸ τὴν Ἀραβίαν εἰς τὴν Κίναν κατὰ τὰ ἔτη 615, 713, 726, 756 κλπ.

στ) Κατὰ τὸ δεύτερον ἥμισυ τοῦ XIII αἰῶνος ὁ Μάρκο Πόλο ἔφθασεν εἰς τὴν Κίναν, ἀλλὰ μόνον κατὰ τὸ 1579 ἔγινεν ἐκεῖ δεκτὸς ὁ Ἰταλὸς Ἰησουήτης M. Ruggiero, τὸν ὁποῖον μετ' ὀλίγον ἠκολούθησεν ὁ διάσημος Matteo Ricci (γεν. εἰς Macerata τὴν 6ην Ὀκτωβρίου 1557, ἀποθ. εἰς Κίναν τὴν 11ην Μαΐου 1610), ὁ ὁποῖος τόσον ἀποτελεσματικῶς συνετέλεσσεν εἰς τὴν διάδοσιν τῆς εὐρωπαϊκῆς ἐπιστήμης εἰς τοὺς μακρυνοὺς ἐκείνους τόπους.

Τὰ πρῶτα τεκμήρια

117. Ἐὰν θέσωμεν κατὰ μέρος τὰς ἀορίστους πληροφορίας, αἱ ὁποῖαι ἔχουν διογκωθῆ ὑπὸ τῆς φαντασίας, καὶ συνεπῶς εἶναι ἄνευ ἀξίας διὰ νὰ λάβουν θέσιν εἰς μίαν ἱστορίαν ἀξίαν τοῦ ὀνόματος*, τὸ πρῶτον κινεζικὸν τεκμήριον, συναφὲς πρὸς τὰ μαθηματικά, εἶναι ἕνα ἔργον τιτλοφορούμενον Ἱερὸν βιβλίον τῆς ἀριθμητικῆς καὶ πραγματευόμενον ἀποκλειστικῶς θέματα συνδεόμενα μὲ τὸ ἡμερολόγιον. Εἰς πολλὰ σημεῖα τὸ ἔργον τοῦτο εἶναι τόσον δυσνόητον εἰς τοὺς Εὐρωπαίους ἐπιστήμονας, ὥστε πολλαὶ γνωσταὶ μεταφράσεις εἶναι μεταξύ των ἀσύμφωνοι, ὁ δὲ τελευταῖος μεταφραστὴς (G. Vacca, Boll. di bibl. e storia, ecc, t VII, 1904) εἰς ἕνα σημεῖον τῆς ἰδικῆς του ἐργασίας εὑρέθη εἰς τὴν ἀνάγκην νὰ δηλώσῃ, ὅτι εἶναι ἀδύνατος ἡ ἀπόδοσις εἰς εὐρωπαϊκὴν γλῶσσαν τῶν κινεζικῶν ἐκείνων φράσεων, τὰς ὁποίας εἶχε πρὸ ὀφθαλμῶν.

Τοῦ ἐν λόγῳ ἔργου δὲν εἶναι μόνον ὁ συγγραφεὺς ἀβέβαιος, ἀλλ' ἀκόμη καὶ ἡ ἐποχὴ κατὰ τὴν ὁποίαν ἐγράφη ἀποτελεῖ σημεῖον ἀντιλεγόμενον. Μερικοὶ κινεζολόγοι, πράγματι, τοποθετοῦν τὸ ἔργον εἰς τὴν ἐποχήν, κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ Κίνα ἐκυβερνᾶτο ὑπὸ τῆς III δυναστείας (1122 - 255 π.Χ.), ἐνῷ ἄλλοι εἰς μίαν ἐποχὴν ὀλίγον προγενεστέραν τοῦ 1105. Ἐφ' ὅσον ὅμως ἐσχολιάσθη κατὰ τὴν περίοδον 200 π.Χ. μέχρι 200 μ.Χ. καὶ ἀνεδημοσιεύθη τὸ 600, ποῖος δύναται νὰ ἔχῃ ἐγγύησιν, ὅτι τὸ παρὸν κείμενον εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ ἐκεῖνο ποὺ ἐγράφη, ὅταν αἱ ἐπαφαὶ τοῦ Οὐρανίου Κράτους μὲ τὰ ἔθνη τῆς Δύσεως δὲν εἶχον ἀκόμη ὁμολογηθῆ; Ἐκεῖνο ποὺ εἶναι βέβαιον εἶναι ὅτι τὸ ἱερὸν βιβλίον παρέχει τὴν ἀπόδειξιν ὅτι τὸ θεώρημα τοῦ Πυθαγόρου ἦτο γνωστὸν εἰς τὸ Οὐράνιον Κράτος, τοὐλάχιστον διὰ τὸ κλασσικὸν τρίγωνον, τὸ ἔχον πλευρὰς $a = 5$, $b = 4$, $c = 3$, καὶ ὅτι ἐχρησιμοποιεῖτο, ὅπως καὶ εἰς τὴν Αἴγυπτον, κατὰ τὴν χάραξιν ὀρθῶν γωνιῶν. Ἕνα ἀπὸ τὰ διαγράμματα, ποὺ συνοδεύουν τὸ σχετικὸν χωρίον, δεικνύει, ὅτι εἰς τὴν προηγουμένως ἀναφερθεῖσαν περίπτωσιν, οἱ Κινέζοι ἐγνώριζον ἀπόδειξιν τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος μὲ τὸν γνωστὸν συλλογισμὸν (σχ. 15), τὸν στηριζόμενον ἐπὶ τῆς ταυτότητος

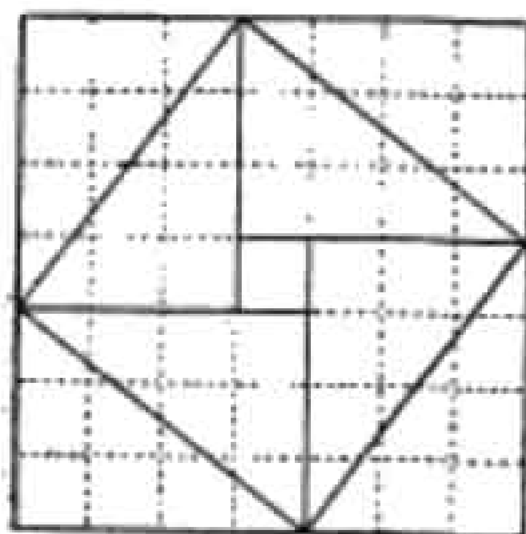
$$a^2 + 4\frac{bc}{2} = (c-b)^2 + 4bc.$$

* Δύο ἐξαιρέσεις δύνανται νὰ γίνουν, ὡς πρὸς τὴν ἀνακάλυψιν τοῦ μαγικοῦ τετραγώνου

4	9	2
3	5	7
8	1	6

καὶ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου 3, 4, 5, ἡ γνῶσις τοῦ ὁποίου διετηρήθη διὰ τῆς παραδόσεως μέσῳ τῶν αἰώνων, ὡς ἀποδεικνύουν αἱ λέξεις ho't'u καὶ losha διὰ τῶν ὁποίων ἐδηλοῦντο ἀντιστοίχως τὸ μαγικὸν τετράγωνον καὶ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον.

Ἀλλὰ διὰ νὰ δυνηθῶμεν μὲ ἥσυχον συνείδησιν νὰ βεβαιώσωμεν, ὅτι οὗτοι ἠσθάνθησαν πρὶν ἀπὸ τοὺς Ἕλληνας τὴν ἀνάγκην τῆς ἀποδείξεως μιᾶς μαθηματικῆς ἀληθείας καὶ ὅτι οὗτοι εἶχον προηγηθῆ τοῦ Πυθαγόρου εἰς τὴν πλέον δημοφιλῆ ἀπὸ τὰς ἀνακαλύψεις του, θὰ ἔπρεπε προηγουμένως νὰ ἐξασφαλίσωμεν τὴν βεβαιότητα, ὅτι τὸ σχῆμα ἐκεῖνο δὲν προσετέθη ἀπὸ μεταγενεστέρους διαμορφωτὰς τοῦ ὑπὸ ἐξέτασιν κειμένου.



Σχ. 15

Ἀξίζει νὰ προστεθῇ ἐδῶ ὅτι τὸ θεώρημα τοῦ Πυθαγόρου ἀποτελεῖ τὸν νωτιαῖον μυελὸν ἄλλων γραπτῶν, εἰς τὰ ὁποῖα λύονται πολλὰ προβλήματα ἀφορῶντα τὸν προσδιορισμὸν ὀρθογωνίων τριγώνων μὲ ἀριθμούς, ὅταν δίδωνται δύο γραμμικαὶ συναρτήσεις τῶν πλευρῶν. Τοῦτο καθιστᾷ πιστευτόν, ὅτι εἶχον ἀπὸ τότε κατασκευασθῆ πίνακες πυθαγορείων τριγώνων. Εἶναι πιθανὸν ἡ φράσις «ὁ κύκλος προκύπτει ἀπὸ τὸ τετράγωνον», ἡ ὁποία ἐνυπάρχει εἰς τὸ Ἱερὸν βιβλίον, νὰ πρέπει νὰ ἑρμηνευθῇ ὡς ἀπόδειξις τοῦ ὅτι καὶ οἱ Κινέζοι συνέλαβον κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον μὲ ἡμᾶς τὸ πρόβλημα τῆς εὑρέσεως τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κύκλου, εἶναι ὅμως ἀναμφισβήτητον, ὅτι ἐπὶ μακροὺς αἰῶνας οἱ Κινέζοι ἠρκοῦντο εἰς τὴν χονδροειδῆ προσέγγισιν τὴν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τιμὴν 3 τοῦ ἀριθμοῦ π.

118. Μετὰ τὸ ἀνωτέρω κείμενον τῆς κινεζικῆς μαθηματικῆς βιβλιογραφίας ἔρχεται, κατὰ χρονολογικὴν σειράν, ἕνα ἄλλο βιβλίον τοῦ ὁποίου ὁ μὲν τίτλος εἶναι ἡ Ἀριθμητικὴ εἰς ἐννέα μέρη, ὁ δὲ συγγραφεὺς καὶ ἡ ἐποχὴ ἄγνωστα. Ἕνας σχολιαστής, ζήσας τὸν III αἰῶνα μ.Χ., ἰσχυρίζεται ὅτι πρόκειται περὶ ἐρανίσματος ἐξ ἄλλων ἀρχαιοτέρων ἔργων, ἀλλὰ γνωρίζομεν ἤδη ὁποίαν πίστιν δυνάμεθα ν' ἀποδίδωμεν εἰς δηλώσεις τοῦ εἴδους τούτου. Ἐπὶ πλέον τὸ σημερινὸν κείμενον ὑπέστη ἀναμόρφωσιν ὑπὸ δύο μαθηματικῶν, ἐκ τῶν ὁποίων ἕνας ἔζησε περὶ τὸ 150 π.Χ., ὁ δὲ ἄλλος ἕνα αἰῶνα βραδύτερον, ἀγνοοῦμεν ὅμως πρὸς ποίαν κατεύθυνσιν καὶ μέχρι ποίου βαθμοῦ ἐπροχώρησεν ἡ ἐπέμβασις τούτων. Ἐν ἀδυναμίᾳ λοιπὸν νὰ προσδιορίσωμεν τὴν συμβολὴν ἑκάστου, δὲν ἀπόκειται εἰς ἡμᾶς ἄλλο, παρὰ νὰ περιγράψωμεν συντόμως τὸ περιεχόμενον τοῦ ἐν λόγῳ κειμένου.

Μέρος Ι: Μέτρησις ἐκτάσεων περιοριζομένων ὑπὸ εὐθειῶν καὶ κυκλικῶν τόξων. Εἰς περίπτωσιν ἐμβαδῶν σχηματιζομένων ὑπὸ τριγώνων ἢ τραπεζίων οἱ διδόμενοι κανόνες δὲν διαφέρουν τῶν ἰδικῶν μας. Ἐὰν πρόκειται διὰ κύκλον διαμέτρου d καὶ περιφερείας P, τὸ ἐμβαδὸν ἐκφράζεται μὲ τοὺς ἀκολούθους τέσσαρας τρόπους :

$$\frac{P}{2}\times\frac{d}{2}\ ,\ \frac{1}{4}Pd\ ,\ \frac{3}{4}d^2\ ,\ \frac{1}{12}P^2$$

ἐκ τῶν ὁποίων οἱ δύο πρῶτοι εἶναι ἀκριβεῖς, ἐνῶ οἱ ἄλλοι προϋποθέτουν $\pi = 3$

Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ἐμβαδοῦ ἑνὸς τομέως πολλαπλασιάζεται τὸ τόξον ἐπὶ τὸ τέταρτον τῆς διαμέτρου, ἐνῷ διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ κυκλικοῦ τμήματος λαμβάνεται τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τοῦ βέλους ἐπὶ τὸ ἄθροισμα τούτου καὶ τῆς χορδῆς. Τέλος τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κυκλικοῦ δακτυλίου δίδεται, ὀρθῶς, ὡς γινόμενον τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν περιφερειῶν ἐπὶ τὴν διαφορὰν τῶν ἀκτίνων.

Τὸ ὑπόλοιπον τοῦ μέρους τούτου εἶναι ἀφιερωμένον εἰς ὑπολογισμοὺς μὲ κλασματικοὺς καὶ μικτοὺς ἀριθμούς. Ἡ ἀνάμιξις ἀριθμητικῶν καὶ γεωμετρικῶν θεωριῶν δύναται νὰ ἐξηγηθῇ μὲ τὴν ὑπόθεσιν ὅτι αὗται εἰσήχθησαν ἀποκλειστικῶς διὰ νὰ δώσουν ἀφορμὴν ἐκτελέσεως πράξεων, εἴτε ἀκόμη ὅτι διὰ τοὺς Κινέζους ἡ «ἀριθμητική» ἦτο ταυτόσημος μὲ τὰ «μαθηματικά», ὡς τοῦτο συνέβη εἰς τὴν Γαλλίαν, ὅπου ἡ «γεωμετρία» περιλαμβάνει ὅλους τοὺς κλάδους τῶν μαθηματικῶν.

Μέρος II: Τοῦτο εἶναι ἀφιερωμένον εἰς προβλήματα σχετικὰ μὲ ἀναλογίας καὶ τόκους.

Μέρος III: Περιέχει προβλήματα σχετικὰ μὲ τὸν ὑπολογισμὸν κληρονομικῶν μεριδίων.

Μέρος IV: Περιέχει προβλήματα ἀπαιτοῦντα τὴν ἐξαγωγὴν τετραγωνικῶν ριζῶν, τῆς ὁποίας ἡ μέθοδος δὲν διαφέρει οὐσιωδῶς τῆς σήμερον ἐφαρμοζομένης. Εἶναι ἄξιον σημειώσεως ὅτι ἀπαντῶνται ἐδῶ ἐπίσης ἀριθμοὶ ἐκφραζόμενοι μὲ θεμελιώδη κλάσματα, ὄχι ὅμως δεκαδικά. Γίνεται ἀκόμη λόγος περὶ ἐξαγωγῆς κυβικῶν ριζῶν, διὰ νὰ καταστῇ δυνατὴ ἐν συνεχείᾳ ἡ λύσις μερικῶν προβλημάτων τοῦ ἑπομένου μέρους τοῦ βιβλίου.

Μέρος V: Τὸ μέρος τοῦτο διδάσκει πῶς ὑπολογίζονται οἱ ὄγκοι διαφόρων στερεῶν ἐπὶ τῇ βάσει κανόνων ἀκριβείας ἢ προσεγγίσεως. Εἶναι ἀξιοσημείωτον ὅτι ὁ κανὼν ὁ διδόμενος διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ὄγκου ἑνὸς τετραέδρου μὲ δύο ἀντικειμένας ἀκμὰς a καὶ b, ὀρθογωνίως διακειμένας, ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὴν ἔκφρασιν:

$$V = \frac{1}{6}ab.h,$$

ὅπου h τὸ μῆκος τῆς κοινῆς καθέτου τῶν ὑπ' ὄψιν ἀσυμβάτων ἀκμῶν, ἡ ὁποία ἔκφρασις εἶναι τόσῳ μᾶλλον ἀξιοσημείωτος ὅσῳ ἡ ἔννοια τῆς κοινῆς καθέτου δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν ἐνεφανίσθη εἰς τὴν Εὐρώπην μόνον κατὰ τὸ τέλος XVIII αἰῶνος εἰς τὴν Γεωμετρίαν τοῦ Legendre.

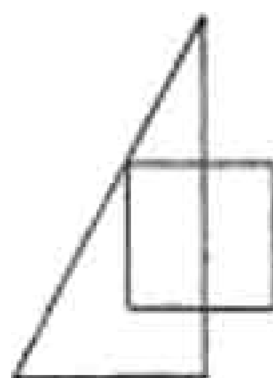
Περιέχονται ἐπίσης προβλήματα ἀναφερόμενα εἰς ταξίδια, τεχνικὰ ἔργα κλπ., ἐνῷ εἰς τὸ Μέρος VI περιέχονται προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα ἐφαρμόζεται εὐρύτατα ἡ «μέθοδος τῆς μίξεως» καὶ εἰς τὸ Μέρος VII λύονται προβλήματα ἐκφραζόμενα σήμερον διὰ συστημάτων γραμμικῶν ἐξισώσεων.

Οὐδὲν ἀναφέρεται πρὸς δικαιολογίαν τῶν ἐφαρμοζομένων μεθόδων, τῶν ὁποίων παραμένει ἄγνωστος ἡ προέλευσις, μὴ ἀποκλειομένης λοιπὸν τῆς ἐκ τοῦ ἐξωτερικοῦ εἰσαγωγῆς των.

Ἡ αὐτὴ παρατήρησις εἶναι ἐφαρμόσιμος καὶ εἰς ἄλλα προβλήματα τοῦ ἰδίου μέρους καὶ τοῦ ἑπομένου, ἔτι δὲ εἰς τὴν διάκρισιν καὶ τὴν χρῆσιν θετικῶν καὶ ἀρνητικῶν ἀριθμῶν, μὲ τοὺς ὁποίους οἱ Κινέζοι φαίνεται ὅτι εἶχον μεγάλην οἰκειότητα.

Τὸ Μέρος IX περιέχει 24 προβλήματα, κατὰ μέγα μέρος στηριζόμενα ἐπὶ τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος, γνωστοῦ εἰς τὸν συγγραφέα ἐν ὅλῃ του τῇ γενικότητι. Σημειοῦμεν τὸ ἀκόλουθον πρόβλημα, τὸ ὁποῖον ἀπαντᾶται μὲ ἄλλα ἀριθμητικὰ δεδομένα καὶ εἰς ἰνδικὰ κείμενα: «ἕνα δένδρον μπαμποὺ δοθέντος ὕψους καταρρίπτεται ἀπὸ τὸν ἄνεμον. Γνωστῆς οὔσης τῆς ἀποστάσεως μεταξὺ τῆς κορυφῆς καὶ τῆς ρίζης τοῦ δένδρου, νὰ εὑρεθῇ τὸ σημεῖον τοῦ κορμοῦ, ὅπου ἔγινεν ἡ θραῦσις». Ἡ μέθοδος, τὴν ὁποίαν ἐφήρμοσαν οἱ Κινέζοι διὰ τὴν λύσιν του εἶναι ταυτόσημος πρὸς ἐκείνην ποὺ ἠκολούθησαν οἱ Ἰνδοί, ὅπερ σημαίνει ὅτι εὑρισκόμεθα ἐνώπιον ἑνὸς ἀδιαφιλονικήτου σημείου ἐπαφῆς τῶν δύο λαῶν, μὲ μόνην ἀμφιβολίαν ὡς πρὸς τὴν φορὰν καθ' ἣν ἐξεδηλώθη ἡ ἐπίδρασις τοῦ ἑνὸς λαοῦ ἐπὶ τοῦ ἄλλου.

Περισσότερον ἐνδιαφέρον καὶ πρωτότυπον εἶναι τὸ ἀκόλουθον πρόβλημα: «Μία πόλις τετράγωνος πλευρᾶς x (σχ. 16) διασχίζεται ἀπὸ μίαν ὁδόν, ἡ ὁποία ἑνώνει τὰ μέσα τῶν πρὸς Βορρᾶν καὶ Νότον πλευρῶν. Εἰς ἀπόστασιν 20 βημάτων ἀπὸ τῆς πρώτης ἔχει φυτευθῆ ἕνα δένδρον, ὁρατὸν ἐκ τοῦ σημείου εἰς τὸ ὁποῖον φθάνομεν μὲ 14 βήματα ἀπὸ τῆς νοτίας εἰσόδου καὶ ἔπειτα 1775 βήματα πρὸς Δυσμάς. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ x».



Σχ. 16

Μὲ μίαν ἁπλῆν θεώρησιν ὁμοίων τριγώνων εὑρίσκομεν τὴν σχέσιν:

$$\frac{x/2}{20} = \frac{1775}{20+x+14},$$

ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν $x = 250$.

Φαίνεται ὅτι οἱ Κινέζοι κατὰ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος, ἔμειναν εἰς τὸ μέσον τῆς ὁδοῦ, περιορισθέντες νὰ γράψουν τὴν ἐξίσωσιν τοῦ προβλήματος. Λαμβανομένης ὑπ' ὄψει τῆς ἐμπειρικῆς διατυπώσεως τῶν δεδο-

μένων τοῦ προβλήματος, πῶς νὰ κατανικήσωμεν τὴν ὑποψίαν ὅτι πρόκειται περὶ ἁπλῶς καὶ ἀτελῶς ἀντιγραφέντος ἀπὸ κάποιο ξενικὸν ἐγχειρίδιον, ἀλλ' ἀνώτερον τῶν δυνάμεων ἐκείνου, ὁ ὁποῖος συνέγραψε τὸ ὑπὸ ἐξέτασιν βιβλίον;

Διὰ νὰ πείσωμεν περισσότερον τὸν ἀναγνώστην ἂς προσθέσωμεν ὅτι, ἂν γράψωμεν a, b, c ἀντὶ τῶν ἀριθμῶν 20, 14, 1775 ἀντιστοίχως, δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος ὡς ἑξῆς:

$$x = -\frac{(a+b)}{2} + \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + 2ac}.$$

Διὰ νὰ λάβωμεν λοιπὸν μίαν ἀκεραίαν λύσιν, τὰ a καὶ b πρέπει νὰ ἐκλεγοῦν κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε τὸ ὑπόρριζον νὰ εἶναι τέλειον τετράγωνον.

Μεταγενέστερα ἔργα

119. Ἕνα ἄλλο ἀρχαῖον κινεζικὸν ἐγχειρίδιον ἔχει ὡς τίτλον Κλασσικὴ Ἀριθμητικὴ τοῦ Sun-Tsu ἢ Suan-Tse. Διαιρεῖται εἰς τρία βιβλία καὶ συνιστᾶται ἰδιαιτέρως εἰς τοὺς ἐπιθυμοῦντας νὰ γνωρίσουν τὴν λογιστικὴν τῶν Κινέζων. Ἀβεβαία εἶναι ἡ ἐποχή, κατὰ τὴν ὁποίαν ἔζησεν ὁ συγγραφεύς. Μερικοὶ θεωροῦν ὅτι πρέπει νὰ ἔζησε κατὰ τὸν VI αἰῶνα π.Χ., ἐνῷ ἄλλοι, ὁρμώμενοι ἀπὸ συμφυεῖς στοχασμούς, πιστεύουν ὅτι εἶναι μεταγενέστερος τῆς εἰσαγωγῆς τοῦ Βουδδισμοῦ εἰς τὴν Κίναν.

Εἰς τὸ ἔργον τοῦτο οἱ πέντε πρῶτοι ἀκέραιοι ἀριθμοὶ δηλοῦνται μὲ ἰσαρίθμους κατακορύφους γραμμάς, παριστώσας ραβδία μπαμποῦ, οἱ δὲ τέσσαρες ἑπόμενοι μὲ τὰ ἴδια σύμβολα, φέροντα ὅμως ὁριζοντίαν ἐπιγραμμήν. Οἱ αὐτοὶ χαρακτῆρες στρεφόμενοι πλαγίως κατ' ὀρθὴν γωνίαν παριστοῦν ἀντιστοίχως τοὺς ἀριθμοὺς 10, 20, . . . , 90. Πῶς ἠδύναντο τώρα μὲ τὰ σύμβολα αὐτὰ νὰ γράψουν ἀριθμοὺς μεγαλυτέρους, θὰ φανῇ ἀμέσως ἀπὸ τὴν ἐξέτασιν τοῦ συμβόλου:

ΤΠ=ΠΙ,

τὸ ὁποῖον εἶναι ταυτόσημον μὲ τὸν ἀριθμὸν 6728.

Δὲν ἀναφέρεται πῶς ἐδηλοῦτο γραφικῶς ἡ ἔλλειψις ἀριθμοῦ μονάδων ὡρισμένης τάξεως, πρᾶγμα ποὺ θὰ εἶχε μέγα ἐνδιαφέρον, λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι ἡ παρουσία τοῦ μηδενὸς (0) εἰς τὴν Κίναν δὲν ἐπισημαίνεται πρὸ τοῦ ἔτους 1250. Ἐπειδὴ δὲ ἀπὸ τοῦ 1271 οἱ Μογγόλοι εἶχον εἰς τὴν ὑπηρεσίαν των πυροβολητὰς Ἄραβας, φυσικὸν εἶναι νὰ ὑποθέσωμεν, ὅτι οἱ ὀπαδοὶ ἐκεῖνοι τοῦ Μωάμεθ ἐδίδαξαν εἰς τοὺς πιστοὺς τοῦ Κομφουκίου τὴν χρῆσιν τοῦ σημαντικοῦ τούτου βοηθητικοῦ ἐξαρτήματος τῆς ἀριθμητικῆς.

μένων τοῦ προβλήματος, πῶς νὰ κατανικήσωμεν τὴν ὑποψίαν ὅτι πρόκειται περὶ ἁπλῶς καὶ ἀτελῶς ἀντιγραφέντος ἀπὸ κάποιο ξενικὸν ἐγχειρίδιον, ἀλλ' ἀνώτερον τῶν δυνάμεων ἐκείνου, ὁ ὁποῖος συνέγραψε τὸ ὑπὸ ἐξέτασιν βιβλίον;

Διὰ νὰ πείσωμεν περισσότερον τὸν ἀναγνώστην ἄς προσθέσωμεν ὅτι, ἂν γράψωμεν a, b, c ἀντὶ τῶν ἀριθμῶν 20, 14, 1775 ἀντιστοίχως, δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος ὡς ἑξῆς:

$$x = -\frac{(a+b)}{2} + \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + 2ac}.$$

Διὰ νὰ λάβωμεν λοιπὸν μίαν ἀκεραίαν λύσιν, τὰ a καὶ b πρέπει νὰ ἐκλεγοῦν κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε τὸ ὑπόρριζον νὰ εἶναι τέλειον τετράγωνον.

Μεταγενέστερα ἔργα

119. Ἕνα ἄλλο ἀρχαῖον κινεζικὸν ἐγχειρίδιον ἔχει ὡς τίτλον Κλασσικὴ Ἀριθμητικὴ τοῦ Sun-Tsu ἢ Suan-Tse. Διαιρεῖται εἰς τρία βιβλία καὶ συνιστᾶται ἰδιαιτέρως εἰς τοὺς ἐπιθυμοῦντας νὰ γνωρίσουν τὴν λογιστικὴν τῶν Κινέζων. Ἀβεβαία εἶναι ἡ ἐποχή, κατὰ τὴν ὁποίαν ἔζησεν ὁ συγγραφεύς. Μερικοὶ θεωροῦν ὅτι πρέπει νὰ ἔζησε κατὰ τὸν VI αἰῶνα π.Χ., ἐνῷ ἄλλοι, ὁρμώμενοι ἀπὸ συμφυεῖς στοχασμούς, πιστεύουν ὅτι εἶναι μεταγενέστερος τῆς εἰσαγωγῆς τοῦ Βουδδισμοῦ εἰς τὴν Κίναν.

Εἰς τὸ ἔργον τοῦτο οἱ πέντε πρῶτοι ἀκέραιοι ἀριθμοὶ δηλοῦνται μὲ ἰσαρίθμους κατακορύφους γραμμάς, παριστώσας ραβδία μπαμπού, οἱ δὲ τέσσαρες ἑπόμενοι μὲ τὰ ἴδια σύμβολα, φέροντα ὅμως ὁριζοντίαν ἐπιγραμμήν. Οἱ αὐτοὶ χαρακτῆρες στρεφόμενοι πλαγίως κατ' ὀρθὴν γωνίαν παριστοῦν ἀντιστοίχως τοὺς ἀριθμοὺς 10, 20, . . . , 90. Πῶς ἠδύναντο τώρα μὲ τὰ σύμβολα αὐτὰ νὰ γράψουν ἀριθμοὺς μεγαλυτέρους, θὰ φανῇ ἀμέσως ἀπὸ τὴν ἐξέτασιν τοῦ συμβόλου:

ΤΠ=ΠΙ,

τὸ ὁποῖον εἶναι ταυτόσημον μὲ τὸν ἀριθμὸν 6728.

Δὲν ἀναφέρεται πῶς ἐδηλοῦτο γραφικῶς ἡ ἔλλειψις ἀριθμοῦ μονάδων ὡρισμένης τάξεως, πρᾶγμα ποὺ θὰ εἶχε μέγα ἐνδιαφέρον, λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι ἡ παρουσία τοῦ μηδενὸς (0) εἰς τὴν Κίναν δὲν ἐπισημαίνεται πρὸ τοῦ ἔτους 1250. Ἐπειδὴ δὲ ἀπὸ τοῦ 1271 οἱ Μογγόλοι εἶχον εἰς τὴν ὑπηρεσίαν των πυροβολητὰς Ἄραβας, φυσικὸν εἶναι νὰ ὑποθέσωμεν, ὅτι οἱ ὀπαδοὶ ἐκεῖνοι τοῦ Μωάμεθ ἐδίδαξαν εἰς τοὺς πιστοὺς τοῦ Κομφουκίου τὴν χρῆσιν τοῦ σημαντικοῦ τούτου βοηθητικοῦ ἐξαρτήματος τῆς ἀριθμητικῆς.

Χωρὶς νὰ ἐνδιατρίψωμεν εἰς ὅ,τι ἀποτελεῖ ἐπιβεβαίωσιν λεχθέντων ἤδη πραγμάτων, ἀναφέρομεν τὴν ἐκφώνησιν ἑνὸς προβλήματος μὲ καθαρῶς κινεζικὴν γεῦσιν, μὲ μαθηματικὸν ὅμως περιεχόμενον ὅμοιον πρὸς ἐκεῖνο ἄλλων προβλημάτων τὰ ὁποῖα συνηντήσαμεν ἢ θὰ συναντήσωμεν εἰς τὴν Αἴγυπτον, τὴν Ἑλλάδα καὶ τὰς Ἰνδίας: «Μία γυναίκα ἔπλυνε πιάτα εἰς ἕνα ρύακα, ὅταν ὁ ἐπόπτης τοῦ ὕδατος τὴν ἠρώτησε: Πῶς συμβαίνει νὰ ἔχῃς τόσα πιάτα; Εἴχαμε συμπόσιον, ἀπήντησεν ἐκείνη. Ὁ ὑπάλληλος ἠρώτησε τότε πόσοι ἦσαν οἱ συνδαιτημόνες. Δὲν γνωρίζω, εἶπεν ἡ γυναῖκα, ἐνθυμοῦμαι ὅμως ὅτι ἀνὰ δύο ἐχρησιμοποίησαν ἕνα πιάτο διὰ τὸ ρύζι, ἀνὰ τρεῖς ἕνα διὰ τὸ ψωμί, ἀνὰ τέσσαρες ἕνα διὰ τὸ φαγητὸν καὶ ὅλα τὰ πιάτα ἦσαν 65». Πρόκειται, ὅπως βλέπομεν, νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ἄγνωστος x (οἱ συνδαιτημόνες) ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν:

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=65.$$

Ὁ συγγραφεύς, ὀρθότατα παρατηρεῖ, ὅτι διὰ νὰ λάβωμεν τὴν τιμὴν τοῦ x, πολλαπλασιάζομεν τὸ 65 ἐπὶ 12 καὶ διαιροῦμεν τὸ ἐξαγόμενον διὰ τοῦ 13, ὅτε εὑρίσκομεν $x=60$.

Θὰ ἐξάρωμεν ἀκόμη δύο προβλήματα, τὰ ὁποῖα παρουσιάζουν τὴν πλέον ἐκπληκτικὴν ἀντίθεσιν, ἀφοῦ τὸ ἕνα εἶναι ἀληθὲς κόσμημα, ἐνῷ τὸ ἄλλο μία ἀποκαρδιωτικὴ κηλὶς εἰς τὸ βιβλίον ποὺ ἐξετάζομεν.

Τὸ πρῶτον ἔχει ὡς σκοπὸν τὴν εὕρεσιν ἑνὸς ἀριθμοῦ, ὁ ὁποῖος διαιρούμενος διαδοχικῶς διὰ τῶν ἀριθμῶν 3, 5, 7 νὰ δίδῃ ἀντιστοίχως ὑπόλοιπα 2, 3, 2. Πρόκειται λοιπὸν περὶ λύσεως, εἰς τὸ σύνολον τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, τοῦ ἀκολούθου συστήματος:

$$x=3y+2$$
$$x=5z+3$$
$$x=7u+2.$$

Ὁ κανών, τὸν ὁποῖον ἐφαρμόζουν οἱ Κινέζοι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, καὶ τὸν ὁποῖον ὀνομάζουν Ta - yen, δὲν διαφέρει κατ' οὐσίαν ἀπὸ ἐκεῖνον ὁ ὁποῖος ἐδόθη κατόπιν ὑπὸ τοῦ Gauss (Disq. arithm., §§ 32 - 36). Κατ' ἐφαρμογὴν τοῦ κανόνος τούτου, προσδιορίζονται (δοκιμαστικῶς;) τρεῖς ἀριθμοὶ k, l, m τοιοῦτοι, ὥστε νὰ ἔχωμεν:

$$5\cdot 7\cdot k\equiv 1 \pmod{3}$$
$$7\cdot 3\cdot l\equiv 1 \pmod{5}$$
$$3\cdot 5\cdot m\equiv 1 \pmod{7}$$

Ὡς τοιοῦτοι ἀριθμοὶ δύνανται νὰ γίνουν δεκτοὶ οἱ $k=2$, $l=1$, $m=1$. Σχηματίζονται τότε τὰ γινόμενα:

$$5 \cdot 7 \cdot 2 = 70,$$
$$7 \cdot 3 \cdot 1 = 21,$$
$$3 \cdot 5 \cdot 1 = 15,$$

τὰ ὁποῖα κατόπιν πολλαπλασιάζονται ἀντιστοίχως ἐπὶ τοὺς ἀριθμοὺς 2, 3, 2 καὶ προστίθενται τὰ ἐξαγόμενα. Λαμβάνομεν τοιουτοτρόπως τὸν ἀριθμὸν 233. Ἀφαιροῦντες τώρα ἐξ αὐτοῦ τὸ γινόμενον 3.5.7 ὅσας φορὰς εἶναι δυνατόν, φθάνομεν εἰς τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν 23 ἢ, ὀρθότερον, εἰς τὸν ἐλάχιστον ἐξ αὐτῶν.

Τὸ δεύτερον πρόβλημα ἔχει τὴν ἀκόλουθον γελοίαν διατύπωσιν: «Μία γυναίκα ἔγκυος 29 ἐτῶν ἀναμένει τέκνον τὸν ἔνατον μῆνα τοῦ τρέχοντος ἔτους. Ποῖον θὰ εἶναι τὸ φῦλον τοῦ γεννηθησομένου;» Εἰς τὸ ἐρώτημα ἀπαντᾷ μὲ ἀδιατάρακτον σοβαρότητα: «Λάβε τὸν 49, πρόσθεσε τὸν μῆνα τῆς συλλήψεως, ἀφαίρεσε τὴν ἡλικίαν τῆς μητρὸς καὶ ἔπειτα τὸν οὐρανὸν 1, τὴν γῆν 2, τὸν ἄνδρα 3, τὰς ἐποχὰς 4, τὰ στοιχεῖα 5, τοὺς νόμους 6, τὰ ἄστρα 7, τοὺς ἀνέμους 8 καὶ τὰς ἐπαρχίας 9. Ἐὰν τὸ ὑπόλοιπον προκύπτῃ περιττόν, θὰ γεννηθῇ ἄρρεν, ἐὰν ἄρτιον θὰ γεννηθῇ θῆλυ». Σημειωτέον ὅτι τοιουτοτρόπως προστίθεται εἰς τὴν ἡλικίαν τῆς μητρὸς 49 - 45 = 4 καὶ ὅτι τελικῶς ὁ προτεινόμενος κανὼν δὲν λέγει τίποτε ἄλλο, παρὰ ὅτι θὰ γεννηθῇ ἄρρεν ἢ θῆλυ, ἂν εἶναι περιττὴ ἢ ἀρτία ἡ διαφορὰ μεταξὺ ἡλικίας τῆς μητρὸς καὶ τοῦ μηνὸς τῆς συλλήψεως. Ἐπιεικὴς βιογράφος τοῦ Sun-Tsu βεβαιώνει, ὅτι πρόκειται περὶ αὐθαιρέτου προσθήκης εἰς τὸ ἔργον του, ὀφειλομένης εἰς χεῖρας ἀγνώστους. Δεχόμεθα τὴν ἄποψιν ταύτην, ἂν μή τι ἄλλο, διὰ νὰ μαρτυρῆται τὸ γεγονός, ὅτι κάποιος Κινέζος, μερικοὺς αἰῶνας πρὸ ἡμῶν, διέγνωσε τὸν νεοπλασματικὸν χαρακτῆρα τοῦ εὑρήματος.

120. Ἕνα ἄλλο κινεζικὸν βιβλίον, σωζόμενον μέχρι σήμερον, φέρει τὸν τίτλον Κλασσικὴ ἀριθμητικὴ τῆς θαλασσονήσου καὶ ἐγράφη ἀπὸ τὸν Liu Hui τὸ 263 μ.Χ. Γνωρίζομεν ὅτι ὁ τίτλος αὐτὸς δὲν εἶναι ἐκεῖνος, τὸν ὁποῖον ἔδωσεν ὁ συγγραφεύς, ἀλλὰ προσετέθη ἀπὸ σχολιαστὴν ζήσαντα κατὰ τὸν VII αἰῶνα, εἰς ὑπόμνησιν ἑνὸς προβλήματος, περιεχομένου εἰς τὸ βιβλίον καὶ ἀποβλέποντος εἰς τὴν ἐκτέλεσιν μετρήσεων εἰς μίαν μακρυνὴν νῆσον. Τοῦ πρωτοτύπου δὲν σώζεται πλέον κανένα ἀντίτυπον. Ὑπάρχει μόνον μιὰ ἀναπαραγωγὴ τούτου, κατὰ τὴν περίοδον 1403-1424, εἰς μεταγραφὴν φέρουσαν χρονολογίαν 1775. Πρόκειται λοιπὸν περὶ δοκουμέντου χωρὶς καμμίαν αὐθεντικὴν ἀξίαν καὶ διὰ τοῦτο δὲν ἠμποροῦμεν ν' ἀκολουθήσωμεν ἐκεῖνον, ὁ ὁποῖος θὰ ἠδύνατο νὰ συναγάγῃ ἐξ αὐτοῦ κολακευτικὰ συμπεράσματα γύρω ἀπὸ τὴν ἀρχαιότητα τῆς κινεζικῆς ἀλγέβρας.

Συνεχίζοντες τὴν ἀνασκόπησίν μας, θ' ἀποκαλύψωμεν εἰς τὴν ἀριθμητικὴν φιλολογίαν τῶν Κινέζων ἀρκετὸν ἀριθμὸν ἐγχειριδίων, ἐπισήμως

υἱοθετηθέντων διὰ τὴν προπαρασκευὴν κρατικῶν ὑπαλλήλων, τὰ ὁποῖα, παρὰ τὰς προσπαθείας νὰ παρουσιασθοῦν ὡς προερχόμενα ἐξ ἐπιλογῆς ἀρχαιοτέρων κειμένων τῆς ἐποχῆς τοῦ «κιτρίνου αὐτοκράτορος» (XXVII αἰὼν π.Χ.), δὲν δύνανται νὰ θεωρηθοῦν προγενέστερα τοῦ VI αἰῶνος μ.Χ. Τὸ ἀρχαιότερον ἐξ αὐτῶν εἶναι ἀγνώστου συγγραφέως. Περιλαμβάνει δὲ κανόνας ἐν μέρει ἐσφαλμένους, ἐν μέρει ἀκαταλήπτους καὶ ἐν μέρει μικροτέρας προσεγγίσεως ἐκείνων τοὺς ὁποίους εἴδομεν εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν εἰς ἐννέα μέρη. Περιοριζόμεθα ν' ἀναφέρωμεν, ὅτι ὁ συγγραφεὺς διαπράττει τὸ σφάλμα νὰ νομίζῃ τὸ τετράπλευρον ἐντελῶς ὁριζόμενον διὰ τῶν 4 πλευρῶν του a, b, c, d καὶ τὸ ἐμβαδὸν τούτου ἐκφραζόμενον διὰ τοῦ ἐσφαλμένου αἰγυπτιακοῦ τύπου :

$$\frac{a+c}{2}\cdot\frac{b+d}{2}.$$

Ἡ Κλασσικὴ ἀριθμητικὴ τοῦ Hsia-hou Yang (εἶναι τὸ δεύτερον ἐκ τῶν προλεχθέντων ἐγχειριδίων) ἐγράφη τὸ 550 ἢ ὀλίγον ἀργότερα καὶ παρουσιάζει πλεῖστα σημεῖα ἐπαφῆς μὲ τὸ ἀνάλογον ἔργον τοῦ Sun-Tsu. Τὰ προβλήματα ποὺ λύονται ἐδῶ ἀπαιτοῦν μόνον τὴν γνῶσιν τῶν τεσσάρων ἀριθμητικῶν πράξεων καὶ τῆς ἐξαγωγῆς τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης. Μερικὰ εἶναι γεωμετρικοῦ χαρακτῆρος, ἐνῷ ἄλλα ἀποβλέπουν εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ τόκου τῶν κεφαλαίων.

Ὀλίγον μεταγενεστέρα εἶναι ἡ Κλασσικὴ ἀριθμητικὴ τοῦ Chang Ch' in Suan-ching, ἡ ὁποία ἐσχολιάσθη κατὰ τὸν VII αἰῶνα καὶ ἀνεδημοσιεύθη τὸ 1084 κατὰ διαταγὴν τῆς κυβερνήσεως. Ἐφαρμόζονται εἰς τὸ βιβλίον τοῦτο μέθοδοι, τῶν ὁποίων οὐδεμία δίδεται δικαιολογία, ἄγουν ὅμως εἰς ἐξαγόμενα ὀρθά. Λέγει π.χ. ὁ συγγραφεύς, ὅτι ὁ 1768 $^{4}/_{7}$ διαιρούμενος διὰ τοῦ 27 $^{3}/_{5}$, δίδει ὡς πηλίκον 643 $^{38}/_{483}$, ἀλλὰ πῶς τὸ δικαιολογεῖ εἶναι ἄγνωστον. Ἂν καὶ τὸ ἔργον τοῦτο ἐλάχιστα διαφέρει τῶν προηγουμένων, ἐν τούτοις εἶναι τὸ πρῶτον ὅπου ἀπαντᾶται ὁ κανὼν διαιρέσεως δύο κλασμάτων, ἡ ἔκφρασις τοῦ ἀθροίσματος τῶν ὅρων ἀριθμητικῆς προόδου καὶ ἐπὶ πλέον προβλήματα τοῦ ἀκολούθου τύπου : «Ἕνας πετεινὸς κοστίζει 5 νομίσματα, μία κότα 3, ἐνῷ τρία κοτόπουλα ἕνα νόμισμα. Μὲ 100 νομίσματα ἀγοράζονται ἐν ὅλῳ 100 δίποδα. Πόσα ἐξ ἑκάστου εἴδους ;» Πρόκειται προφανῶς περὶ προβλήματος ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως, ἰσοδυναμοῦντος μὲ τὴν ἀναζήτησιν τῶν ἀκεραίων θετικῶν λύσεων τοῦ συστήματος :

$$x+y+z=100,$$

$$5x+3y+\frac{1}{3}z=100.$$

Ὁ Chang Ch'in εὑρίσκει ἐξ αὐτῶν τὰς τρεῖς (4, 18, 78), (8, 11, 81),

(12, 4, 84), αἱ ὁποῖαι πράγματι εἶναι αἱ μόναι δυναταί. Τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα παρουσιάζει προφανῆ ἀναλογίαν μὲ τὸ ἀκόλουθον, τὸ ὁποῖον θὰ συναντήσωμεν εἰς ἕνα ὑπόμνημα τοῦ Abu Kamil (§ 145) Ἄραβος συγγραφέως τοῦ IX αἰῶνος (**Suter**, Bibl. mathem., σειρὰ III, τόμος XI, σελὶς 102) : «Μὲ 100 δραχμὰς θέλομεν ν' ἀγοράσωμεν 100 πτηνὰ μεταξὺ χηνῶν, ὀρνίθων καὶ στρουθίων, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ χῆνα κοστίζει 5 δραχμάς, ἡ ὄρνιθα μίαν δραχμὴν καὶ τὰ 20 στρουθία μίαν δραχμήν. Πόσα θὰ λάβωμεν ἐξ ἑκάστου εἴδους ;» Τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι ἐν τούτοις εὐκολώτερον τοῦ κινεζικοῦ, διότι τὸ σύστημα εἰς τὸ ὁποῖον ἀνάγεται :

$$x + y + z = 100, \qquad 5x + \frac{y}{20} + z = 100,$$

ἐπιδέχεται τὴν μοναδικὴν λύσιν (19, 80, 1).

Ἐπειδὴ τοῦ προαναφερθέντος ἀραβικοῦ κειμένου δὲν γνωρίζομεν παρὰ ἕνα ἀπόσπασμα, δὲν ἀποκλείεται, εἰς τὸ πρωτότυπον, νὰ περιελαμβάνετο ἐπίσης τὸ ἀνωτέρω κινεζικὸν πρόβλημα, ἐπειδὴ δὲ εἰς τὸ ἀραβικὸν ἀπαντᾶται καὶ ἕνα πρόβλημα ἐπιδεκτικὸν τοὐλάχιστον 2676 λύσεων, εἶναι δυνατὸν ὁ Abu Kamil νὰ εἶχε λύσει πλήρως καὶ τὸ πρόβλημα τοῦ Chang Ch'in. Ἐὰν τὸ προαναφερθὲν πρόβλημα εὑρίσκετο μόνον εἰς τὴν ἔκδοσιν τοῦ κινεζικοῦ ἔργου, τὴν γενομένην κατὰ τὸν X αἰῶνα, θὰ ἦτο αὐτὸ μία ἀπόδειξις τῆς ἐκ τοῦ ἐξωτερικοῦ προελεύσεως τοῦ ἰδίου προβλήματος. Ὡς ἔχουν τὰ πράγματα, ἡ ξενικὴ προέλευσις τούτου ἀποτελεῖ ὑπόθεσιν, ἡ ὁποία φαίνεται νὰ ἐπιβεβαιοῦται ἀπὸ τὴν παρατήρησιν, ὅτι ὁ ἐπιμεληθεὶς τὸ 1689 τῆς ἐκδόσεως ὡμολόγησεν, ὅτι δὲν ἠδυνήθη νὰ κατανοήση τὴν λύσιν τοῦ Chang Ch'in καὶ τὴν ἀντικατέστησε μὲ ἄλλην πολὺ ὀλίγον ἱκανοποιητικήν. Ἀλλ' ἀκόμη καὶ ἐκεῖνος ὁ ὁποῖος ἀρνεῖται ν' ἀναγνωρίση εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα ἀραβικὴν προέλευσιν, δὲν δύναται ν' ἀρνηθῆ, ὅτι τοῦτο ἀποκαλύπτει ἕνα ἀδιαφιλονίκητον σημεῖον ἐπαφῆς μεταξὺ μωαμεθανικῆς καὶ κινεζικῆς ἐπιστήμης.

Θὰ προσθέσωμεν ἀκόμη, ὅτι παρόμοιον πρόβλημα ἀπαντᾶται εἰς σχόλιον, γραφὲν τὸν VI αἰῶνα, ἐπὶ ἑνὸς κινεζικοῦ ἔργου, τὸ ὁποῖον φέρεται ἀναγόμενον εἰς τὸ ἔτος 200. Τὸ πρόβλημα μεταφράζεται εἰς τὰς δύο ἐξισώσεις :

$$5x + 4y + \frac{z}{4} = 100, \quad x + y + z = 100,$$

τῶν ὁποίων μοναδικὴ λύσις, ὡς βεβαιώνει ὁ σχολιαστής, εἶναι (15, 1, 84). Εἰς ὅλα αὐτὰ τὰ προβλήματα εἶναι ἀξιοσημείωτος ἡ συχνὴ παρουσία τοῦ ἀριθμοῦ 100, τὸν ὁποῖον προτιμᾷ καὶ ὁ Abu Kamil. Ἐντεῦθεν ἐξηγεῖται καὶ ἡ ἔνδειξις «πρόβλημα τῶν 100 πτηνῶν», μὲ τὴν ὁποίαν οἱ Κινέζοι ἐχαρακτήριζον τὰ προβλήματα τοῦ εἴδους τούτου.

Πρέπει πάντως νὰ τονίσωμεν, ὅτι εἰς τὴν μαθηματικὴν γραμματείαν τῶν Κινέζων ἀπαντῶνται ἄλλα προβλήματα ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως πολυπλοκώτερα, ὅπως εἶναι π.χ. ἕνα πρόβλημα, ὅπου ζητοῦνται 18 ἄγνωστοι, συνδεόμενοι μεταξύ των μὲ ἑπτὰ γραμμικὰς σχέσεις. Ἐπειδή, ὡς ἐκ τῆς φύσεως τῶν ἀγνώστων, δὲν γίνονται δεκταὶ λύσεις κλασματικαὶ ἢ ἀρνητικαί, ἡ ἔρευνα ἀκολουθεῖ τὴν κατεύθυνσιν, πρὸς τὴν ὁποίαν θὰ ἐστρέφετο καὶ ἕνας σύγχρονος εὐρωπαῖος μαθηματικός.

Τὰ ἀναφερθέντα ἔργα δὲν εἶναι τὰ μόνα, ποὺ ἀπαντῶνται εἰς τὴν κινεζικὴν μαθηματικὴν βιβλιογραφίαν πρὸ τοῦ VI αἰῶνος. Τὰ ὑπόλοιπα ὅμως μὴ περισωθέντα — ἐκτὸς τῶν τίτλων των — δὲν δύνανται νὰ χρησιμεύσουν εἰς τίποτε ἄλλο, παρὰ μόνον ὡς μάρτυρες τῆς μαθηματικῆς δραστηριότητος τῶν Κινέζων.

Τετραγωνισμὸς τοῦ κύκλου

121. Πρὶν ἐξετάσωμεν ἄλλα διασωθέντα ἔργα, ἀλγεβρικοῦ χαρακτῆρος, παρατηροῦμεν ὅτι ὁ κινεζικὸς λαὸς ἔδειξε, κατὰ προτίμησιν, κλίσιν πρὸς τὴν ἐπιστήμην τοῦ ἀριθμοῦ μᾶλλον παρὰ πρὸς τὴν ἔρευναν τῶν ἰδιοτήτων τοῦ χώρου. Τὸ μοναδικὸν πρόβλημα γεωμετρίας, περὶ τὸ ὁποῖον κατέβαλε γονίμους προσπαθείας, εἶναι τὸ πρόβλημα τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου, οἱ δὲ πρῶτοι ποὺ ἠσχολήθησαν σοβαρῶς μὲ αὐτὸ δὲν ἀνάγονται εἰς τὴν πρὸ Χριστοῦ ἐποχήν.

Εἰς τὸν Chang Heng (78 - 139) ἀποδίδεται ἡ τιμὴ τῆς ἐγκαταλείψεως τῆς τιμῆς $\pi = 3$ ἔναντι τῆς ἀκριβεστέρας $\pi = \sqrt{10} = 3{,}1622777$, τὴν ὁποίαν πιθανῶς ἔμαθεν ἀπὸ τοὺς Ἰνδοὺς εἰσαγωγεῖς τοῦ Βουδδισμοῦ εἰς τὴν Κίναν.

Εἰς τὸν στρατηγὸν Wan - Fan (229 - 267) — φονευθέντα ὑπὸ τοῦ αὐτοκράτορός του διότι παρέστη εἰς συμβούλιον τοῦ στέμματος εἰς κατάστασιν μέθης — ἀποδίδεται ἡ ἀνακάλυψις τοῦ γεγονότος ὅτι μία περιφέρεια διαμέτρου 45 ἔχει μῆκος 142, ὅπερ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ νὰ δεχθῶμεν $\pi = 3{,}155$. Εἶναι ἄγνωστον πῶς ἔφθασεν εἰς τὸ ἀποτέλεσμα τοῦτο, τὸ ὁποῖον εἶναι κατά τι ἀκριβέστερον τῆς τιμῆς $\pi = \sqrt{10}$.

Περίπου κατὰ τὴν ἰδίαν ἐποχὴν ἔζησεν ὁ μαθηματικὸς Liu Hui, γνωστὸς ἤδη εἰς ἡμᾶς (§ 120), ὁ ὁποῖος, διὰ νὰ λύσῃ τὸ περίφημον πρόβλημα ἠκολούθησε τὴν ὁδὸν ποὺ εἶχεν ἤδη χαράξει ὁ Ἀρχιμήδης πέντε αἰῶνας προηγουμένως. Ἔκαμε δηλαδὴ ἀρχὴν μὲ τὸ ἐγγεγραμμένον κανονικὸν ἑξάγωνον καὶ μὲ διαδοχικὰς διχοτομήσεις τῶν τόξων ἐνόμισεν ὅτι θὰ φθάσῃ εἰς τὸν σκοπόν· ἀλλά, ἐνῷ ὁ Συρακούσιος, εἰς τὸ ἔργον του Ψαμμίτης (Arenarius), ἐσταμάτησεν εἰς τὸ πολύγωνον τῶν 96 πλευρῶν, ὁ Κινέζος ἐπροχώρησεν εἰς τὸ ἑπόμενον (μὲ 192 πλευράς), χωρὶς παρὰ ταῦτα νὰ εὕρῃ τιμὴν τοῦ π διάφορον τῆς ἀρχιμηδείου 3,14. Δὲν ἀποκλείεται, ὁ Liu Hui

Πρέπει πάντως νὰ τονίσωμεν, ὅτι εἰς τὴν μαθηματικὴν γραμματείαν τῶν Κινέζων ἀπαντῶνται ἄλλα προβλήματα ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως πολυπλοκώτερα, ὅπως εἶναι π.χ. ἕνα πρόβλημα, ὅπου ζητοῦνται 18 ἄγνωστοι, συνδεόμενοι μεταξύ των μὲ ἑπτὰ γραμμικὰς σχέσεις. Ἐπειδή, ὡς ἐκ τῆς φύσεως τῶν ἀγνώστων, δὲν γίνονται δεκταὶ λύσεις κλασματικαὶ ἢ ἀρνητικαί, ἡ ἔρευνα ἀκολουθεῖ τὴν κατεύθυνσιν, πρὸς τὴν ὁποίαν θὰ ἐστρέφετο καὶ ἕνας σύγχρονος εὐρωπαῖος μαθηματικός.

Τὰ ἀναφερθέντα ἔργα δὲν εἶναι τὰ μόνα, ποὺ ἀπαντῶνται εἰς τὴν κινεζικὴν μαθηματικὴν βιβλιογραφίαν πρὸ τοῦ VI αἰῶνος. Τὰ ὑπόλοιπα ὅμως μὴ περισωθέντα — ἐκτὸς τῶν τίτλων των — δὲν δύνανται νὰ χρησιμεύσουν εἰς τίποτε ἄλλο, παρὰ μόνον ὡς μάρτυρες τῆς μαθηματικῆς δραστηριότητος τῶν Κινέζων.

Τετραγωνισμὸς τοῦ κύκλου

121. Πρὶν ἐξετάσωμεν ἄλλα διασωθέντα ἔργα, ἀλγεβρικοῦ χαρακτῆρος, παρατηροῦμεν ὅτι ὁ κινεζικὸς λαὸς ἔδειξε, κατὰ προτίμησιν, κλίσιν πρὸς τὴν ἐπιστήμην τοῦ ἀριθμοῦ μᾶλλον παρὰ πρὸς τὴν ἔρευναν τῶν ἰδιοτήτων τοῦ χώρου. Τὸ μοναδικὸν πρόβλημα γεωμετρίας, περὶ τὸ ὁποῖον κατέβαλε γονίμους προσπαθείας, εἶναι τὸ πρόβλημα τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου, οἱ δὲ πρῶτοι ποὺ ἠσχολήθησαν σοβαρῶς μὲ αὐτὸ δὲν ἀνάγονται εἰς τὴν πρὸ Χριστοῦ ἐποχήν.

Εἰς τὸν Chang Heng (78 - 139) ἀποδίδεται ἡ τιμὴ τῆς ἐγκαταλείψεως τῆς τιμῆς $\pi = 3$ ἔναντι τῆς ἀκριβεστέρας $\pi = \sqrt{10} = 3,1622777$, τὴν ὁποίαν πιθανῶς ἔμαθεν ἀπὸ τοὺς Ἰνδοὺς εἰσαγωγεῖς τοῦ Βουδδισμοῦ εἰς τὴν Κίναν.

Εἰς τὸν στρατηγὸν Wan - Fan (229 - 267) — φονευθέντα ὑπὸ τοῦ αὐτοκράτορός του διότι παρέστη εἰς συμβούλιον τοῦ στέμματος εἰς κατάστασιν μέθης — ἀποδίδεται ἡ ἀνακάλυψις τοῦ γεγονότος ὅτι μία περιφέρεια διαμέτρου 45 ἔχει μῆκος 142, ὅπερ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ νὰ δεχθῶμεν $\pi = 3,155$. Εἶναι ἄγνωστον πῶς ἔφθασεν εἰς τὸ ἀποτέλεσμα τοῦτο, τὸ ὁποῖον εἶναι κατά τι ἀκριβέστερον τῆς τιμῆς $\pi = \sqrt{10}$.

Περίπου κατὰ τὴν ἰδίαν ἐποχὴν ἔζησεν ὁ μαθηματικὸς Liu Hui, γνωστὸς ἤδη εἰς ἡμᾶς (§ 120), ὁ ὁποῖος, διὰ νὰ λύσῃ τὸ περίφημον πρόβλημα ἠκολούθησε τὴν ὁδὸν ποὺ εἶχεν ἤδη χαράξει ὁ Ἀρχιμήδης πέντε αἰῶνας προηγουμένως. Ἔκαμε δηλαδὴ ἀρχὴν μὲ τὸ ἐγγεγραμμένον κανονικὸν ἑξάγωνον καὶ μὲ διαδοχικὰς διχοτομήσεις τῶν τόξων ἐνόμισεν ὅτι θὰ φθάσῃ εἰς τὸν σκοπόν· ἀλλά, ἐνῷ ὁ Συρακούσιος, εἰς τὸ ἔργον του Ψαμμίτης (Arenarius), ἐσταμάτησεν εἰς τὸ πολύγωνον τῶν 96 πλευρῶν, ὁ Κινέζος ἐπροχώρησεν εἰς τὸ ἑπόμενον (μὲ 192 πλευράς), χωρὶς παρὰ ταῦτα νὰ εὕρῃ τιμὴν τοῦ π διάφορον τῆς ἀρχιμηδείου 3,14. Δὲν ἀποκλείεται, ὁ Liu Hui

νὰ συνέλαβε μόνος του τὸ σχέδιον τῆς καταστρώσεως ἑνὸς τοιούτου ὑπολογισμοῦ, ἀφοῦ ἐπρόκειτο περὶ ζητήματος ριζοβολήσαντος εἰς τὴν διάνοιαν ἄλλου θνητοῦ, πέντε αἰῶνας προηγουμένως. Ὁ γνωρίζων ἐν τούτοις τὰς σχέσεις, τὰς ὁποίας αἱ Ἰνδίαι ἀνέπτυξαν ἀφ' ἑνὸς μὲ τὴν Ἑλλάδα καὶ ἀφ' ἑτέρου μὲ τὸ Οὐράνιον Κράτος αἰσθάνεται εἰς τὴν ψυχήν του νὰ ἐγείρωνται σοβαραὶ ἀμφιβολίαι, ὡς πρὸς τὴν πρωτοτυπίαν τῆς κινεζικῆς ἐργασίας καὶ λυπεῖται, διότι κανένα τεκμήριον δὲν ὑπάρχει σήμερον ἱκανὸν ν' ἀποδείξῃ τὰς ἀμφιβολίας αὐτὰς ἀβασίμους καὶ διότι, ἀκόμη χειρότερον, ἡ προαναφερθεῖσα τιμὴ τοῦ π δὲν ἐξετόπισεν, ὅπως θὰ ἔπρεπεν, διὰ παντὸς ἄλλας τιμὰς μικροτέρας ἀκριβείας (ὡς εἶναι αἱ τιμαὶ 3 καὶ 3,1432).

Αἱ μελέται ἐπὶ τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου ἔδωσαν δύο αἰῶνας βραδύτερον ἕνα ἄλλον ἐξέχοντα τετραγωνιστήν — τὸν ἀστρονόμον Tsu Ch'ung-chih (430 - 501) — ὁ ὁποῖος ἐργαζόμενος ἐπὶ περιφερείας διαμέτρου 10^8 (ὀκτὰς τοῦ Ἀρχιμήδους), εὗρεν ὅτι εἶναι:

$$3{,}1415926 < \pi < 3{,}1415927$$

καὶ συνεπέρανεν ἐξ αὐτοῦ, ἐκτὸς τῆς ἀρχιμηδείου τιμῆς π = 22/7, ποὺ ἀπαντᾶται εἰς τὸν Ψαμμίτην τὴν ἀκόμη πλησιεστέραν:

$$\pi = \frac{355}{113},$$

τὴν ὁποίαν εἴδομεν (§ 41) ἀποδιδομένην ἐπίσης εἰς τὸν Ἀρχιμήδη. Ἀκόμη καὶ ἂν τὸ συμπέρασμα τοῦτο δὲν εἶναι πρωτότυπον, ἀποδεικνύει τὴν ἀνωτερότητα τοῦ Tsu Ch'ung μεταξὺ τῶν ὁμοεθνῶν του, οἱ ὁποῖοι, μὴ δυνάμενοι ν' ἀντιληφθοῦν τὴν ἀξίαν τοῦ ἐπιτευχθέντος ἀποτελέσματος, ταχέως καὶ τὸ ἐλησμόνησαν. Εἰς τὴν ἔνοχον αὐτὴν ἀμέλειαν ὀφείλεται πιθανῶς τὸ γεγονός, ὅτι τὸ ἔργον τοῦ Tsu Ch'ung θεωρεῖται σήμερον ἀνεπανορθώτως ἀπολεσθὲν καὶ ὅτι μάλιστα πᾶν ἴχνος ἐπὶ τῆς μεθόδου τῆς σκέψεως ἐχάθη ὁριστικῶς, εἰς τρόπον, ὥστε εὑρισκόμεθα εἰς πλήρη ἀδυναμίαν νὰ προσδιορίσωμεν τὰς ἀναλογίας καὶ τὰς διαφορὰς μὲ τὰς μεθόδους, ποὺ ἐχρησιμοποίησαν οἱ μαθηματικοὶ εἰς τὴν Εὐρώπην, προηγουμένως καὶ μετὰ ταῦτα.

Τὰ ἔργα ἀλγέβρας

122. Ἐπιστρέφοντες εἰς τὴν ἐξέτασιν τῶν ἐργασιῶν, τῶν σχετιζομένων μὲ τὴν ἄλγεβραν, παρατηροῦμεν πρὸ πάντων, ὅτι ἐκ τῶν μέχρι τοῦδε ὑφισταμένων τεκμηρίων, φαίνεται ὅτι οἱ Κινέζοι ἀπὸ τοῦ Ι αἰῶνος π.Χ. ἦσαν εἰς θέσιν νὰ δώσουν τὴν λύσιν δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως μὲ ἀριθμητικοὺς συντελεστάς, καὶ ὅτι ἐξηκολούθησαν νὰ πραγματεύωνται προβλήματα, ἀναφερόμενα μέχρι τοῦ VI αἰῶνος μ.Χ. Ζητήματα ὑψηλοτέρας στάθ-

νὰ συνέλαβε μόνος του τὸ σχέδιον τῆς καταστρώσεως ἑνὸς τοιούτου ὑπολογισμοῦ, ἀφοῦ ἐπρόκειτο περὶ ζητήματος ριζοβολήσαντος εἰς τὴν διάνοιαν ἄλλου θνητοῦ, πέντε αἰῶνας προηγουμένως. Ὁ γνωρίζων ἐν τούτοις τὰς σχέσεις, τὰς ὁποίας αἱ Ἰνδίαι ἀνέπτυξαν ἀφ' ἑνὸς μὲ τὴν Ἑλλάδα καὶ ἀφ' ἑτέρου μὲ τὸ Οὐράνιον Κράτος αἰσθάνεται εἰς τὴν ψυχήν του νὰ ἐγείρωνται σοβαραὶ ἀμφιβολίαι, ὡς πρὸς τὴν πρωτοτυπίαν τῆς κινεζικῆς ἐργασίας καὶ λυπεῖται, διότι κανένα τεκμήριον δὲν ὑπάρχει σήμερον ἱκανὸν ν' ἀποδείξῃ τὰς ἀμφιβολίας αὐτὰς ἀβασίμους καὶ διότι, ἀκόμη χειρότερον, ἡ προαναφερθεῖσα τιμὴ τοῦ π δὲν ἐξετόπισεν, ὅπως θὰ ἔπρεπεν, διὰ παντὸς ἄλλας τιμὰς μικροτέρας ἀκριβείας (ὡς εἶναι αἱ τιμαὶ 3 καὶ 3,1432).

Αἱ μελέται ἐπὶ τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου ἔδωσαν δύο αἰῶνας βραδύτερον ἕνα ἄλλον ἐξέχοντα τετραγωνιστὴν — τὸν ἀστρονόμον Tsu Ch' ung - chih (430 - 501) — ὁ ὁποῖος ἐργαζόμενος ἐπὶ περιφερείας διαμέτρου 10^8 (ὀκτὰς τοῦ Ἀρχιμήδους), εὗρεν ὅτι εἶναι :

$$3{,}1415926 < \pi < 3{,}1415927$$

καὶ συνεπέρανεν ἐξ αὐτοῦ, ἐκτὸς τῆς ἀρχιμηδείου τιμῆς $\pi = 22/7$, ποὺ ἀπαντᾶται εἰς τὸν Ψ α μ μ ί τ η ν τὴν ἀκόμη πλησιεστέραν :

$$\pi = \frac{355}{113},$$

τὴν ὁποίαν εἴδομεν (§ 41) ἀποδιδομένην ἐπίσης εἰς τὸν Ἀρχιμήδη. Ἀκόμη καὶ ἂν τὸ συμπέρασμα τοῦτο δὲν εἶναι πρωτότυπον, ἀποδεικνύει τὴν ἀνωτερότητα τοῦ Tsu Ch'ung μεταξὺ τῶν ὁμοεθνῶν του, οἱ ὁποῖοι, μὴ δυνάμενοι ν' ἀντιληφθοῦν τὴν ἀξίαν τοῦ ἐπιτευχθέντος ἀποτελέσματος, ταχέως καὶ τὸ ἐλησμόνησαν. Εἰς τὴν ἔνοχον αὐτὴν ἀμέλειαν ὀφείλεται πιθανῶς τὸ γεγονός, ὅτι τὸ ἔργον τοῦ Tsu Ch'ung θεωρεῖται σήμερον ἀνεπανορθώτως ἀπολεσθὲν καὶ ὅτι μάλιστα πᾶν ἴχνος ἐπὶ τῆς μεθόδου τῆς σκέψεως ἐχάθη ὁριστικῶς, εἰς τρόπον, ὥστε εὑρισκόμεθα εἰς πλήρη ἀδυναμίαν νὰ προσδιορίσωμεν τὰς ἀναλογίας καὶ τὰς διαφορὰς μὲ τὰς μεθόδους, ποὺ ἐχρησιμοποίησαν οἱ μαθηματικοὶ εἰς τὴν Εὐρώπην, προηγουμένως καὶ μετὰ ταῦτα.

Τὰ ἔργα ἀλγέβρας

122. Ἐπιστρέφοντες εἰς τὴν ἐξέτασιν τῶν ἐργασιῶν, τῶν σχετιζομένων μὲ τὴν ἄλγεβραν, παρατηροῦμεν πρὸ πάντων, ὅτι ἐκ τῶν μέχρι τοῦδε ὑφισταμένων τεκμηρίων, φαίνεται ὅτι οἱ Κινέζοι ἀπὸ τοῦ I αἰῶνος π.Χ. ἦσαν εἰς θέσιν νὰ δώσουν τὴν λύσιν δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως μὲ ἀριθμητικοὺς συντελεστάς, καὶ ὅτι ἐξηκολούθησαν νὰ πραγματεύωνται προβλήματα, ἀναφερόμενα μέχρι τοῦ VI αἰῶνος μ.Χ. Ζητήματα ὑψηλοτέρας σταθ-

μης ἀρχίζουν νὰ ἐμφανίζωνται, κατὰ τὸ πρῶτον ἥμισυ τοῦ ἑπομένου αἰῶνος, εἰς ἕνα ἔργον τοῦ Wang Hs'iao - t'ung, σωζόμενον σήμερον ἐν μέρει. Μεταξὺ τῶν προβλημάτων, ποὺ περιέχονται εἰς τὸ ἔργον τοῦτο, ἀναφέρομεν τρία ἐπὶ τῶν ὁποίων θὰ εἴπωμεν μερικὰς λέξεις.

I. «Εἰς ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ γινόμενον P τῶν καθέτων ἰσοῦται πρὸς 706 $^1/_{50}$, ἡ δὲ ὑποτείνουσα ὑπερβαίνει τὴν μίαν τῶν καθέτων κατὰ s = 36 $^9/_{10}$*. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τρεῖς πλευραί». Δι' ἀπαλοιφῆς τοῦ y μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων:

$$xy = P, \quad \sqrt{x^2+y^2} - x = s,$$

εὑρίσκομεν εὐκόλως μίαν ἐξίσωσιν τρίτου βαθμοῦ.

Ὁ συγγραφεὺς βεβαιώνει ὅτι πρὸς λύσιν αὐτῆς ἐχρησιμοποιεῖτο μία μέθοδος ἀνάλογος πρὸς τὴν ἐξαγωγὴν κυβικῆς ρίζης, ἡ ὁποία ὅμως ὤφειλε νὰ εἶναι προσεγγιστικὴ ὡς ἐφαρμόσιμος ἀποκλειστικῶς εἰς ἀριθμητικὰς ἐξισώσεις. Παρὰ ταῦτα ἡ μέθοδος πρέπει νὰ ἦτο ἐκπληκτικῶς τελεία ἐφ' ὅσον ἔδωσεν ὡς ἀποτέλεσμα τοὺς ἀριθμοὺς 14 $^7/_{20}$, 49 $^1/_5$, 51 $^1/_4$, οἱ ὁποῖοι ἐπαληθεύουν ἀ κ ρ ι β ῶ ς τὰ ἐπιτάγματα τοῦ προβλήματος. Τούτων οὕτως ἐχόντων πῶς ν' ἀπομακρύνωμεν τὴν ὑποψίαν ὅτι ὁ λύτης ὑπερηφανεύθη ὅτι ἐγνώριζε πράγματα περισσότερα τῶν ὅσων τοῦ ἐπέτρεπον αἱ δυνάμεις του καὶ ὅτι, εἰς τὴν πραγματικότητα, οἱ ἀνωτέρω ἀριθμοὶ τοῦ ἦσαν γνωστοὶ προτοῦ ἐπιχειρήσῃ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος;

II. «Εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ γινόμενον P τῆς μιᾶς καθέτου ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ἰσοῦται πρὸς 1337 $^1/_{20}$, ἐνῷ ἡ διαφορὰ μεταξὺ ὑποτεινούσης καὶ τῆς ἄλλης καθέτου ἰσοῦται πρὸς D = 1/10. Ζητεῖται ἡ τελευταία αὕτη κάθετος».

Ἐὰν εἶναι x, y αἱ κάθετοι, ὑφίστανται αἱ σχέσεις:

$$y\sqrt{x^2+y^2} = P, \quad \sqrt{x^2+y^2} - x = D,$$

ἐκ τῶν ὁποίων εὐκόλως ἐξάγεται μία κυβικὴ ἐξίσωσις τοῦ x:

$$(x+D)^2 (2Dx+D^2) = P^2,$$

ἐκ τῆς ὁποίας θὰ ληφθῇ ὁ ἄγνωστος x. Κατὰ τὸν Κινέζον συγγραφέα εἰς τὰ ἀριθμητικὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος ἀνταποκρίνεται ἡ τιμὴ x = 92 $^2/_5$.

III. «Σιτοβολὼν ἔχει τὸ σχῆμα κολούρου τετραγωνικῆς πυραμίδος. Ἡ διαφορὰ D μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῶν βάσεων εἶναι 6 ἐνῷ τὸ ὕψος ὑπερβαίνει τὴν πλευρὰν τῆς ἀνωτέρας βάσεως κατὰ G = 9. Ὁ σιτοβολὼν περιέχει P = 187,2 μέτρα σίτου, ἐκ τοῦ ὁποίου ἀφαιροῦνται P' = 50,4. Ποῖα θὰ εἶναι τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τῆς ἄνω καὶ κάτω βάσεως τοῦ σιτοβολῶνος, ὡς καὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ, ἔτι δὲ τὸ βάθος καὶ ἡ πλευρὰ τῆς ἄνω βάσεως τοῦ ὑπολειφθησομένου ὄγκου τοῦ σιτοβολῶνος;»

* Ὁ Mikami γράφει ἐκ παραδρομῆς 9/60

Περιοριζόμεθα χάριν συντομίας εἰς τὸ πρῶτον μέρος τοῦ προβλήματος. Ἔστω x ἡ πλευρὰ τῆς ἄνω βάσεως, y ἡ πλευρὰ τῆς κάτω βάσεως καὶ z τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ. Κατ' ἐφαρμογὴν τοῦ τύπου, ποὺ ἐκφράζει τὸν ὄγκον κολούρου πυραμίδος (τύπου ἀπαντωμένου εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν εἰς ἐννέα μέρη), φθάνομεν εἰς τὸ σύστημα :

$$\begin{cases} z(x^2+xy+y^2)=3P \\ y-x=D \\ z-x=G \end{cases}$$

ἐκ τοῦ ὁποίου, δι' ἀπαλοιφῆς τῶν y καὶ x, εὑρίσκομεν μίαν κυβικὴν ἐξίσωσιν, ἡ ὁποία διὰ $D=6$ καὶ $G=9$ γίνεται :

$$x^3+15x^2+66x=79{,}2\,.$$

Ἐπειδὴ τὸ πρῶτον μέλος εἶναι αὔξουσα συνάρτησις τοῦ x, ἥτις διὰ $x=1$, λαμβάνει τὴν τιμὴν 82, εἶναι σαφὲς ὅτι ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις δὲν δύναται νὰ ἔχῃ ρίζας μεγαλυτέρας τοῦ 1. Περαιτέρω δὲν δύναται νὰ ἔχῃ ρίζας ἀκεραίας, διότι ἕνας ἀκέραιος δὲν δύναται νὰ ἰσοῦται πρὸς ἕνα κλάσμα. Κατ' ἀκολουθίαν εἶναι ἀπαράδεκτον τὸ ἀποτέλεσμα $x=3$, τὸ ὁποῖον φέρεται ὡς εὑρεθὲν εἰς τὴν Κίναν.

Ἡ μετρία ἐπιτυχία, τὴν ὁποίαν εἶχεν ὁ συγγραφεὺς εἰς τὰς προσπαθείας του νὰ λύσῃ τὰς κυβικὰς ἐξισώσεις τῶν προβλημάτων II καὶ III, ἐνισχύει τὰς ἀμφιβολίας ποὺ διετυπώσαμεν, ὡς πρὸς τὴν ὑπὸ τοῦ ἰδίου λύσιν καὶ τῆς ἐξισώσεως, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνάγεται τὸ πρόβλημα I.

123. Διάφορον χαρακτῆρα ἔχει ἕνα μαθηματικὸν χωρίον, ἀναγόμενον εἰς τὸν XI αἰῶνα, τὸ ὁποῖον ἐφείλκυσε προσφάτως τὴν προσοχὴν (G. Vacca). Γίνεται ἐκεῖ λόγος διὰ μίαν «σκακιέραν» (δηλαδὴ πινακίδα ζατρικίου), διῃρημένην εἰς n^2 τετραγωνίδια, μέσῳ τῆς ὁποίας δύναται νὰ παιχθῇ ἕνα παίγνιον (ποὺ λέγεται πολιορκία), εἰς τὸ ὁποῖον κάθε τετραγωνίδιον ἠμπορεῖ νὰ παραμένῃ κενὸν ἢ νὰ καταληφθῇ ἀπὸ ἕνα πεσσὸν χρώματος λευκοῦ ἢ μαύρου. Καὶ ἐρωτᾶται κατὰ πόσους τρόπους δύναται νὰ γίνῃ τοῦτο. Ἡ ἀπάντησις εἶναι προφανῶς 3^{n^2}. Εὑρισκόμεθα λοιπὸν ἐδῶ ἐνώπιον ἑνὸς προβλήματος συνδυαστικῆς ; Εἶναι θεμιτὸν ν' ἀμφιβάλλωμεν, τοὐλάχιστον ἐφ' ὅσον ἀποδίδεται εἰς τὴν ὀνομασίαν του ἡ συνήθης ἔννοια. Ἀλλὰ τὸ πλέον ἀξιοσημείωτον εἶναι ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν λύσεων τοῦ προβλήματος ἀνέρχεται μὲ ἰλιγγιώδη ταχύτητα· διὰ $n=6$ ἔχομεν ἤδη

15009463529699121,

ἐνῷ διὰ $n=7$ ὁ συγγραφεὺς δηλοῖ, ὅτι δὲν διαθέτει ψηφία ἀρκετὰ διὰ νὰ ἐκφράσῃ τὸν ἀριθμὸν τῶν λύσεων καὶ διὰ ν' ἀποφύγῃ τὸν σκόπελον προ-

τείνει τεχνάσματα συμπίπτοντα κατ' οὐσίαν πρὸς ἐκεῖνα ποὺ ἐχρησιμοποίησεν ἤδη ὁ Ἀρχιμήδης εἰς τὸν Ψ α μ μ ί τ η ν· τότε δύναται νὰ πραγματευθῇ ἀκόμη καὶ τὴν περίπτωσιν n = 19, ποὺ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ὑπὸ τῶν συμπατριωτῶν του χρησιμοποιουμένην πινακίδα. Γεννᾶται οὕτω τὸ πρόβλημα κατὰ πόσον εὑρισκόμεθα ἐνώπιον τυχαίας συμπτώσεως ἢ πρὸ μιᾶς ἀποδείξεως τῶν σχέσεων μεταξὺ Κίνας καὶ Ἑλλάδος, χωρὶς βεβαίως νὰ ὑπάρχῃ τρόπος ν' ἀποφανθῶμεν ἐπὶ τούτου τελεσιδίκως.

Εἰς τὸν αὐτὸν XI αἰῶνα ἀνήκουν μερικὰ Ὑ π ο μ ν ή μ α τ α, γραφέντα ὑπὸ τοῦ ἀστρονόμου Ch' en Hus (1011 — 1075) εἰς τὰ ὁποῖα εὑρίσκεται ὁ ἀκόλουθος προσεγγιστικὸς κανὼν πρὸς εὐθειοποίησιν τόξου περιφερείας:

$$\text{τόξον} = \text{χορδή} + \frac{2\,(\text{βέλος})^2}{\text{διάμετρος}}\,.$$

124. Διὰ τὴν Κίναν ὁ XIII αἰὼν ὑπῆρξεν ἕνας ἀπὸ τοὺς πλέον ταραχώδεις καὶ βασανιστικούς, ἐξ ὅσων ἐνθυμεῖται ἡ ἱστορία, διότι, ἀκριβῶς εἰς τὴν ἀρχὴν τούτου, ἐνεφανίσθη εἰς τὴν σκηνὴν τοῦ κόσμου ὁ περίφημος τάταρος κατακτητὴς Gengis Kahn. Παρὰ ταῦτα περὶ τὸ μέσον τοῦ αἰῶνος τούτου — ἀκριβῶς, τὸ ἔτος 1257 — εἶδε τὸ φῶς τὸ σημαντικὸν ἔργον Ἐ ν ν έ α μ έ ρ η τ ῶ ν μ α θ η μ α τ ι κ ῶ ν, ὀφειλόμενον εἰς τὸν ἀστρονόμον Chi'n Chiu - shao, ὅπου διὰ πρώτην φορὰν ἐμφανίζεται τὸ μηδὲν ὑπὸ τὴν μορφὴν ἑνὸς κυκλίσκου. Κατ' ἀπομίμησιν τῶν ἔργων, ποὺ ἐξητάσαμεν ἤδη προηγουμένως, πρόκειται περὶ μιᾶς συλλογῆς λελυμένων προβλημάτων, κατανεμημένων εἰς δεκαοκτὼ κεφάλαια.

Ἀξιοσημείωτον εἶναι τὸ χωρίον τὸ ἀποβλέπον εἰς δικαιολογίαν τῆς μεθόδου, τὴν ὁποίαν εἴδομεν ἤδη ἐφαρμοζομένην εἰς τὸν προσδιορισμὸν ἑνὸς ἀριθμοῦ, ὁ ὁποῖος διαιρούμενος διαδοχικῶς διὰ τῶν ἀριθμῶν 3, 5, 7 νὰ δίδῃ ὑπόλοιπα 2, 3, 2. Προσθέτομεν ὅτι ἡ αὐτὴ μέθοδος ἐφαρμόζεται εἰς ἄλλα προβλήματα, τῆς αὐτῆς φύσεως, ἐνδιαφέροντα τὴν ἀστρονομίαν. Φαίνεται δὲ ὅτι ἀκριβῶς τὰ τελευταῖα ἔδωσαν εἰς τοὺς Κινέζους τὴν ἀφορμὴν πρὸς μελέτην τοῦ «προβλήματος τῶν ὑπολοίπων».

Εἰς τὸ αὐτὸ ἔργον χρησιμοποιοῦνται ἀναμὶξ οἱ ἀριθμοὶ 3, 22/7, $\sqrt{10}$, ὡς προσεγγιστικαὶ τιμαὶ τοῦ π. Ἐφαρμόζεται ἐπίσης, διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ἐμβαδοῦ ἑνὸς τριγώνου συναρτήσει τῶν πλευρῶν α, β, γ, μία ἔκφρασις, ἡ ὁποία σήμερον δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον:

$$E = \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2\gamma^2 - \left(\frac{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}{2}\right)^2}\,.$$

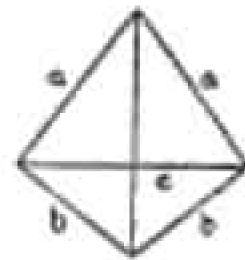
Ἐξ ὅσων εἶναι γνωστά, δὲν συνάγεται, ὅτι οἱ Κινέζοι ἐγνώριζον τὴν ἰσοδύναμον ἔκφρασιν τοῦ ἐμβαδοῦ τριγώνου:

$$E = \sqrt{\tau\,(\tau-\alpha)\,(\tau-\beta)\,(\tau-\gamma)}.$$

Δὲν εἶναι λοιπὸν καὶ ἐδῶ δυνατὸν νὰ βεβαιώσωμεν κατὰ πόσον ἔχομεν σημεῖον ἐπαφῆς μεταξὺ ἄπω Ἀνατολῆς καὶ ἀρχαίας Ἑλλάδος ἢ μίαν ἁπλῆν σύμπτωσιν.

Μεταξὺ τῶν λελυμένων προβλημάτων τοῦ ἐξεταζομένου ἔργου, μᾶς φαίνονται ἄξια κάποιας προσοχῆς τὰ ἑξῆς :

I. Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ἐμβαδοῦ ἑνὸς τετραπλεύρου ἔχοντος δύο ζεύγη πλευρῶν (a, b), μεταξύ των ἴσων, μιᾶς πρὸς μίαν (σχ. 17), καὶ τοῦ ὁποίου εἶναι γνωστὴ ἡ διαγώνιος c, ἡ ἑνοῦσα κορυφὰς εἰς τὰς ὁποίας συντρέχουν ἄνισοι πλευραί, προτείνεται ἡ λύσις τῆς ἐξισώσεως.



Σχ. 17

$$-(B-A)^2 + 2(A+B)x^2 - x^4 = 0 \qquad (\alpha)$$

ὅπου ἐτέθη :

$$A = \left(\beta^2 - \frac{c^2}{4}\right)\frac{c^2}{4}, \quad B = \left(\alpha^2 - \frac{c^2}{4}\right)\frac{c^2}{4}.$$

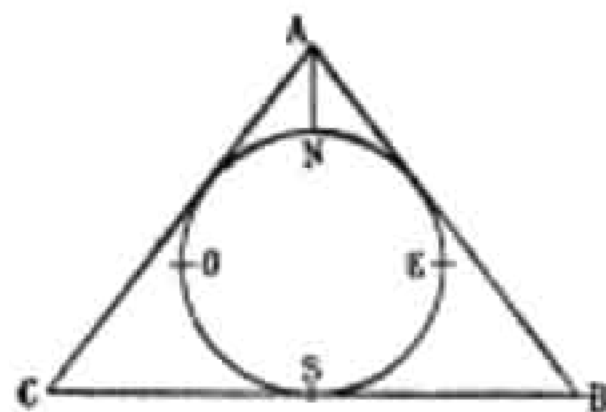
Θὰ ἔλεγε κανείς, ὅτι ἐπεζητήθη ἐδῶ, ἀπὸ σκοποῦ, ἡ ἄνευ ὠφελείας τινος περιπλοκὴ ἁπλουστάτου ζητήματος. Πράγματι, ἀμέσως ἐκ τοῦ σχήματος, λαμβάνεται ἡ ἑτέρα διαγώνιος, ἴση πρὸς

$$\sqrt{a^2 - \frac{c^2}{4}} + \sqrt{b^2 - \frac{c^2}{4}}$$

ὁπότε, διὰ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου, θὰ ἔχωμεν ἀμέσως :

$$x = \frac{c}{2}\left(\sqrt{\alpha^2 - \frac{c^2}{4}} + \sqrt{b^2 - \frac{c^2}{4}}\right). \qquad (\beta)$$

Ἐὰν τώρα ἀπαλλάξωμεν τὴν ἔκφρασιν ταύτην ἀπὸ τὰ ριζικὰ θὰ εὕρωμεν τὴν ἐξίσωσιν (α), ἡ ὁποία φυσικά, ἐκτὸς τῆς (β), ἔχει καὶ ἄλλας ρίζας ἀσχέτους πρὸς τὸ πρόβλημα.



Σχ. 18

II. «Ὑπάρχει ἕνας πύργος κυκλικῆς βάσεως (σχ. 18) μὲ 4 εἰσόδους ἀντιστοιχούσας εἰς τὰ 4 σημεῖα τοῦ ὁρίζοντος. Εἰς ἀπόστασιν $a = 3$ ἀπὸ τῆς βορείας θύρας ἔχει φυτευθῆ δένδρον A ὁρατὸν ἐκ σημείου B κειμένου εἰς ἀπόστασιν $b = 9$ ἀπὸ τῆς νοτίας θύρας. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας καὶ ἡ διάμετρος τοῦ πύργου, ἐὰν γίνῃ δεκτὸν $\pi = 3$».

Ὁ ἱστορικός, ἀπὸ τὸν ὁποῖον ἀντλοῦμεν, βεβαιώνει, ὅτι τὸ πρόβλημα τοῦτο λύεται μέσῳ τῆς ἐξισώσεως :

$$1 \cdot x^{10} + 7a\,x^8 + 8a^2x^6 - 4(b^2 - a^2)\,x^4$$
$$- 2b^2 \cdot 8a^2x^2 - 2b^2 \cdot 8a^2 \cdot b = 0,$$

«ἡ ὁποία, ὑποβαλλομένη εἰς τοὺς χειρισμοὺς μιᾶς ἐξισώσεως 10ου βαθμοῦ, παρέχει διὰ τὴν ζητουμένην διάμετρον τὴν τιμὴν $x = 9$».

Ἂς κάμωμεν, διὰ λογαριασμόν μας, μερικὰς παρατηρήσεις: a) Εἰς τὸν 4ον ὅρον πρέπει βεβαίως ἀντὶ x^3 νὰ θέσωμεν x^4, μερικοὶ δὲ συντελεσταὶ ἐπιδέχονται εὐκόλως συμπτύξεις. b) Ἡ ἐν λόγῳ ἐξίσωσις μεταπίπτει ἀμέσως εἰς τὸν 5ον βαθμόν. Ἐξ ἄλλου δὲν εἶναι σαφὲς τί θέλει νὰ σημάνῃ, λέγων «χειριζόμενοι τὴν δοθεῖσαν, ὡς ἐξίσωσιν 10ου βαθμοῦ», ἀφοῦ τίποτε τὸ ἰδιαίτερον δὲν εἶναι γνωστὸν διὰ τὴν λύσιν τοιούτων ἐξισώσεων. c) Ἐὰν καλέσωμεν x τὴν ἀκτῖνα τοῦ πύργου καὶ θεωρήσωμεν τὸ σημεῖον C, συμμετρικὸν τοῦ B ὡς πρὸς τὴν θύραν τοῦ Νότου S, γεννᾶται οὕτω ἕνα τρίγωνον ABC εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι ἐγγεγραμμένος ὁ κύκλος ἀκτῖνος x. Ἐκφράζοντες τὸ ἐμβαδὸν κατὰ δύο διαφόρους τρόπους, ὑπαγορευομένους ἐξ ἁπλῆς ἐποπτείας τοῦ σχήματος, εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$x\,(2b + \sqrt{a^2 + 2ax}) = b\,(2x + a)$$

ἢ τὴν ἰσοδύναμον:

$$2x^3 + ax^2 - ab^2 = 0.$$

Τὸ πρόβλημα ἑπομένως δὲν ἀπαιτεῖ νὰ δεχθῶμεν $\pi = 3$, οὔτε ἐξαρτᾶται ἀπὸ ἐξίσωσιν 10ου βαθμοῦ. Τὸ μὴ ἐλαφρὸν αὐτὸ σφάλμα ἐπιβεβαιώνει τὴν φήμην, ὅτι ὁ Chi'n ἔχει μεγαλυτέραν δεξιότητα εἰς τὸ νὰ λύνῃ, ἀπὸ τοῦ νὰ καταστρώνῃ τὰς ἐξισώσεις. Εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν $a = 3$, $b = 9$, ἡ προηγουμένη ἐξίσωσις γίνεται:

$$2x^3 + 3x^2 - 3^5 = 0$$

Ἡ ἐξίσωσις ἐπιδέχεται τὸν μετασχηματισμόν:

$$2x\,[(x+3)^2 + 18] = 9\,[(x+3)^2 + 18],$$

ἐκ τοῦ ὁποίου καταφαίνεται, ὅτι τὸ πρόβλημα ἔχει μοναδικὴν πραγματικὴν λύσιν $x = 9/2$, ἐντελῶς σύμφωνον πρὸς τὴν διαβεβαίωσιν, ποὺ ἐδόθη, ὡς εἴδομεν προηγουμένως, ὅτι δηλαδὴ ἡ διάμετρος τοῦ πύργου προκύπτει ἴση πρὸς 9.

Ἐξ ἄλλου ἡ 10ου βαθμοῦ ἐξίσωσις ἡ ἀναφερομένη ὑπὸ τοῦ ἰάπωνος ἱστορικοῦ δὲν ἐπαληθεύεται διὰ $a = 3$, $b = 9$, $x = 9$!... Πῶς νὰ συμφιλιώσωμεν τὰ ἀντιφατικὰ αὐτὰ γεγονότα; Ἂς ἔλθουν ἄλλοι ἱκανώτεροι ἀπὸ ἡμᾶς νὰ εὕρουν διέξοδον. Ἐκεῖνο, ἐπὶ τοῦ ὁποίου δὲν χωρεῖ ἀμφιβολία, εἶναι ἡ ὡραιότης τοῦ προβλήματος καὶ ἡ ἀσυνήθης ὀξυδέρκεια εἰς τὴν ἐκλογὴν τῶν ἀριθμητικῶν δεδομένων. Ἀλλ' ἐξ ὅσων πρόκειται νὰ ἐκθέσωμεν (ὅπως ἄλλωστε καὶ ἐξ ἄλλων, τὰ ὁποῖα ἤδη εἴπομεν) συνάγεται, ὅτι ἡ ἀξιόλογος αὐτὴ ἰδιότης δὲν ἀποτελεῖ ἀποκλειστικὸν προνόμιον τοῦ Chi'n Chiu - shao, ἂν αὐτὸς συνέθεσε τὸ προηγούμενον πρόβλημα, ἢ ἐκείνων τοὺς ὁποίους εἶχε διδασκάλους.

125. Ἂς ἐξετάσωμεν, πράγματι, τὴν ἀκόλουθον ἐξίσωσιν, τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν διὰ νὰ δείξωμεν τὴν μέθοδον ποὺ χρησιμοποιοῦν οἱ Κινέζοι διὰ τὴν λύσιν τῶν ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων μὲ ἀριθμητικοὺς συντελεστάς :

(1) $$x^4-763200\,x^2-40642560000=0$$

Γεννᾶται εὐλόγως τὸ ἐρώτημα : οἱ συντελεσταὶ ἐξελέγησαν εἰς τὴν τύχην ; Διὰ ν' ἀπαντήσωμεν εἰς τὸ ἐρώτημα παρατηροῦμεν πρὸ παντὸς ἄλλου, ὅτι διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως :

(2) $$x^2=100\,y$$

ἡ προταθεῖσα ἐξίσωσις γίνεται :

(3) $$y^2-7632y+4064256=0$$

ἢ $$(y-3816)^2=3240^2$$

ἐντεῦθεν $y=3816\pm3240$. Αἱ δύο λοιπὸν ῥίζαι τῆς (3) εἶναι :

$$7056=84^2 \quad \text{καὶ} \quad 576=24^2,$$

αἱ δὲ τέσσαρες ῥίζαι τῆς (1), λαμβανόμεναι ἐκ τῆς (2), θὰ εἶναι : $\pm$ 840 καὶ $\pm$ 240. Κατὰ συνέπειαν, δὲν εἶναι δυνατὸν παρὰ ἡ ἐξίσωσις (1) νὰ συνετέθη ἐπίτηδες καί, κατὰ πᾶσαν πιθανότητα, ὁ λύτης ἐγνώριζε τὰς ῥίζας τῆς ἐξισώσεως ἐκ τῶν προτέρων.

Ὁ Chi'n Chiu δὲν ἐπωφελεῖται διόλου τῆς δυνατότητος καταβιβασμοῦ τοῦ βαθμοῦ ἀπὸ τὸν 4ον εἰς τὸν 2ον, προτιθέμενος νὰ δείξῃ γενικὴν μέθοδον λύσεως. Ἀρχίζει λοιπὸν μὲ τὴν βεβαίωσιν : «βλέπομεν ὅτι τὸ πρῶτον ψηφίον τῆς ῥίζης εἶναι 8 ». Πῶς τὸ «βλέπομεν» οὐδαμοῦ γίνεται λόγος, εἶναι λοιπὸν θεμιτὴ ἡ ὑποψία, ὅτι ἡ ἐξίσωσις εἶχε καταστρωθῆ διὰ τῆς συνδρομῆς του. Οὔτε διδάσκει, εἰς ἄλλας περιπτώσεις, διὰ ποίας μεθόδου δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τὸ πρῶτον ψηφίον μιᾶς ῥίζης. Ἐκθέτει μόνον ἕνα ἀλγόριθμον, τοῦ ὁποίου δὲν ἀποκαλύπτει τὴν θεωρητικὴν βάσιν, ἀλλὰ τοῦ ὁποίου ἡ ταυτότης μὲ τὴν μέθοδον Ruffini- Horner εἶναι ἐξόφθαλμος. Διὰ τοῦ τρόπου τούτου μετασχηματίζει τὴν ἐξίσωσιν (1) εἰς τήν :

(4) $$z^4+3200z^3+3076800z^2+826830000z-38205440000=0$$

Τὸ πρῶτον ψηφίον τῆς ῥίζης τῆς (4) εἶναι τὸ δεύτερον τῆς (1). Χωρὶς κανὲν ἐπιχείρημα εἰς ὑποστήριξιν τῶν λεγομένων του, βεβαιώνει πάλιν ὅτι τοῦτο τὸ ψηφίον εἶναι 4, καὶ ἡ ζητουμένη ῥίζα 840. Διατί ὅμως δὲν εἶναι 84 ἢ 8400 κλπ., καμμία ἐξήγησις. Καὶ εἶναι δυνατὸν ὁ συγγραφεὺς νὰ μὴν ἦτο εἰς θέσιν νὰ δικαιολογήσῃ τὸ ἐξαγόμενον, ὡς μὴ ἔχων προηγουμένως προσδιορίσει τὰ ὅρια τῶν ῥιζῶν τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

Ἐὰν συγκρίνωμεν τὴν ἐκτεθεῖσαν μέθοδον μὲ αὐτὴν ποὺ χρησιμοποιεῖται σήμερον, παρουσιάζεται μεταξύ των ἐκπληκτικὴ ὁμοιότης ἀπὸ ἀλγοριθμικῆς ἀπόψεως, ἀλλ' εἰς τὴν πρώτην ὑπάρχουν τόσον πολλὰ καὶ μεγάλα κενά, ὥστε δὲν δύναται νὰ δοθῇ ἄλλη ἐξήγησις, πλὴν τοῦ ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλήφθη ἐξ ἄλλης πηγῆς καὶ ὅτι κατὰ τὴν ἀντιγραφὴν ἐσημειώθη μόνον τὸ μηχανικὸν μέρος τῆς μεθόδου.

Δυστυχῶς τὰ κενὰ αὐτὰ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ συμπληρωθοῦν οὔτε ἂν ἀνατρέξωμεν εἰς μίαν ἄλλην διτετράγωνον ἐξίσωσιν, τὴν ὁποίαν ἔλαβεν ὁ Biernatzki ὡς παράδειγμα τῆς αὐτῆς μεθόδου λύσεως μιᾶς ἐξισώσεως μὲ ἀριθμητικοὺς συντελεστάς.

Φαίνεται ὅτι ὁ Chi' n ἐγνώριζε μέθοδον νὰ προσεγγίζῃ τὰς μὴ ἀκεραίας ρίζας τῶν ἀριθμητικῶν ἐξισώσεων. Μαρτυρεῖται πράγματι ὅτι ὁ ἴδιος εὗρε διὰ $a = 576$ καὶ $b = 34$, ὡς προσεγγίζουσαν ρίζαν τῆς ἐξισώσεως:

$$(a+b)^2 \cdot 10 = \left(\frac{\alpha^2}{4} - \frac{\beta^2}{4}\right)x + x^2$$

τὴν τιμὴν $10871\ \frac{5231}{63070}$, «ὅπου ἴσως ὁ παρανομαστὴς ἐδιχοτομήθη ἐσφαλμένως», χωρὶς οὔτε λέξις νὰ προστίθεται εἰς ἐξήγησιν τῆς ὁδοῦ, ἡ ὁποία ὡδήγησεν εἰς αὐτὸ τὸ ἐξαγόμενον, πρᾶγμα ἰδιαιτέρως λυπηρόν, καθ' ὅσον τὸ σχῆμα Ruffini — Horner δίδει τὰς μὴ ἀκεραίας ρίζας τῶν ἐξισώσεων ὑπὸ τὴν μορφὴν οὐχὶ κοινῶν ἀλλὰ δεκαδικῶν κλασμάτων. Πρὸς ἐπαλήθευσιν τῆς εὑρεθείσης τιμῆς, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ πρὸς λύσιν ἐξίσωσις γράφεται :

$$10^4 \cdot 61^2 = 61 \cdot 5 \cdot 271 \cdot x + x^2$$

καὶ διὰ νὰ τὴν ἁπλοποιήσωμεν δυνάμεθα νὰ θέσωμεν $x = 61y$, ὅτε λαμβάνομεν :

$$y^2 + 5 \cdot 271\, y - 610000 = 0$$

καὶ ἐξ αὐτῆς :

$$y = \frac{-5 \cdot 271 \pm \sqrt{5^2 \cdot 271^2 + 4 \cdot 610000}}{2}$$

Τὸ ὑπόρριζον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς $5^2 . 171041$. Ἐξ ἄλλου τὸ μέγιστον τετράγωνον κάτω τοῦ 171041 εἶναι 413^2, ὅθεν κατ' ἐφαρμογὴν τοῦ γνωστοῦ τύπου προσεγγίσεως :

$$\sqrt{m^2 + n} = m + \frac{n}{2m},$$

προκύπτει :

$$171041 = 413 + \frac{236}{413}.$$

Ἐὰν συγκρίνωμεν τὴν ἐκτεθεῖσαν μέθοδον μὲ αὐτὴν ποὺ χρησιμοποιεῖται σήμερον, παρουσιάζεται μεταξὺ των ἐκπληκτικὴ ὁμοιότης ἀπὸ ἀλγοριθμικῆς ἀπόψεως, ἀλλ' εἰς τὴν πρώτην ὑπάρχουν τόσον πολλὰ καὶ μεγάλα κενά, ὥστε δὲν δύναται νὰ δοθῇ ἄλλη ἐξήγησις, πλὴν τοῦ ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλήφθη ἐξ ἄλλης πηγῆς καὶ ὅτι κατὰ τὴν ἀντιγραφὴν ἐσημειώθη μόνον τὸ μηχανικὸν μέρος τῆς μεθόδου.

Δυστυχῶς τὰ κενὰ αὐτὰ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ συμπληρωθοῦν οὔτε ἂν ἀνατρέξωμεν εἰς μίαν ἄλλην διτετράγωνον ἐξίσωσιν, τὴν ὁποίαν ἔλαβεν ὁ Biernatzki ὡς παράδειγμα τῆς αὐτῆς μεθόδου λύσεως μιᾶς ἐξισώσεως μὲ ἀριθμητικοὺς συντελεστάς.

Φαίνεται ὅτι ὁ Chi' n ἐγνώριζε μέθοδον νὰ προσεγγίζῃ τὰς μὴ ἀκεραίας ρίζας τῶν ἀριθμητικῶν ἐξισώσεων. Μαρτυρεῖται πράγματι ὅτι ὁ ἴδιος εὗρε διὰ $\alpha = 576$ καὶ $b = 34$, ὡς προσεγγίζουσαν ρίζαν τῆς ἐξισώσεως:

$$(\alpha + b)^2 \cdot 10 = \left(\frac{\alpha^2}{4} - \frac{\beta^2}{4}\right)x + x^2$$

τὴν τιμὴν $10871\,\frac{5231}{63070}$, «ὅπου ἴσως ὁ παρανομαστὴς ἐδιχοτομήθη ἐσφαλμένως», χωρὶς οὔτε λέξις νὰ προστίθεται εἰς ἐξήγησιν τῆς ὁδοῦ, ἡ ὁποία ὡδήγησεν εἰς αὐτὸ τὸ ἐξαγόμενον, πρᾶγμα ἰδιαιτέρως λυπηρόν, καθ' ὅσον τὸ σχῆμα Ruffini — Horner δίδει τὰς μὴ ἀκεραίας ρίζας τῶν ἐξισώσεων ὑπὸ τὴν μορφὴν οὐχὶ κοινῶν ἀλλὰ δεκαδικῶν κλασμάτων. Πρὸς ἐπαλήθευσιν τῆς εὑρεθείσης τιμῆς, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ πρὸς λύσιν ἐξίσωσις γράφεται :

$$10^4 \cdot 61^2 = 61 \cdot 5 \cdot 271 \cdot x + x^2$$

καὶ διὰ νὰ τὴν ἁπλοποιήσωμεν δυνάμεθα νὰ θέσωμεν $x = 61y$, ὅτε λαμβάνομεν :

$$y^2 + 5 \cdot 271\, y - 610000 = 0$$

καὶ ἐξ αὐτῆς :

$$y = \frac{-5 \cdot 271 \pm \sqrt{5^2 \cdot 271^2 + 4 \cdot 610000}}{2}$$

Τὸ ὑπόρριζον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς $5^2 . 171041$. Ἐξ ἄλλου τὸ μέγιστον τετράγωνον κάτω τοῦ 171041 εἶναι 413^2, ὅθεν κατ' ἐφαρμογὴν τοῦ γνωστοῦ τύπου προσεγγίσεως :

$$\sqrt{m^2 + n} = m + \frac{n}{2m}\ ,$$

προκύπτει :

$$171041 = 413 + \frac{236}{413}\ .$$

Ὥστε ἡ θετικὴ ρίζα τῆς εἰς ψ ἐξισώσεως εἶναι :

$$y = 356 + \frac{177}{413}$$

ἐκ τῆς ὁποίας ἕπεται :

$$x = 16\psi = 21742 + \frac{1}{7}.$$

Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο εἶναι περίπου διπλάσιον τῆς τιμῆς, ποὺ λέγεται ὅτι εὗρεν ὁ κινέζος μαθηματικός, ὡς γίνεται δῆλον ἐκ τῆς ἰσότητος :

$$2\left(10871 + \frac{5231}{63070}\right) = 21742 + \frac{1}{6 + \dfrac{386}{5231}}.$$

Τὸ σφάλμα ἑπομένως τοῦ Chi'n δὲν εἶναι διόλου ἀμελητέον, ἀλλὰ πρόκειται ἴσως περὶ συγχωρητέας ἀβλεψίας, ἡ ὁποία δὲν μᾶς ἐμποδίζει νὰ ἐκφράσωμεν τὴν λύπην μας, διότι ἐχάθησαν τὰ ἴχνη τῶν λεπτομερειῶν τῆς ἐφαρμοσθείσης μεθόδου πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἀναφερθέντος ἀποτελέσματος.

126. Κατὰ τὰ ἔτη 1248 καὶ 1259 ἐνεφανίσθησαν ἀρκετὰ ἔργα τοῦ φημισμένου μαθηματικοῦ Li Yeh ἢ Li - ye (1178 - 1265), ἐκ τῶν ὁποίων ἕνα φέρει τὸν τίτλον: Θαλάσσιον κάτοπτρον μετρήσεως τοῦ κύκλου καὶ θεωρεῖται σπουδαιότατον ὡς προαγγέλον τὴν αὐγὴν τῆς κινεζικῆς ἀλγέβρας. Ἐδῶ, ὡς ἐὰν ὑπάρχῃ πρόθεσις πληρώσεως τῶν κενῶν ποὺ ἄφησεν ὁ Chi'n Chiu, διδάσκονται ἀσφαλεῖς μέθοδοι πρὸς κατάστρωσιν τῶν ἐξισώσεων τῶν προβλημάτων. Αἱ ἐξισώσεις, ποὺ ἐξετάζονται, εἶναι ὅλαι δευτεροβάθμιοι, ἔχουν ὡς δεύτερον μέλος τὸ μηδὲν καὶ παρίστανται συμβολικῶς, γραφομένων τῶν συντελεστῶν κατακορύφως εἰς μίαν στήλην, κατὰ βαθμὸν ἀγνώστου αὔξοντα ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω. Πρὸς διάκρισιν μάλιστα, οἱ θετικοὶ συντελεσταὶ γράφονται μὲ χρῶμα κόκκινο, οἱ ἀρνητικοὶ μὲ μαῦρο. Ὁ Li Yeh, διὰ ν' ἀποφύγῃ τὴν διχρωμίαν, διαστέλλει τοὺς ἀρνητικοὺς μὲ τὴν προσθήκην μίας γραμμῆς. Τὸ μηδὲν εἰκονίζεται μὲ κυκλίσκον.

Δὲν εἶναι μικροτέρας ἀξίας ἕνα ἄλλο ἔργον τοῦ ἰδίου μαθηματικοῦ, ἀνασύνταξις ἄλλου ἀτελεστέρου, εὑρεθέντος ὑπὸ τοῦ ἰδίου εἰς τὴν αὐτοκρατορικὴν βιβλιοθήκην. Πρόκειται περὶ συλλογῆς 64 προβλημάτων, ὅπου εὑρίσκει ἐφαρμογὴν ἡ ἄλγεβρα εἰς τὸν ὑπολογισμὸν στοιχείων γεωμετρικῶν σχημάτων ἀπαντωμένων προφανῶς εἰς ἀντικείμενα πρακτικῆς γεωμετρίας. Μερικὰ ἐκ τῶν σχημάτων τούτων εἶναι γνωστὰ ἐκ τῶν πρώτων στοιχείων τῆς γεωμετρίας, ὡς εἶναι τὰ τετράγωνα, τὰ ὀρθογώνια, οἱ κύκλοι, καὶ οἱ κυκλικοὶ δακτύλιοι. Ἄλλα ὅμως εἶναι πολυπλοκώτερα καὶ ἀναγνωρίζονται μέσῳ συνδυασμῶν γνωστῶν σχημάτων. Τὰ κυριώτερα εἶναι : τετράγωνον ἢ ὀρθο-

γώνιον, ἐντὸς τοῦ ὁποίου ὑπάρχει ὁμόκεντρος κύκλος. Ἀντιστρόφως: τετράγωνον ἢ ὀρθογώνιον ἐντὸς ὁμοκέντρου κύκλου· τετράγωνον, ἐντὸς τοῦ ὁποίου ἔχει χαραχθῆ ἄλλο ὁμόκεντρον τετράγωνον ἢ ὀρθογώνιον. Τὰ δεδομένα εἶναι διαφόρων εἰδῶν: ἄλλα ἀφοροῦν ἐμβαδά, ἄλλα ἀφοροῦν μήκη. Αἱ ἐφαρμοζόμεναι θεωρητικαὶ γνώσεις εἶναι ἁπλούσταται. Κάθε λύσις ἐκτίθεται ὁλόκληρος, μὲ κανονικότητα μὴ ἀπηλλαγμένην σχολαστικότητος, ἐνθυμίζουσαν ὅμως τὴν κομψότητα τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου.

Ἐνῷ διὰ τὸν Li Yeh ἀναφέρονται τὰ πλέον λεπτομερειακὰ βιογραφικὰ περιστατικά, τίποτε δὲν εἶναι γνωστὸν γύρω ἀπὸ τὴν ζωὴν τοῦ Yang Hui, ἑνὸς ἄλλου μαθηματικοῦ ἀκολουθοῦντος, κατὰ χρονολογικὴν σειράν, τὸν προηγούμενον. Ἡ δρᾶσις του τίθεται εἰς τὸ δεύτερον ἥμισυ τοῦ XII αἰῶνος, φέρεται δὲ ὡς συγγραφεὺς ἑνὸς ἔργου εἰς 9 μέρη (1261), τοῦ ὁποίου ὁ τίτλος εἶναι Ἀνάλυσις τῶν κανόνων τῆς Ἀριθμητικῆς. Ἐκτὸς τοῦ τύπου, ὁ ὁποῖος παρέχει τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων ἀριθμητικῆς προόδου, ἀπαντῶμεν εἰς τὸ βιβλίον τοῦτο καὶ τὰς ἀκολούθους ἀξιολόγους ἐκφράσεις:

$$1+(1+2)+(1+2+3)+...+(1+2+3+4)=\frac{n(n+1)(n+2)}{6},$$

$$1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

ἡ πρώτη τῶν ὁποίων κάνει τοιουτοτρόπως τὴν εἴσοδόν της εἰς τὴν μαθηματικὴν φιλολογίαν.

Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ἐμβαδοῦ τετραπλεύρου, ἔχοντος πλευρὰς α, β, γ, δ, ὁ συγγραφεὺς ἐφαρμόζει τὴν ἀπαγορευτικὴν ἔκφρασιν:

$$\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\frac{\gamma+\delta}{2},$$

προσπαθεῖ ὅμως ἔπειτα νὰ διορθώσῃ τὸ ἀναπόφευκτον λάθος, χωρὶς νὰ παρέχῃ δείγματα, ὅτι κατανοεῖ τὸ ἀδύνατον τοῦ προσδιορισμοῦ τοῦ τετραπλεύρου διὰ τῶν πλευρῶν του.

Ὁ Yang Hui πρέπει νὰ εἶχε μάθει κάποιον ἐμπειρικὸν τρόπον ὑπολογισμοῦ τῆς χορδῆς x κυκλικοῦ τμήματος ἐμβαδοῦ A, ὅταν δίδεται καὶ ἡ διάμετρος d τοῦ κύκλου. Πράγματι, θέτων $A = 32$ καὶ $d = 13$, ἄγεται εἰς τὴν ἐξίσωσιν:

$$-4096 + 128x^2+52x^3-5x^4=0,$$

ἡ ὁποία φαίνεται νὰ προέρχεται ἐκ τοῦ γενικοῦ κανόνος τοῦ ἐκφραζομένου διὰ τοῦ τύπου:

$$-4A^2+4Ax^2+4dx^3-5x^4=0,$$

καί, μέσῳ μερικῶν συλλογισμῶν, καταλήγει εἰς τὸ ἀποτέλεσμα x = 4*. Ἐπειδὴ εἰς τὸ ἀποτελέσμα τοῦτο ὁ κινέζος μαθηματικὸς ἔφθασε μὲ ἐκπληκτικὴν ταχύτητα, εἶναι βάσιμος ἡ ὑπόνοια, ὅτι ὁ ἴδιος κατεσκεύασε τὴν ἐξίσωσιν οὕτως, ὥστε νὰ ἔχῃ αὐτὴν τὴν ρίζαν. Εὑρισκόμεθα λοιπὸν ἐνώπιον μιᾶς ἄλλης πράξεως ἀνειλικρινείας, ἡ ὁποία συνδυαζομένη μὲ προγενεστέρας ὑποψίας μας, τείνει νὰ ἐπιβεβαιώσῃ, εἰς βάρος τῶν κινέζων μαθηματικῶν, τὸ παλαιὸν «qui semel mentitur, semper mentitur», ἤτοι «ὁ ψευδόμενος μίαν φοράν, πάντοτε ψεύδεται».

127. Συναντῶμεν κατόπιν τὸν Chu Shih-Chieh (ἢ Tchou Che-Kie), τελείως ἀγνώστου βιογραφίας, εἰς τὸν ὁποῖον ἀποδίδονται δύο ἔργα, Εἰσαγωγὴ εἰς τὰς μαθηματικὰς σπουδὰς (1299) καὶ Πολύτιμον κάτοπτρον τῶν τεσσάρων στοιχείων (1303).

Ἀξιοσημείωτα εἶναι εἰς τὸ πρῶτον, ἡ ὕπαρξις ἑνὸς πίνακος διαιρέσεως καὶ τοῦ κανόνος τῶν σημείων εἰς ἀλγεβρικὰς πράξεις προσθέσεως καὶ πολλαπλασιασμοῦ, καθὼς καὶ πολλῶν προβλημάτων τόκου. Ὁ συγγραφεὺς φαίνεται ἔχων οἰκειότητα μὲ τὰς ἐξαγωγὰς τετραγωνικῶν καὶ κυβικῶν ριζῶν, ἀλλὰ διστακτικότητα εἰς τὴν λύσιν ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων μὲ ἀριθμητικοὺς συντελεστάς.

Τὸ Πολύτιμον κάτοπτρον εἶναι πράγματι ἄξιον τοῦ τίτλου του, διότι παρέχει ἐκτενεῖς πληροφορίας γύρω ἀπὸ τὴν μέθοδον «Tien yen», ἡ ὁποία συνιστᾷ τὸν ἀλγεβρικὸν λογισμόν, ὡς οὗτος διεξάγεται εἰς τὸ Οὐράνιον Κράτος. Ἡ μέθοδος αὕτη ἦτο ἀποκλειστικῶς ἐφαρμόσιμος εἰς προβλήματα μὲ τέσσαρας ἀγνώστους, τοὺς ὁποίους οἱ Κινέζοι παρίστανον μὲ ἰδεογράμματα σημαίνοντα τὸν οὐρανόν, τὴν γῆν, τὸν ἄνθρωπον, τὸ πρᾶγμα καὶ διὰ τῶν ὁποίων ἦσαν εἰς θέσιν νὰ παραστήσουν ὅλας τὰς ἀλγεβρικὰς ἐκφράσεις. Παρὰ ταῦτα δὲν ᾐσθάνθησαν τὴν ἀνάγκην νὰ χρησιμοποιήσουν εἰδικὰ σύμβολα διὰ τὴν ἰσότητα καὶ διὰ τὰς ἀριθμητικὰς πράξεις. Καὶ ἠμπορεῖ, χωρὶς ἄλλο, νὰ λεχθῇ ὅτι ἡ ἀπουσία τοιούτων συμβόλων συνιστᾷ τὸ μειονέκτημα τῆς κινεζικῆς ἀλγέβρας ἔναντι τῆς εὐρωπαϊκῆς.

Ἀξίζει ἐπίσης νὰ σημειωθῇ ἡ εἰς τὸ ἐν λόγῳ ἔργον παρουσία τοῦ «ἀριθμητικοῦ τριγώνου», ἐκτεινομένου μέχρι τῆς τάξεως, ποὺ ἐπιτρέπει τὸν σχη-

---

* Ποίου εἴδους ἦσαν οἱ συλλογισμοὶ τοῦ κινέζου μαθηματικοῦ δὲν κατέστη δυνατὸν νὰ μάθωμεν. Σήμερον ὁ εὐθύτερος τρόπος διὰ νὰ φθάσωμεν εἰς τὸ ἀναφερόμενον ἀποτέλεσμα εἶναι ἴσως νὰ θέσωμεν $x = 4\xi$ (μετασχηματισμός, τὸν ὁποῖον ἐμπνέει εἰς ἡμᾶς ἡ ἀριθμητικὴ δομὴ τῶν συντελεστῶν), ὅτε ἡ ἐξίσωσις γίνεται:

$$-16 + 8\xi^3 + 13\xi^2 - 5\xi^4 = 0.$$

Καὶ ἐπειδὴ τώρα τὸ ἄθροισμα τῶν συντελεστῶν εἶναι μηδέν, προκύπτει ἀμέσως ἡ ρίζα $\xi = 1$, ἐκ τῆς ὁποίας $x = 4$.

ματισμὸν τοῦ ἀναπτύγματος τῆς 8ης δυνάμεως ἑνὸς διωνύμου, κατὰ τὴν διάταξιν :

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

Προσθέτομεν ὅτι ὑπάρχει ἀκόμη εἰς τὸ βιβλίον αὐτὸ ὁ κανὼν ὁ χρησιμεύων διὰ τὴν ὕψωσιν εἰς τὸ τετράγωνον τυχόντος πολυωνύμου.

Τὸ βιβλίον τέλος παρέχει ἐπιβεβαίωσιν τῆς γενικῆς τάσεως τῶν Κινέζων νὰ περιπλέκουν τὰ ζητήματα, διὰ νὰ τὰ ἐμφανίσουν δυσκολώτερα ἀπὸ ὅσον πράγματι εἶναι. Τοῦτο πιστοποιεῖται ἀπὸ τὸ ἀκόλουθον πρόβλημα: «Ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου τὸ ἐμβαδὸν εἶναι 30, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν καθέτων πλευρῶν 17. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα μιᾶς τῶν καθέτων καὶ τῆς ὑποτεινούσης».

Διὰ νὰ τὸ λύσωμεν, ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἐκ τῶν δεδομένων προκύπτει ἀμέσως ὅτι τοῦτο ἔχει πλευρὰς 12, 5, 13 καὶ συνεπῶς ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς θὰ εἶναι κατ' ἀνάγκην ἕνας ἐκ τῶν δύο: $12+13=25$, $5+13=18$. Τὸ Πολύτιμον κάτοπτρον, ἐν τούτοις, ἀνάγει τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος εἰς τὴν λύσιν τῆς τεταρτοβαθμίου ἐξισώσεως :

$$-3600-3706x-71x^2+34x^3-x^4=0$$

Εἰς τὸ Πολύτιμον κάτοπτρον ἀπαντᾶται ἐπίσης ἕνα πρόβλημα μὲ περισσοτέρους ἀγνώστους, τοῦ ὁποίου τὸ ἐνδιαφέρον συνίσταται εἰς τὸ ὅτι δίδει κάποιαν πληροφορίαν γύρω ἀπὸ τὰς μεθόδους ἀπαλοιφῆς, τὰς ὁποίας ἐχρησιμοποίουν οἱ Κινέζοι. Ἐπειδὴ ὅμως τὸ ἔργον ἐσημείωσε πολλὰς ἐκδόσεις (ὑπάρχει σχόλιον ὑπὸ χρονολογίαν 1876), δὲν δυνάμεθα ν' ἀπομακρύνωμεν τὴν σκέψιν, ὅτι τὸ ἔργον ἐμφανίζεται σήμερον πιθανώτατα ὑπὸ μίαν μορφὴν πολὺ διάφορον ἐκείνης, τὴν ὁποίαν εἶχεν εἰς τὴν ἀρχήν. Καὶ διὰ τοῦτο δὲν θεωροῦμεν σκόπιμον νὰ ἐνδιατρίψωμεν περισσότερον ἐπ' αὐτοῦ.

128. Μὲ τοιαύτας σκέψεις θέτομεν τέρμα εἰς τὴν σύντομον αὐτὴν ἐπισκόπησιν τῆς κινεζικῆς μαθηματικῆς γραμματείας, χωρὶς τοῦτο νὰ σημαίνῃ, ὅτι αὐτὴ δὲν ἀριθμεῖ ἄλλα ἔργα κάποιας σημασίας. Τὰ ὑπόλοιπα ὅμως ἀναφέρονται εἰς ἐποχάς, κατὰ τὰς ὁποίας οἱ Ἄραβες καὶ οἱ Εὐρωπαῖοι ἤσκουν εἰς τὴν ἄπω Ἀνατολὴν δεσπόζουσαν καὶ ἀναμφισβήτητον ἐπιρ-

ροήν. Ἐὰν λοιπὸν ἡ πρωτοτυπία τῶν ἔργων ποὺ ἐξητάσαμεν μέχρι τοῦδε εἶναι ἀμφισβητήσιμος, πῶς θὰ δυνηθῶμεν νὰ τὴν βεβαιώσωμεν εἰς ἔργα μεταγενέστερα;

Καὶ ὅτι πολλαὶ εὔλογοι ἀμφιβολίαι ἐγείρονται ὡς πρὸς τὴν κινεζικὴν προέλευσιν τῶν ἔργων, περὶ τῶν ὁποίων ἐγένετο λόγος προηγουμένως, γίνεται φανερόν, ἂν σημειώσωμεν ὅτι : 1ον. Τὰ ἔργα, ποὺ κατέχομεν, εἶναι συλλογαὶ προβλημάτων, λελυμένων διὰ μεθόδων μὴ αἰτιολογουμένων οὕτως, ὥστε προσεγγίζουν περισσότερον πρὸς τὰ γραπτὰ τοῦ Ἥρωνος παρὰ πρὸς τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου. 2ον. Αἱ ἀναφερόμεναι προτάσεις καὶ οἱ ἐφαρμοζόμενοι κανόνες, μὲ τὴν ἀδεξιότητα ποὺ χρησιμοποιοῦνται γενικῶς, δίδουν τὴν ἐντύπωσιν ἀποτελεσμάτων μηχανικῶς ἀντιγραφέντων ἀπὸ ξένας πηγάς. 3ον. Μεταξὺ ὀρθῶν ἀποτελεσμάτων, προδιδόντων καλλιεργημένην διάνοιαν ἐκείνου ὁ ὁποῖος τὰ εὗρε, παρεμβάλλονται χονδροειδεῖς μέθοδοι (προτιμώμεναι ἐνίοτε ἀπὸ ἄλλας καλυτέρας καὶ ἤδη γνωστάς), αἱ ὁποῖαι μάλιστα κάποτε εἶναι ἐντελῶς ἐσφαλμέναι.

Τὸ συμπέρασμα εἶναι, ὅτι ἡ μαθηματικὴ ἐπιστήμη τῶν Κινέζων παρουσιάζει σημεῖα σκοτεινά, ἕνεκα τῶν ὁποίων εἶναι ἀδύνατος ἡ προσπάθεια νὰ διαχαραχθῇ μὲ κάποιαν ἀληθοφάνειαν ἡ ἱστορικὴ ἐξέλιξις.

Πολλαὶ ἀπὸ τὰς δυσκολίας, τὰς ὁποίας συνηντήσαμεν (καὶ τὰς ἐσημειώσαμεν μὲ εἰλικρίνειαν, διότι ἔχομεν τὴν πεποίθησιν, ὅτι τὸ πρῶτον βῆμα πρὸς τὴν λύσιν ἑνὸς προβλήματος ὀφείλεται εἰς ἐκεῖνον, ὁ ὁποῖος τὸ διετύπωσε μὲ σαφήνειαν)*, θὰ ἠδύναντο ἴσως νὰ ὑπερνικηθοῦν, ἐὰν εἴχομεν πρὸ ὀφθαλμῶν τὰ κείμενα εἰς τὴν ἀρχικήν των μορφήν, συνοδευόμενα ἀπὸ μεταφράσεις των εἰς εὐρωπαϊκὴν γλῶσσαν. Χωρὶς αὐτά, κάθε προσπάθεια δὲν δύναται παρὰ νὰ ἔχῃ κλονιζομένην βάσιν καὶ συμπεράσματα προσωρινότητος. Διὰ τοῦτο εὐχόμεθα ὁλοψύχως νὰ καταστῇ δυνατὴ ἡ ἀποσαφήνισις τῆς μαθηματικῆς ἱστορίας τοῦ κινεζικοῦ λαοῦ, ὅπως ἔγινεν ἤδη τοῦτο διὰ τοὺς Αἰγυπτίους καὶ ὅπως θὰ κάμωμεν ἐν συνεχείᾳ δι' ἄλλους δύο μεγάλους λαοὺς μακρὰν τῆς Εὐρώπης.

---

* Εἰς τὰ ἐρωτηματικὰ σημεῖα, μὲ τὰ ὁποῖα εἶναι διάσπαρτος ἡ ἱστορία τῶν κινεζικῶν μαθηματικῶν, δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν ἀκόμη ἕνα πολὺ χαρακτηριστικὸν (J. E. JEANS, The converse of Fermat's Theorem, The Messenger of Mathematics, t. XXVII, 1897 - 98, σελ. 174) : Εἰς ἕνα φύλλον χάρτου, εὑρεθὲν ἀπὸ τὸν Sir Th. Wade μεταξὺ ἄλλων ἐγκαταλελειμένων εὑρίσκεται τὸ θεώρημα

$$2^n - 2 \equiv 0 \,(\text{mod.}\, n),$$

ἐὰν n ἀριθμὸς πρῶτος, μὲ τὴν παρατήρησιν ὅτι τὸ θεώρημα δὲν ὑφίσταται ἂν ὁ n εἶναι σύνθετος καὶ ὅτι τοῦτο εἶναι κινεζικὸν εὕρημα ἀναγόμενον εἰς τὴν ἐποχὴν τοῦ Κομφουκίου. Ὅτι θὰ ἠδύναντο ἐμπειρικῶς νὰ φθάσουν εἰς τὸ θεώρημα τοῦ Fermat δὲν εἶναι πρᾶγμα ἀδύνατον. Ἀλλὰ ὅτι μὲ τὸν ἴδιον τρόπον θὰ ἠδύναντο νὰ φθάσουν ἀκόμη καὶ εἰς τὴν ἀντίστροφον πρότασιν φαίνεται ἐλάχιστα πιθανόν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Χ

ΕΙΣ ΤΟΥΣ ΠΡΟΠΟΔΑΣ ΤΩΝ ΙΜΑΛΑΪΩΝ

Προλεγόμενα

129. Ἐὰν ἀφήσωμεν τώρα τὴν Κίναν, διὰ νὰ κινηθῶμεν πρὸς Δυσμάς, θὰ συναντήσωμεν ἕνα ἄλλον λαὸν τριακοσίων καὶ πλέον ἑκατομμυρίων ψυχῶν, καταμερισμένον εἰς πλῆθος περιοχῶν. Ἡ χερσόνησος ἡ κατεχομένη ὑπὸ τοῦ λαοῦ τούτου ἔχει ὡς σύνορα πρὸς Βορρᾶν τὴν ὀροσειρὰν τῶν Ἰμαλαΐων, πρὸς Ἀνατολὰς τὸν κόλπον τῆς Βεγγάλης καὶ πρὸς Δυσμὰς τὴν Ἀραβικὴν θάλασσαν. Εἶναι αἱ Ἰνδίαι, χώρα τῆς ὁποίας ἡ ἑνότης πιστοποιεῖται κυρίως ἀπὸ τὴν λογοτεχνίαν της, γεννηθεῖσαν πρὸ εἴκοσι πέντε τοὐλάχιστον αἰώνων, ὅταν ἡ σανσκριτική, ἐκτοπίσασα τὰς λοιπὰς διαλέκτους, ὑψώθη εἰς τὴν τιμητικὴν θέσιν τῆς ἐθνικῆς γλώσσης.

Σχέσεις ἱστορικῶς ἐξηκριβωμέναι μεταξὺ τῆς Εὐρώπης καὶ τῆς χώρας τῆς ἐκτεινομένης μεταξὺ τῶν ποταμῶν Ἰνδοῦ καὶ Γάγγου ἀρχίζουν τὸν IV αἰῶνα π.Χ. μὲ τὴν ἔνδοξον ἐκστρατείαν τοῦ Μεγάλου Ἀλεξάνδρου, ἀλλὰ πολλὰ γεγονότα (μεταξὺ τῶν ὁποίων ἀκριβῶς καὶ ἡ ἀνωτέρω ἐκστρατεία) μᾶς ἄγουν νὰ πιστεύσωμεν, ὅτι αἱ Ἰνδίαι δὲν ἦσαν ἄγνωστοι καὶ προηγουμένως εἰς τὴν Ἑλλάδα.

Αἱ ἐκπληκτικαὶ πληροφορίαι γύρω ἀπὸ τὴν φιλοσοφίαν τῶν γυμνοσοφιστῶν, περὶ τῶν ὁποίων ὁμιλεῖ ὁ Πλούταρχος εἰς τὸ βιβλίον του Βίος τοῦ Ἀλεξάνδρου, καθὼς καὶ αἱ περιγραφαὶ τῶν στρατιωτῶν τοῦ μεγάλου κατακτητοῦ περὶ λεπτοτάτων ὑφασμάτων, μὲ τὰ ὁποῖα ἐτύλιγον τὰ νῶτα καὶ τὴν κεφαλήν, περὶ ζωηρῶν τεχνητῶν χρωμάτων, μὲ τὰ ὁποῖα ἠρέσκοντο νὰ βάφουν τὴν γενειάδα, περὶ κοσμημάτων ἐκ τῶν ὁποίων ἦσαν κατάφορτοι, μᾶς ἐξαναγκάζουν νὰ παραδεχθῶμεν ὅτι ἡ φύσις πρέπει νὰ ἐπροίκισε τοὺς ἀρχαίους Ἰνδοὺς μὲ διάνοιαν ἐπιρρεπῆ πρὸς τὴν φιλοσοφίαν καὶ ὅτι, εἰς τὴν χώραν των, ἡ ἐπιστήμη ἐφαρμοζομένη εἰς τὴν βιομηχανίαν εἶχεν ὑψωθῆ εἰς ἐπίζηλον βαθμὸν ἀναπτύξεως.

Ἐξ ἄλλου αἱ Ἱεραὶ Βέδαι, ἀρχαιότατα θρησκευτικὰ βιβλία, γραφέντα, ὡς πιστεύεται, κατὰ τὴν περίοδον 1500 - 500 π.Χ. (Βεδικὴ περίοδος), παρέχουν τεκμήρια μιᾶς ἐξαιρετικῆς λογοτεχνικῆς εὐφορίας. Ἐπίσης εἰς τὸ μέγα ἐπικοθρησκευτικὸν ποίημα Μαχαβαράτα (100.000 δίστιχα,

εἰς 18 βιβλία), γραφὲν κατὰ τὴν περίοδον 500 π.Χ. - 500 μ.Χ. ἐπὶ τῇ βάσει παραδόσεων πολὺ ἀρχαιοτέρων, γίνεται κάπου λόγος περὶ 600.000.000 τέκνων, τὰ ὁποῖα ἐφαίδρυνον τὸν οἶκον τοῦ Βράχμα καὶ περὶ 24.000.000 ἑκατομμυρίων θεοτήτων κατοίκων τοῦ οὐρανοῦ. Ἐκ τούτου συμπεραίνομεν, ὅτι τὸ ἔργον ἐγράφη ἀπὸ ἀνθρώπους μὲ ἰδιοσυγκρασίαν πολὺ διάφορον τῆς τῶν Ἑλλήνων, οἱ ὁποῖοι, ὡς εἴδομεν, δὲν ἐδείκνυον ἐν γένει συμπάθειαν πρὸς τοὺς πολὺ μεγάλους ἀριθμούς.

Ὅτι εἰς τὸν ἰνδικὸν λαὸν ἀνήκει μία διακεκριμένη θέσις εἰς τὴν ἱστορίαν τῶν μαθηματικῶν προκύπτει — παρασιωπῶμεν πρὸς τὸ παρὸν ἄλλα γεγονότα, περὶ τῶν ὁποίων θὰ ὁμιλήσωμεν κατωτέρω — ἀπὸ τὸ γεγονὸς ὅτι εἰς αὐτὸν ἀποδίδεται, περισσότερον ἢ ὀλιγώτερον, ἡ ἐπινόησις τοῦ ἰδικοῦ μας δεκαδικοῦ συστήματος ἀριθμήσεως*, δηλαδὴ τοῦ συστήματος τοῦ στηριζομένου ἐπὶ τῆς χρήσεως τῶν ἀριθμῶν 1, 2, . . ., 9 καὶ τοῦ 0, ὀντότητος, ἡ ὁποία καίτοι ἐστερημένη ἀριθμητικῆς ἀξίας, ἀποτελεῖ τὴν σπονδυλικὴν στήλην τῆς ἀριθμογραφίας θέσεως. Καὶ ἐπειδή, ὡς πιστεύεται γενικῶς, τὸ σύστημα τοῦτο ἦλθεν εἰς τὴν Εὐρώπην μέσῳ τῶν Ἀράβων, τὰ δέκα αὐτὰ ἀριθμητικὰ σύμβολα, ἔφερον ἐπὶ μακρὸν τὸ ὄνομα «ἀραβικὰ ψηφία», τὸ ὁποῖον μόλις προσφάτως ἀντικατεστάθη ἀπὸ τὸ ὀρθότερον «ἰνδο - ἀραβικὰ ψηφία».

«Sulvasutras»

130. Ὁ ἐπιθυμῶν νὰ προσδιορίσῃ μὲ ἀκρίβειαν εἰς ποῖον ἐπίπεδον ἔφθασαν αἱ ἀκριβεῖς ἐπιστῆμαι παρὰ τὰς ὄχθας τοῦ ἱεροῦ Γάγγου δὲν ἔχει εἰς τὴν διάθεσίν του τεκμήρια ἀνήκοντα κατ' ἀποκλειστικότητα εἰς τὰς ἐπιστήμας αὐτάς. Διότι ἡ ἀριθμητικὴ καὶ ἡ γεωμετρία εἰς τὰς Ἰνδίας δὲν κατώρθωσαν ποτὲ ν' ἀπαλλαγοῦν ἀπὸ τὴν ταπεινωτικὴν κατάστασιν τῆς ὑποτελείας των εἰς τὴν θρησκείαν καὶ τὴν ἀστρολογίαν. Τοιουτοτρόπως ὁ προτιθέμενος νὰ συγκεντρώσῃ στοιχεῖα τοῦ πρώτου σταδίου ἐξελίξεως τῶν ἰνδικῶν μαθηματικῶν εἶναι ὑποχρεωμένος νὰ τὰ ἀναζητήσῃ — ὅπως ἄλλωστε συνέβη μὲ τὴν ἀρχαιοτέραν φάσιν ἐξελίξεως τῶν μαθηματικῶν εἰς τὴν Ἑλλάδα καί, κατὰ μείζονα κλίμακα, εἰς τὴν ρωμαϊκὴν αὐτοκρατορίαν — μετὰ κόπου εἰς ἔργα, τῶν ὁποίων ἡ ὕλη εἶναι ξένη πρὸς τὴν καθαρὰν ἐπιστήμην.

Τὸ ἀρχαιότερον ἀπὸ αὐτὰ τὰ ἔργα φέρει τὸν τίτλον Sulvasutras (κανὼν

* Ἡ χρονολογία τῆς ἐπινοήσεως ταύτης δὲν εἶναι γνωστὴ μὲ ἀκρίβειαν. Ἁρμόδιοι ἐν προκειμένῳ τὴν τοποθετοῦν ὀλίγον πρὸ τοῦ IV αἰῶνος μ.Χ.

Διὰ περισσοτέρας πληροφορίας ἐπὶ τῆς βαθμιαίας ἐξελίξεως τῆς γραφῆς τῶν ἀριθμητικῶν ψηφίων βλ. G. F. Hill, The developement of arabic numerals in Europa exhibited in sixty four Tables (Oxford, 1915).

εἰς 18 βιβλία), γραφὲν κατὰ τὴν περίοδον 500 π.Χ. - 500 μ.Χ. ἐπὶ τῇ βάσει παραδόσεων πολὺ ἀρχαιοτέρων, γίνεται κάπου λόγος περὶ 600.000.000 τέκνων, τὰ ὁποῖα ἐφαίδρυνον τὸν οἶκον τοῦ Βράχμα καὶ περὶ 24.000.000 ἑκατομμυρίων θεοτήτων κατοίκων τοῦ οὐρανοῦ. Ἐκ τούτου συμπεραίνομεν, ὅτι τὸ ἔργον ἐγράφη ἀπὸ ἀνθρώπους μὲ ἰδιοσυγκρασίαν πολὺ διάφορον τῆς τῶν Ἑλλήνων, οἱ ὁποῖοι, ὡς εἴδομεν, δὲν ἐδείκνυον ἐν γένει συμπάθειαν πρὸς τοὺς πολὺ μεγάλους ἀριθμούς.

Ὅτι εἰς τὸν ἰνδικὸν λαὸν ἀνήκει μία διακεκριμένη θέσις εἰς τὴν ἱστορίαν τῶν μαθηματικῶν προκύπτει — παρασιωπῶμεν πρὸς τὸ παρὸν ἄλλα γεγονότα, περὶ τῶν ὁποίων θὰ ὁμιλήσωμεν κατωτέρω — ἀπὸ τὸ γεγονὸς ὅτι εἰς αὐτὸν ἀποδίδεται, περισσότερον ἢ ὀλιγώτερον, ἡ ἐπινόησις τοῦ ἰδικοῦ μας δεκαδικοῦ συστήματος ἀριθμήσεως*, δηλαδὴ τοῦ συστήματος τοῦ στηριζομένου ἐπὶ τῆς χρήσεως τῶν ἀριθμῶν 1, 2, . . ., 9 καὶ τοῦ 0, ὀντότητος, ἡ ὁποία καίτοι ἐστερημένη ἀριθμητικῆς ἀξίας, ἀποτελεῖ τὴν σπονδυλικὴν στήλην τῆς ἀριθμογραφίας θέσεως. Καὶ ἐπειδή, ὡς πιστεύεται γενικῶς, τὸ σύστημα τοῦτο ἦλθεν εἰς τὴν Εὐρώπην μέσῳ τῶν Ἀράβων, τὰ δέκα αὐτὰ ἀριθμητικὰ σύμβολα, ἔφερον ἐπὶ μακρὸν τὸ ὄνομα «ἀραβικὰ ψηφία», τὸ ὁποῖον μόλις προσφάτως ἀντικατεστάθη ἀπὸ τὸ ὀρθότερον «ἰνδο - ἀραβικὰ ψηφία».

«Sulvasutras»

130. Ὁ ἐπιθυμῶν νὰ προσδιορίσῃ μὲ ἀκρίβειαν εἰς ποῖον ἐπίπεδον ἔφθασαν αἱ ἀκριβεῖς ἐπιστῆμαι παρὰ τὰς ὄχθας τοῦ ἱεροῦ Γάγγου δὲν ἔχει εἰς τὴν διάθεσίν του τεκμήρια ἀνήκοντα κατ' ἀποκλειστικότητα εἰς τὰς ἐπιστήμας αὐτάς. Διότι ἡ ἀριθμητικὴ καὶ ἡ γεωμετρία εἰς τὰς Ἰνδίας δὲν κατώρθωσαν ποτὲ ν' ἀπαλλαγοῦν ἀπὸ τὴν ταπεινωτικὴν κατάστασιν τῆς ὑποτελείας των εἰς τὴν θρησκείαν καὶ τὴν ἀστρολογίαν. Τοιουτοτρόπως ὁ προτιθέμενος νὰ συγκεντρώσῃ στοιχεῖα τοῦ πρώτου σταδίου ἐξελίξεως τῶν ἰνδικῶν μαθηματικῶν εἶναι ὑποχρεωμένος νὰ τὰ ἀναζητήσῃ — ὅπως ἄλλωστε συνέβη μὲ τὴν ἀρχαιοτέραν φάσιν ἐξελίξεως τῶν μαθηματικῶν εἰς τὴν Ἑλλάδα καί, κατὰ μείζονα κλίμακα, εἰς τὴν ρωμαϊκὴν αὐτοκρατορίαν — μετὰ κόπου εἰς ἔργα, τῶν ὁποίων ἡ ὕλη εἶναι ξένη πρὸς τὴν καθαρὰν ἐπιστήμην.

Τὸ ἀρχαιότερον ἀπὸ αὐτὰ τὰ ἔργα φέρει τὸν τίτλον Sulvasutras (κανὼν

* Ἡ χρονολογία τῆς ἐπινοήσεως ταύτης δὲν εἶναι γνωστὴ μὲ ἀκρίβειαν. Ἁρμόδιοι ἐν προκειμένῳ τὴν τοποθετοῦν ὀλίγον πρὸ τοῦ IV αἰῶνος μ.Χ.

Διὰ περισσοτέρας πληροφορίας ἐπὶ τῆς βαθμιαίας ἐξελίξεως τῆς γραφῆς τῶν ἀριθμητικῶν ψηφίων βλ. G. F. Hill, The developement of arabic numerals in Europa exhibited in sixty four Tables (Oxford, 1915).

τῆς χορδῆς) καὶ χρησιμεύει ὡς συμπλήρωμα ἑνὸς ἄλλου ἔχοντος τίτλον Kalpasutras. Περιέχει τοὺς τηρητέους κανόνας πρὸς κατασκευὴν βωμῶν προωρισμένων διὰ θυσίας, καὶ διὰ τοῦτο σπουδαιότατον εἰς τὴν ἐποχὴν του, καθόσον ἀπὸ τὴν ἀκριβῆ ἢ μὴ τήρησιν τῶν κανόνων τούτων ἐξηρτᾶτο ἡ εὐμένεια ἢ ἡ δυσμένεια τῶν θεῶν.

Πότε ἐγράφη ὁ Sulvasutras δὲν εἶναι μὲ ἀκρίβειαν γνωστόν. Ἀσφαλῶς δὲν ἐγράφη πρὸ ἑνὸς ἑκατομμυρίου ἐτῶν, ὅπως θὰ τὸ ἐπεθύμει μία ἐγχώριος παράδοσις, ἀλλὰ πιθανώτατα κατὰ τὴν περίοδον 200 - 400 μ.Χ. Εἶναι γνωσταὶ τρεῖς συντάξεις φέρουσαι ὡς συγγραφεῖς τὰ ὀνόματα Apastamba, Baudhayama καὶ Katyayana. Ἡ δευτέρα γραφὴ εἶναι τελειοτέρα καί, ὅπως καὶ ἡ πρώτη, ἔχει ἤδη δημοσιευθῆ διὰ τοῦ τύπου.

Ὁ Sulvasutras συγκρινόμενος πρὸς τὰ ἄλλα, γνωστὰ εἰς ἡμᾶς, ἔργα τῆς ἰνδικῆς μαθηματικῆς φιλολογίας, ἔχει μετ' αὐτῶν κοινὰ δύο σημαντικὰ χαρακτηριστικά, τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ ἐξάρωμεν :

1ον. Εἶναι κείμενον ἔμμετρον. Ἡ ρυθμικὴ μορφὴ ἀποτελεῖ διὰ τὸν συγγραφέα ἕνα εἶδος κλίνης Προκρούστου. Διότι ἀπὸ τὸ ἕνα μέρος τὸν ὑποχρεώνει εἰς παρεκβάσεις ξένας τελείως πρὸς τὴν ἐπιστήμην, ἐνῷ ἀπὸ τὸ ἄλλο, τὸν ἐξαναγκάζει εἰς σύμπτυξιν καὶ ἀκρωτηριασμὸν τῶν διανοημάτων εἰς βάρος τῆς σαφηνείας. Ἀλλὰ εἰς ἀντιστάθμισμα, τρόπον τινα, ὁ ποιητικὸς ρυθμὸς ἐπενήργησεν ὡς προστατευτικὸς θώραξ ἀποτελεσματικώτατος ἐναντίον τῶν αὐθαιρεσιῶν τῶν διαφόρων ἀντιγραφέων, διότι ἡ ἰνδικὴ προσῳδία, διεπομένη ἀπὸ αὐστηροὺς κανόνας, δὲν ἐπιτρέπει εὐκόλως ἀλλοιώσεις ἢ συμβιβασμοὺς εἰς τὸ κείμενον.

2ον. Δὲν περιέχει μεθοδικὴν ἔκθεσιν κάποιας μαθηματικῆς θεωρίας, ἀλλὰ συνίσταται ἀπὸ ἀναποδείκτους κανόνας, ἐφαρμοζομένους εἰς ἀριθμητικὰ παραδείγματα. Ἄραγε, διερωτώμεθα, παρέμεινεν ἄγνωστον εἰς τοὺς Ἰνδοὺς (ὅπως φαίνεται νὰ συμβαίνῃ μὲ τοὺς Κινέζους), ὅτι ἡ δογματικὴ διατύπωσις εἶναι ἀπαράδεκτος εἰς μίαν ἐπιστήμην, τῆς ὁποίας ἡ οὐσία εἶναι ὁ συλλογισμός ; Ἢ μήπως αἱ παρασιωπώμεναι ἀποδείξεις εὑρίσκοντο εἰς ἄλλα ἀρχαιότερα ἔργα, μὴ περιελθόντα εἰς ἡμᾶς, ἀλλὰ χρησιμεύοντα εἰς αὐτοὺς ὡς βασικὰ κείμενα ;

Εἰς καταφατικὴν ἀπάντησιν τοῦ πρώτου ἐρωτήματος φθάνομεν παρατηροῦντες, ὅτι οἱ σχολιασταὶ τῶν συγγραφέων, τῶν ὁποίων τὰ κείμενα ἔφθασαν μέχρις ἡμῶν, προσθέτουν ἐδῶ καὶ ἐκεῖ ἐξηγήσεις καὶ ἐπεξηγήσεις, ἀλλὰ καμμίαν ἀληθῆ καὶ ἁρμόζουσαν ἀπόδειξιν, μολονότι ἕνας ἐξ αὐτῶν ἔκαμε τὴν δήλωσιν, ὅτι ἀπόδειξις δι' αὐτὸν εἶναι ὅ,τι ἀκριβῶς διακρίνει τὴν ἄλγεβραν ἀπὸ τὴν ἀριθμητικήν.

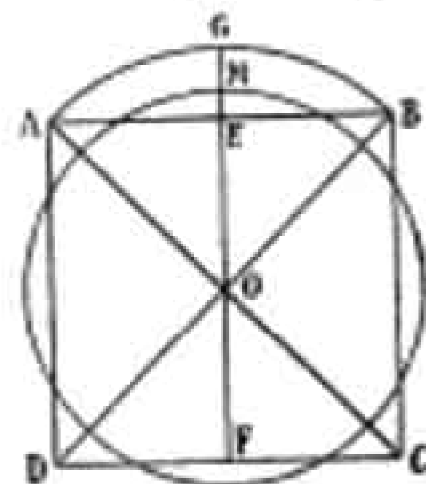
Ἐὰν τώρα λάβῃ κανεὶς ὑπ' ὄψιν του, ὅτι τὰ ἐξοχώτερα κείμενα τῆς ἰνδικῆς μαθηματικῆς φιλολογίας ἀνήκουν εἰς ἐποχὴν μεταγενεστέραν ἐκείνης, κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς ὁποίας τὸ ἑλληνικὸν μαθηματικὸν δαιμόνιον

εἶχε φωτίσει τὸν κόσμον μὲ τὰς ἀστραπάς του, καὶ ὅτι αἱ ἐμπορικαὶ σχέσεις — πιθανῶς δὲ καὶ αἱ πνευματικαὶ — μεταξὺ Εὐρώπης καὶ Ἀσίας εἶχον ἤδη ἀπὸ ἀμνημονεύτων χρόνων ἀναπτυχθῆ, ἔγιναν δὲ ἐντονώταται καὶ συνεχεῖς, τοὐλάχιστον μετὰ τὴν κοσμοϊστορικὴν ἐκστρατείαν τοῦ Μεγάλου Ἀλεξάνδρου (326 π.Χ.), αὐτομάτως ἐγείρεται ἡ ὑπόθεσις, ὅτι οἱ Ἰνδοὶ ἐδέχθησαν ἄνευ συζητήσεων τ' ἀποτελέσματα ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα ἔφθασαν, μὲ τὰς ἀξιεπαίνους προσπαθείας των, οἱ κορυφαῖοι Ἕλληνες μαθηματικοί. Οὕτω δίδεται ἐξήγησις εἰς μερικὰς συμπτώσεις, ποὺ θὰ ἐξάρωμεν μετ' ὀλίγον, καὶ καθίστανται ἐπὶ πλέον φανεραὶ αἱ πηγαὶ μερικῶν ἐκπληκτικῶν ἀνακαλύψεων, αἱ ὁποῖαι διὰ πρώτην φορὰν ἐμφανίζονται εἰς ἰνδικὰ ἔργα.

Ἀλλ' ἐπὶ τοῦ θεμελιώδους ζητήματος τῶν πηγῶν τῆς ἰνδικῆς μαθηματικῆς φιλολογίας, θὰ ἐπανέλθωμεν κατωτέρω, ἀφοῦ πρῶτον συμπληρώσωμεν τὴν περισυλλογὴν τῶν στοιχείων ἐκείνων, τὰ ὁποῖα εἶναι ἀπαραίτητα διὰ τὴν ἔρευναν ταύτην.

131. Κατερχόμενοι τώρα ἀπὸ τὰς γενικότητας εἰς τὰς λεπτομερείας, ἔχομεν νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ὁ συγγραφεὺς τοῦ Sulvasutras ἐγνώριζε τὸ Πυθαγόρειον θεώρημα εἰς ἱκανὸν ἀριθμὸν εἰδικῶν περιπτώσεων. Ἀπαντῶνται πράγματι εἰς αὐτὸ τὸ ἔργον, ἐκτὸς τοῦ κλασσικοῦ τριγώνου (3, 4, 5), καὶ τὰ ἑξῆς : (5, 12, 13), (7, 24, 25), (8, 15, 17), (12, 35, 37), εὑρεθέντα πιθανῶς διὰ δοκιμῶν, προκύπτοντα ὅμως ἀμέσως καὶ δι' ἐφαρμογῆς τῶν κανόνων τοῦ Πυθαγόρου καὶ τοῦ Πλάτωνος. Τοιαῦτα τρίγωνα (καὶ ἄλλα προκύπτοντα ἐκ τούτων διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῶν πλευρῶν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν) εἶχον διὰ τοὺς Ἰνδοὺς ἀξιόλογον πρακτικὴν ἀξίαν, εἰς γηπεδομετρικὰς ἐργασίας, ἀναλόγους πρὸς τὰς τῶν Αἰγυπτίων «ἁρπεδοναπτῶν» (§ 15), ἐντεῦθεν δὲ ἐξηγεῖται καὶ ὁ τίτλος τοῦ ἔργου, ποὺ σημαίνει «κανὼν τῶν χορδῶν».

Ἄλλα χωρία τοῦ Sulvasutras ἀποδεικνύουν οἰκειότητα τοῦ συγγραφέως μὲ τὴν ἔννοιαν τῶν καθέτων εὐθειῶν. Ἀλλ' αἱ σελίδες, ποὺ ἔχουν τὸ μεγαλύτερον ἐνδιαφέρον εἶναι αἱ ἀφιερωμέναι εἰς τὸν μετασχηματισμὸν ἑνὸς τετραγώνου ABCD εἰς ἰσοδύναμον κύκλον. Ἡ ὑποδεικνυομένη πρὸς τοῦτο μέθοδος εἶναι ἡ ἀκόλουθος: «Ἔστω O (σχ. 19) τὸ σημεῖον συναντήσεως τῶν διαγωνίων AC, BD τοῦ δοθέντος τετραγώνου, EF ἡ παράλληλος ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ O πρὸς τὰς πλευρὰς AD, BC καὶ G τὸ σημεῖον, καθ' ὃ ἡ προέκτασις αὐτῆς συναντᾶται ἀπὸ τὴν περιγεγραμμένην εἰς τὸ τετράγωνον περιφέρειαν. Ἐὰν λάβωμεν EM = EG·1/3, ὁ κύκλος ὁ ἔχων κέντρον O καὶ ἀκτῖνα OM εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὸ δοθὲν τετράγωνον».



Σχ. 19

Διὰ νὰ ἐκφέρωμεν κρίσιν περὶ τῆς ἀκριβείας τῆς ἀνωτέρω γεωμετρικῆς

κατασκευῆς, παρατηροῦμεν ὅτι, ἐὰν εἶναι l τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου ABCD, θὰ ἔχωμεν τὰς σχέσεις :

$$OA = OG = \frac{l}{\sqrt{2}}, \quad EG = \frac{l(\sqrt{2}-1)}{2}$$

$$EM = \frac{l(\sqrt{2}-1)}{6}, \quad OM = \frac{l(\sqrt{2}+2)}{6}.$$

Ἐὰν ἡ διάμετρος τοῦ εὑρεθέντος κύκλου ὀνομασθῇ d (= 2·OM), θὰ εἶναι, δυνάμει τῆς τελευταίας ἐκ τῶν ἀνωτέρω σχέσεων :

$$\frac{l}{d} = \frac{3}{2}(2-\sqrt{2}).$$

Ὑποτιθεμένου τώρα ὅτι τὸ δοθὲν τετράγωνον εἶναι εἰς τὴν πραγματικότητα ἰσοδύναμον πρὸς τὸν κύκλον διαμέτρου d, πρέπει νὰ ἔχωμεν :

$$l^2 = \frac{\pi d^2}{4}$$

καὶ συνεπῶς :

$$\frac{\pi}{4} = \left(\frac{l}{d}\right)^2 = \frac{9}{4}(2-\sqrt{2})^2$$

ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό :

$$\pi = 9(6-4\sqrt{2}) \qquad (1)$$

Ἡ ἔκφρασις αὕτη ἀνάγει τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ π εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τῆς $\sqrt{2}$. Ἀλλ' εἰς τὸν Salvasutras περιέχεται ἡ τιμή :

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3.4} - \frac{1}{3\cdot4\cdot34}. \qquad (2)$$

Εἶναι δὲ ἡ τιμὴ αὕτη ἀκριβεστέρα ἐκείνων ποὺ εἴχομεν συναντήσει προηγουμένως καὶ δύναται νὰ νοηθῇ προκύπτουσα κατόπιν ἐπανειλημμένης ἐφαρμογῆς τοῦ προσεγγιστικοῦ τύπου:

$$\sqrt{a^2 \pm b} = a \pm \frac{b}{2a}, \qquad (3)$$

εἰς τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ λαμβάνωμεν τὸ σημεῖον + ἢ τὸ σημεῖον —, ἐφ' ὅσον τὸ α προσεγγίζει κατ' ἔλλειψιν ἢ ὑπεροχὴν τὸν ἀριθμὸν τοῦ ὑπορρίζου. Πράγματι ἐκ τῆς σχέσεως :

$$2\cdot9 = 16 + 2$$

ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό,

$$2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \frac{2}{9},$$

κατ' ἐφαρμογὴν τῆς σχέσεως (3) μὲ τὸ σημεῖον +, εὑρίσκομεν :

$$\sqrt{2} = \frac{4}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{9} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{17}{12} \cdot$$

Ἀλλ' ἐπειδὴ εἶναι :

$$\left(\frac{17}{12}\right)^2 = 2 - \frac{1}{144},$$

ἐφαρμόζοντες τὴν ἰδίαν σχέσιν (3) μὲ τὸ σημεῖον —, εὑρίσκομεν :

$$\sqrt{2} = \sqrt{\left(\frac{17}{12}\right)^2 - \frac{1}{144}} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34},$$

ἤτοι τὸ ἀποτέλεσμα (2) τοῦ Sulvasutras.

Ἀντικαθιστῶντες τώρα τὴν τιμὴν (2) εἰς τὴν (1) εὑρίσκομεν :

$$\pi = 3 + \frac{3}{34} = 3 + \cfrac{1}{11 + \cfrac{1}{3}} = 3{,}088,$$

δηλαδὴ τιμὴν τοῦ π ἐλάχιστα ἱκανοποιητικήν. Διὰ τοῦτο ἡ προτεινομένη γεωμετρικὴ κατασκευὴ δὲν ἁρμόζει διὰ τὴν ἀναζήτησιν μιᾶς καλῆς τιμῆς προσεγγίσεως τοῦ π. Πιθανῶς εἰς τὸν σκοπὸν αὐτὸν ν' ἀποβλέπουν ἄλλαι τρεῖς μέθοδοι, περιεχόμεναι εἰς τὸν Sulvasutras, διὰ τὴν λύσιν τοῦ ἰδίου προβλήματος ἢ τοῦ ἀντιστρόφου καὶ τὰς ὁποίας θεωροῦμεν σκόπιμον ν' ἀναφέρωμεν :

α) «Ἡ διάμετρος d τοῦ κύκλου τοῦ ἰσοδυνάμου πρὸς τὸ τετράγωνον πλευρᾶς l εἶναι 8/10 τῆς διαγωνίου τοῦ τετραγώνου τούτου». Τοῦτο ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ νὰ δεχθῶμεν :

$$l^2 = \pi\left(\frac{4}{10} l\sqrt{2}\right)^2,$$

ἤτοι $\pi = 3 + {}^1/_8 = 3{,}125$. Ἀξιοσημείωτον εἶναι ὅτι τὴν τιμὴν αὐτὴν ἀπαντῶμεν ἐν Εὐρώπῃ εἰς ἕνα γεωμετρικὸν ἔργον τοῦ διασήμου ζωγράφου Albert Dürer (1471 - 1528).

β) «Ἡ πλευρὰ l τοῦ τετραγώνου τοῦ ἰσοδυνάμου πρὸς τὸν κύκλον διαμέτρου d εἶναι 7/8 d». Ἡ σχέσις αὕτη ἐκφράζεται διὰ τοῦ τύπου :

$$\left(\frac{7}{8} d\right)^2 = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2,$$

ἐκ τοῦ ὁποίου λαμβάνεται $\pi = 49/16 = 3 + {}^1/_{16} = 3{,}0625$.

γ) «Ἡ πλευρὰ l τοῦ τετραγώνου τοῦ ἰσοδυνάμου πρὸς τὸν κύκλον διαμέτρου d εἶναι 13/15 d» Μὲ ἄλλους ὅρους:

$$\left(\frac{13\,d}{15}\right)^2 = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2$$

καὶ ἑπομένως $\pi = 3 + \dfrac{1}{225} = 3{,}0044.$

Περιττὸν νὰ προσθέσωμεν, ὅτι ὅλαι αἱ οὕτω προκύπτουσαι τιμαὶ τοῦ π εἶναι μεταξύ των διάφοροι καὶ ἀρκετὰ μακρὰν τῆς ἀκριβείας.

Aryabhata

132. Ὁ Sulvasutras ἐκπροσωπεῖ τὴν πρώτην περίοδον τῶν ἰνδικῶν μαθηματικῶν. Φαίνεται δὲ ὅτι τὸ ἔργον τοῦτο δὲν ἤσκησε καμμίαν ἀξιόλογον ἐπίδρασιν ἐπὶ τῆς μετέπειτα ἐξελίξεως, ἂν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν, ὅτι οὐδεμία μνεία γίνεται περὶ αὐτοῦ εἰς μεταγενέστερα ἔργα διαφυγόντα τὴν καταστροφήν. Τὰ γνωστότερα ὀνόματα ἰνδῶν μαθηματικῶν συγγραφέων εἶναι: Aryabhata* (ἔζησε μεταξὺ V καὶ VI αἰῶνος μ.Χ.), Brahmagupta (ἀνήκει εἰς τὸν VII αἰῶνα, γεννηθεὶς τὸ 598) καὶ Bhascara (γεννηθεὶς τὸ 1150). Προστίθεται εἰς αὐτοὺς ἕνας συγγραφεὺς ἀνώνυμος, εἰς τὸν ὁποῖον ὀφείλεται ἕνα ἀριθμητικὸν ἀπόσπασμα γραφέν, κατὰ τοὺς ἰνδολόγους, τὸν III ἢ IV αἰῶνα μ.Χ. Τοῦ ἀποσπάσματος τούτου ἀντίγραφον ἀνῆκον εἰς τὴν περίοδον 700 - 900 μ.Χ., ἀνευρέθη εἰς Baskhali (Β - Δ τῶν Ἰνδιῶν).

Ἐπὶ πλέον ἀναφέρονται μερικοὶ μέτριοι σχολιασταί, ἀκμάσαντες κατὰ τὴν περίοδον τῶν αἰώνων XV - XVII. Θὰ ἐξετάσωμεν ἐδῶ ἐπισταμένως τὰ ἔργα τῶν πρώτων, θ' ἀνατρέξωμεν δὲ εἰς τοὺς τελευταίους μόνον ὅταν πρόκειται νὰ διευκολύνωμεν τὴν κατανόησιν τῶν ἀληθῶν ἐκπροσώπων τῆς ἰνδικῆς μαθηματικῆς σκέψεως.

133. Ἀπὸ ἕνα δίστιχον, ποὺ ὀφείλεται εἰς τὸν Aryabhata, προκύπτει ὅτι οὗτος ἐγεννήθη τὸ 475 ἢ 476 μ.Χ. καὶ ὅτι ἔγραφε — πιθανῶς δὲ καὶ ἐδίδασκε — εἰς Kusumapura (τὴν σημερινὴν Patua), πρωτεύουσαν τῆς ἀρχαιοτέρας ἰνδικῆς μοναρχίας. Ὡς πρὸς τὴν τύχην ποὺ εἶχον τὰ ἔργα του, ἀξίζει νὰ σημειώσωμεν ὅτι ὁ διάσημος ἄραψ ταξιδιώτης καὶ λόγιος Al — Biruni (973 - 1048) ἔλαβεν ἀφορμὴν νὰ δηλώσῃ — εἰς μίαν περίφημον ἔκθεσιν ταξιδίου του εἰς τὰς Ἰνδίας, τῆς ὁποίας τὴν συγγραφὴν ἐπεράτωσε

* Διὰ τὸν μαθηματικὸν τοῦτον ἠγέρθη ἕνα πρόβλημα διπλασιασμοῦ ὅμοιον τοῦ ὁποίου ἔχομεν ἤδη συναντήσει εἰς τὴν ἱστορίαν ἄλλων λαῶν. Ἐσημειώθη δηλαδὴ τὰ τελευταῖα ἔτη ἡ ὕπαρξις καὶ δευτέρου Aryabhata, ζήσαντος τὸν X αἰῶνα μ.Χ.

γ) «Ἡ πλευρὰ l τοῦ τετραγώνου τοῦ ἰσοδυνάμου πρὸς τὸν κύκλον διαμέτρου d εἶναι 13/15 d» Μὲ ἄλλους ὅρους:

$$\left(\frac{13\,d}{15}\right)^2 = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2$$

καὶ ἑπομένως $\pi = 3 + \dfrac{1}{225} = 3{,}0044.$

Περιττὸν νὰ προσθέσωμεν, ὅτι ὅλαι αἱ οὕτω προκύπτουσαι τιμαὶ τοῦ π εἶναι μεταξύ των διάφοροι καὶ ἀρκετὰ μακρὰν τῆς ἀκριβείας.

Aryabhata

132. Ὁ Sulvasutras ἐκπροσωπεῖ τὴν πρώτην περίοδον τῶν ἰνδικῶν μαθηματικῶν. Φαίνεται δὲ ὅτι τὸ ἔργον τοῦτο δὲν ἤσκησε καμμίαν ἀξιόλογον ἐπίδρασιν ἐπὶ τῆς μετέπειτα ἐξελίξεως, ἂν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν, ὅτι οὐδεμία μνεία γίνεται περὶ αὐτοῦ εἰς μεταγενέστερα ἔργα διαφυγόντα τὴν καταστροφήν. Τὰ γνωστότερα ὀνόματα ἰνδῶν μαθηματικῶν συγγραφέων εἶναι: Aryabhata* (ἔζησε μεταξὺ V καὶ VI αἰῶνος μ.Χ.), Brahmagupta (ἀνήκει εἰς τὸν VII αἰῶνα, γεννηθεὶς τὸ 598) καὶ Bhascara (γεννηθεὶς τὸ 1150). Προστίθεται εἰς αὐτοὺς ἕνας συγγραφεὺς ἀνώνυμος, εἰς τὸν ὁποῖον ὀφείλεται ἕνα ἀριθμητικὸν ἀπόσπασμα γραφέν, κατὰ τοὺς ἰνδολόγους, τὸν III ἢ IV αἰῶνα μ.Χ. Τοῦ ἀποσπάσματος τούτου ἀντίγραφον ἀνῆκον εἰς τὴν περίοδον 700 - 900 μ.Χ., ἀνευρέθη εἰς Baskhali (Β - Δ τῶν Ἰνδιῶν).

Ἐπὶ πλέον ἀναφέρονται μερικοὶ μέτριοι σχολιασταί, ἀκμάσαντες κατὰ τὴν περίοδον τῶν αἰώνων XV - XVII. Θὰ ἐξετάσωμεν ἐδῶ ἐπισταμένως τὰ ἔργα τῶν πρώτων, θ' ἀνατρέξωμεν δὲ εἰς τοὺς τελευταίους μόνον ὅταν πρόκειται νὰ διευκολύνωμεν τὴν κατανόησιν τῶν ἀληθῶν ἐκπροσώπων τῆς ἰνδικῆς μαθηματικῆς σκέψεως.

133. Ἀπὸ ἕνα δίστιχον, ποὺ ὀφείλεται εἰς τὸν Aryabhata, προκύπτει ὅτι οὗτος ἐγεννήθη τὸ 475 ἢ 476 μ.Χ. καὶ ὅτι ἔγραφε — πιθανῶς δὲ καὶ ἐδίδασκε — εἰς Kusumapura (τὴν σημερινὴν Patua), πρωτεύουσαν τῆς ἀρχαιοτέρας ἰνδικῆς μοναρχίας. Ὡς πρὸς τὴν τύχην ποὺ εἶχον τὰ ἔργα του, ἀξίζει νὰ σημειώσωμεν ὅτι ὁ διάσημος ἄραψ ταξιδιώτης καὶ λόγιος Al — Biruni (973 - 1048) ἔλαβεν ἀφορμὴν νὰ δηλώσῃ — εἰς μίαν περίφημον ἔκθεσιν ταξιδίου του εἰς τὰς Ἰνδίας, τῆς ὁποίας τὴν συγγραφὴν ἐπεράτωσε

* Διὰ τὸν μαθηματικὸν τοῦτον ἠγέρθη ἕνα πρόβλημα διπλασιασμοῦ ὅμοιον τοῦ ὁποίου ἔχομεν ἤδη συναντήσει εἰς τὴν ἱστορίαν ἄλλων λαῶν. Ἐσημειώθη δηλαδὴ τὰ τελευταῖα ἔτη ἡ ὕπαρξις καὶ δευτέρου Aryabhata, ζήσαντος τὸν X αἰῶνα μ.Χ.

τὴν 18ην ἢ 19ην Δεκεμβρίου 1031 — ὅτι δὲν κατώρθωσε νὰ προμηθευθῇ κανένα ἐξ αὐτῶν. Ἀνάλογον δήλωσιν ἔκαμε κατὰ τὴν δευτέραν δεκαετίαν τοῦ παρελθόντος αἰῶνος ἕνας ἀξιόλογος ἄγγλος φιλομαθής, ὁ T. Colebrooke. Κατὰ μοναδικὴν σύμπτωσιν, ὁ ὀλλανδὸς σοφὸς H. Kern εἶχεν ἀνακαλύψει εἰς Καλκούταν δύο ἀντίγραφα ἑνὸς κειμένου τοῦ Aryabhata, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἕνα εἶχε γραφῆ τὸ 1820, τὸ δὲ ἄλλο τὸ 1863, καὶ τοιουτοτρόπως κατέστη δυνατὸν τὸ ἔργον τοῦτο νὰ ἔλθῃ εἰς τὸ φῶς τὸ 1874.

Τὸ Aryabhatiyam (αὐτὸς εἶναι ὁ τίτλος τοῦ ἔργου) εἶναι τὸ πρῶτον κείμενον, ἐκ τῶν γνωστῶν μας σήμερον, εἰς τὸ ὁποῖον ἐκτίθεται τὸ ἀριθμητικόν μας σύστημα. Περιλαμβάνει 108 στροφάς, κατανεμημένας εἰς τέσσαρα κεφάλαια, τῶν ὁποίων τὰ θέματα εἶναι: I. Οὐράνιαι ἁρμονίαι (πρόκειται περὶ ἀστρονομικῶν πινάκων), II. Στοιχεῖα ἀριθμητικοῦ λογισμοῦ, III. Ὁ χρόνος καὶ ἡ μέτρησίς του, IV. Αἱ σφαῖραι. Ἐκ τούτων τὸ κεφάλαιον IV παρουσιάζει ἰδιαίτερον ἐνδιαφέρον καὶ διὰ τοῦτο καθῆκον τοῦ ἱστορικοῦ εἶναι νὰ δώσῃ μίαν περίληψιν τῆς ὕλης του.

Ἔπειτα ἀπὸ μίαν εἰσαγωγικὴν ἐπίκλησιν πρὸς τὸν Βράχμα, τὴν Γῆν, τὰ Ἄστρα καὶ τοὺς Ἀστερισμούς, ὁ συγγραφεὺς παρουσιάζει ἕνα πίνακα τῶν ἐν χρήσει ὀνομάτων διὰ τὴν μονάδα καὶ τὰς ἐννέα πρώτας δυνάμεις τοῦ δέκα. Διδάσκει κατόπιν πῶς εὑρίσκεται τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τετραπλεύρου καὶ ὁ ὄγκος ἑνὸς κύβου δεδομένης πλευρᾶς καὶ τέλος πῶς ἐξάγεται ἡ τετραγωνικὴ καὶ ἡ κυβικὴ ρίζα ἑνὸς ἀκεραίου ἀριθμοῦ, πρᾶγμα ἰσοδύναμον μὲ τὴν λύσιν τῶν ἀντιστρόφων προβλημάτων τοῦ τετραγώνου καὶ τοῦ κύβου.

Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ἐμβαδοῦ ἑνὸς τριγώνου εἰσηγεῖται τὴν ἐκτέλεσιν τοῦ γινομένου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ὕψους, τὸν αὐτὸν δὲ κανόνα διδάσκει διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ὄγκου ἑνὸς τετραέδρου. Ἐπειδὴ τώρα εἶναι ἀδύνατον νὰ δεχθῶμεν ὅτι ἐνεφιλοχώρησε σφάλμα ἀντιγραφῆς, διότι τότε θὰ παρεβιάζοντο οἱ νόμοι τῆς ἰνδικῆς προσῳδίας, εἴμεθα ὑποχρεωμένοι νὰ παραδεχθῶμεν ὅτι εὑρισκόμεθα πρὸ ἑνὸς ἀδιαφιλονικήτου καὶ βαρυτάτου σφάλματος.

Τοῦτο δὲ ἀκολουθεῖ ὀλίγον κατωτέρω ἕνα δεύτερον. Ἐνῷ διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κύκλου ὁ Aryabhata διατυπώνει τὴν ἀλήθειαν ὅτι ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον τοῦ μήκους τῆς περιφερείας ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος, διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ὄγκου τῆς σφαίρας διδάσκει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἐμβαδὸν μεγίστου κύκλου της ἐπὶ τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ ἐμβαδοῦ τούτου. Μὲ ἄλλους λόγους, ἀντὶ τῆς ὀρθῆς ἐκφράσεως, διὰ τὸν ὄγκον τῆς σφαίρας,

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3,$$

λαμβάνει $\pi\sqrt{\pi r^3}$, ὅπερ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὴν παραδοχὴν τιμῆς τοῦ $\pi = 16/9$,

δηλαδὴ τῆς τιμῆς ἐκείνης, τὴν ὁποίαν ὡς εἴδομεν εἶχον υἱοθετήσει οἱ Αἰγύπτιοι (σύμπτωσις ἄραγε τυχαία ;). Τὰ ἀποκαλυφθέντα σφάλματα ἀποδεικνύουν ὅτι ἐκεῖνος ποὺ τὰ διέπραξε δὲν εἶχε γνῶσιν τῶν δύο βιβλίων Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου, ποὺ εἶχεν ἤδη γράψει ὁ Ἀρχιμήδης ἑπτὰ αἰῶνας προηγουμένως.

Ἀκολουθοῦν ἀκριβεῖς κανόνες διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ἐμβαδοῦ τραπεζίου ὡς καὶ τῶν ἀποστάσεων τοῦ σημείου τομῆς τῶν διαγωνίων ἀπὸ τὰς δύο βάσεις.

Ὁ πρῶτος στίχος τῆς ἑπομένης στροφῆς εἶναι τόσον ἀπελπιστικὰ συνεπτυγμένος, ὥστε εἶναι ἀδύνατον ἐντελῶς νὰ ἐκφέρωμεν κρίσιν ἐπὶ τῆς ἀξίας τοῦ κανόνος, τὸν ὁποῖον διδάσκει διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ἐμβαδοῦ ἑνὸς ἐπιπέδου πολυγώνου. Ὁ δεύτερος στίχος ὁμιλεῖ διὰ τὴν ἰσότητα μεταξὺ τῆς πλευρᾶς τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου καὶ τῆς ἀκτῖνος τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

Περαιτέρω μανθάνομεν, ὅτι μία περιφέρεια μὲ διάμετρον 2000 ἔχει μῆκος 62832, πρᾶγμα ἀνταποκρινόμενον εἰς τιμὴν τοῦ $\pi=3,1416$, ἑπομένως τιμὴν ἀρκετῆς προσεγγίσεως, γνωστῆς ἤδη εἰς τὸν Κλαύδιον Πτολεμαῖον (§ 70).

Ἡ ἑπομένη στροφὴ καλύπτεται μέχρι σήμερον ἀπὸ ἀδιαπέρατον ὁμίχλην. Διαφαίνεται μόνον ὅτι σκοπός της εἶναι ἡ παροχὴ ὁδηγιῶν πρὸς κατασκευὴν ἑνὸς πίνακος ἡμιτόνων, θέμα τὸ ὁποῖον θὰ ἴδωμεν μετ' ὀλίγον νὰ πραγματεύωνται ἄλλοι συγγραφεῖς κατὰ τρόπον περισσότερον καταληπτόν.

Ἡ ἀμέσως ἀκολουθοῦσα στροφὴ ἀποτελεῖ προοίμιον εἰς προβλήματα ἔχοντα ὡς σκοπὸν τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ὕψους ἀντικειμένων μέσῳ τῆς σκιᾶς των καὶ τὰ ὁποῖα ἐνθυμίζουν τὸν Πυθαγόραν καὶ τὸν Θαλῆν.

Ἐν συνεχείᾳ διδάσκει, ὅτι τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ὕψος ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ἡ μέση ἀνάλογος τῶν δύο τμημάτων εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζει τὴν ὑποτείνουσαν. Κατόπιν δίδει ἐκφράσεις μερικῶν εὐθυγράμμων τμημάτων συνδεομένων μὲ τὸ σύστημα δύο τεμνομένων περιφερειῶν, ποὺ ἀπαντᾶται εἰς τὴν ἀστρονομίαν. Εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο ὁ Aryabhata προχωρεῖ εἰς τὴν παράθεσιν βασικῶν τύπων, σχετικῶν μὲ τὰς ἀριθμητικὰς προόδους, τῶν ὁποίων οἱ σπουδαιότεροι φαίνονται ὡς προερχόμενοι ἐκ τοῦ γνωστοῦ ἔργου τοῦ Διοφάντου Περὶ πολυγώνων ἀριθμῶν. Ἐν συνεχείᾳ διδάσκει τὰς ἐκφράσεις τῶν ἀθροισμάτων τῶν τετραγώνων καὶ τῶν κύβων τῶν n πρώτων διαδοχικῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν.

Μετὰ τὴν ὕλην αὐτήν, ἡ ὁποία εἶναι ἀρκετὰ ὑψηλῆς στάθμης, ἀναφέρονται αἱ ἀκόλουθοι στοιχειωδέσταται ταυτότητες :

$$(a+b)^2-(a^2+b^2)=2ab,$$

$$\frac{\sqrt{4ab+(a-b^2)}\pm(a-b)}{2}=\begin{cases}a\\ b\end{cases}$$

καὶ μετὰ ταῦτα μία σειρὰ προβλημάτων ἁπλοῦ τόκου, μερικὰ τῶν ὁποίων ἀπαιτοῦν τὴν λύσιν ἐξισώσεων δευτέρου βαθμοῦ. Ἐκτίθεται ἔπειτα ἡ ἁπλῆ μέθοδος τῶν τριῶν, ὁ πολλαπλασιασμὸς δύο κλασμάτων, ἕνας κανών, ὁ ὁποῖος ἀνάγεται εἰς τὸ «Θυμαρίδειον ἐπάνθημα» (§ 84), ἕνας ἄλλος, ὁ ὁποῖος χρησιμεύει εἰς τὴν λύσιν οἱασδήποτε ἐξισώσεως τῆς μορφῆς $ax + b = a'x + b'$ καὶ τέλος, εἰς εἰδικὰς περιπτώσεις, τὸ γνωστότατον «πρόβλημα τῶν ταχυδρόμων».

Ὅλα τ' ἀνωτέρω δὲν ὑπερβαίνουν, ὅπως εἴδομεν, τὴν στάθμην, εἰς τὴν ὁποίαν ἔφθασεν ἡ ἐπιστήμη τοῦ λογισμοῦ εἰς τὴν ἀρχαίαν Ἑλλάδα. Ἀπαντᾶται ὅμως ἐδῶ ἕνα νέον ἐπίτευγμα σημαντικώτατον: ἡ λύσις, δηλαδή, εἰς ἀκεραίους καὶ θετικοὺς ἀριθμοὺς τῶν πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους. Καὶ παρ' ὅλην τὴν συνεσφιγμένην διατύπωσιν τοῦ κειμένου, κατωρθώθη νὰ διαπιστωθῇ, ὅτι ἡ πορεία τὴν ὁποίαν ἀκολουθεῖ διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὸν σκοπόν, συμπίπτει κατ' οὐσίαν πρὸς τὴν ἐφαρμοζομένην σήμερον μέθοδον.

Ἐξ ὅλων τῶν ἀνωτέρω συνάγεται, ὅτι τὸ ἔργον τοῦ Aryabhata ἀποτελεῖ μίαν ἀνθολογίαν, ὄχι τόσον καλῶς ταξινομημένην, ἀποβλέπουσαν εἰς τὴν παροχὴν γνώσεων καὶ μεθόδων κοινῆς χρήσεως εἰς τοὺς πρακτικούς. Εἶναι δηλαδὴ κάτι παρόμοιον πρὸς τὸ «Ἐγχειρίδιον λογιστοῦ» τοῦ Ahmes (§ 10) καὶ πρὸς μερικὰ ἀποσπάσματα φερόμενα ὑπὸ τὸ ὄνομα τοῦ Ἥρωνος τῆς Ἀλεξανδρείας.

Ἡ πλήρης ἔλλειψις ἀποδείξεων ἐπιτρέπει νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ συγγραφεὺς ἤντλησεν ἐκ πηγῶν (ἐθνικῶν ἢ ἑλληνικῶν ;) ἀγνώστων εἰς ἡμᾶς. Τὰ σφάλματα ὅμως εἰς τὰ ὁποῖα περιέπεσεν ὁδηγοῦν εἰς τὸ συμπέρασμα ἢ ὅτι ὁ συγγραφεὺς ἦτο μετρίας διανοήσεως, ὥστε νὰ μὴ δύναται νὰ διακρίνῃ τὴν ἀλήθειαν ἀπὸ τὸ ψεῦδος ἢ ὅτι δὲν ἐζήτησε πάντοτε τὴν βοήθειαν αὐθεντιῶν, ἀξίων μεγαλυτέρας ἐμπιστοσύνης.

Brahmagupta καὶ Bhascara

134. Ὑπάρχουν δύο ἄλλα κείμενα, ὀφειλόμενα εἰς τὸν Brahmagupta (περίπου 628) καὶ τὸν Bhascara (περίπου 1150) ἀντιστοίχως, τὰ ὁποῖα θὰ ἔπρεπε νὰ συμβουλευθῇ ὁ ἐπιθυμῶν νὰ σχηματίσῃ μίαν ἀκριβῆ ἀντίληψιν τῶν ἰνδικῶν μαθηματικῶν καὶ τὰ ὁποῖα δὲν εἶναι παρὰ κεφάλαια, ἀποσπασθέντα ἀπὸ ἔργα προωρισμένα διὰ τὴν προπαρασκευὴν τῶν ὑποψηφίων ἀστρονόμων. Τὰ κεφάλαια αὐτὰ θὰ μᾶς χρησιμεύσουν, διὰ νὰ συμπληρώσωμεν τὸ πλαίσιον τῶν γνώσεών μας ἐπὶ τῶν ἰνδικῶν μαθηματικῶν, ὅπως μᾶς ἐχρησίμευσαν μερικὰ κεφάλαια τῆς Ἀλμαγέστας, διὰ τὸν ἴδιον σκοπόν, προκειμένου περὶ τῶν ἑλληνικῶν μαθηματικῶν. Κάθε κεφάλαιον περιλαμβάνει εἰς στίχους τὴν ἐκφώνησιν ἑνὸς κανόνος καὶ ἔπειτα ἐφαρμο-

καὶ μετὰ ταῦτα μία σειρὰ προβλημάτων ἁπλοῦ τόκου, μερικὰ τῶν ὁποίων ἀπαιτοῦν τὴν λύσιν ἐξισώσεων δευτέρου βαθμοῦ. Ἐκτίθεται ἔπειτα ἡ ἁπλῆ μέθοδος τῶν τριῶν, ὁ πολλαπλασιασμὸς δύο κλασμάτων, ἕνας κανών, ὁ ὁποῖος ἀνάγεται εἰς τὸ «Θυμαρίδειον ἐπάνθημα» (§ 84), ἕνας ἄλλος, ὁ ὁποῖος χρησιμεύει εἰς τὴν λύσιν οἱασδήποτε ἐξισώσεως τῆς μορφῆς $ax+b=a'x+b'$ καὶ τέλος, εἰς εἰδικὰς περιπτώσεις, τὸ γνωστότατον «πρόβλημα τῶν ταχυδρόμων».

Ὅλα τ' ἀνωτέρω δὲν ὑπερβαίνουν, ὅπως εἴδομεν, τὴν στάθμην, εἰς τὴν ὁποίαν ἔφθασεν ἡ ἐπιστήμη τοῦ λογισμοῦ εἰς τὴν ἀρχαίαν Ἑλλάδα. Ἀπαντᾶται ὅμως ἐδῶ ἕνα νέον ἐπίτευγμα σημαντικώτατον : ἡ λύσις, δηλαδή, εἰς ἀκεραίους καὶ θετικοὺς ἀριθμοὺς τῶν πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους. Καὶ παρ' ὅλην τὴν συνεσφιγμένην διατύπωσιν τοῦ κειμένου, κατωρθώθη νὰ διαπιστωθῇ, ὅτι ἡ πορεία τὴν ὁποίαν ἀκολουθεῖ διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὸν σκοπόν, συμπίπτει κατ' οὐσίαν πρὸς τὴν ἐφαρμοζομένην σήμερον μέθοδον.

Ἐξ ὅλων τῶν ἀνωτέρω συνάγεται, ὅτι τὸ ἔργον τοῦ Aryabhata ἀποτελεῖ μίαν ἀνθολογίαν, ὄχι τόσον καλῶς ταξινομημένην, ἀποβλέπουσαν εἰς τὴν παροχὴν γνώσεων καὶ μεθόδων κοινῆς χρήσεως εἰς τοὺς πρακτικούς. Εἶναι δηλαδὴ κάτι παρόμοιον πρὸς τὸ «Ἐγχειρίδιον λογιστοῦ» τοῦ Ahmes (§ 10) καὶ πρὸς μερικὰ ἀποσπάσματα φερόμενα ὑπὸ τὸ ὄνομα τοῦ Ἥρωνος τῆς Ἀλεξανδρείας.

Ἡ πλήρης ἔλλειψις ἀποδείξεων ἐπιτρέπει νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ συγγραφεὺς ἤντλησεν ἐκ πηγῶν (ἐθνικῶν ἢ ἑλληνικῶν ;) ἀγνώστων εἰς ἡμᾶς. Τὰ σφάλματα ὅμως εἰς τὰ ὁποῖα περιέπεσεν ὁδηγοῦν εἰς τὸ συμπέρασμα ἢ ὅτι ὁ συγγραφεὺς ἦτο μετρίας διανοήσεως, ὥστε νὰ μὴ δύναται νὰ διακρίνῃ τὴν ἀλήθειαν ἀπὸ τὸ ψεῦδος ἢ ὅτι δὲν ἐζήτησε πάντοτε τὴν βοήθειαν αὐθεντιῶν, ἀξίων μεγαλυτέρας ἐμπιστοσύνης.

Brahmagupta καὶ Bhascara

134. Ὑπάρχουν δύο ἄλλα κείμενα, ὀφειλόμενα εἰς τὸν Brahmagupta (περίπου 628) καὶ τὸν Bhascara (περίπου 1150) ἀντιστοίχως, τὰ ὁποῖα θὰ ἔπρεπε νὰ συμβουλευθῇ ὁ ἐπιθυμῶν νὰ σχηματίσῃ μίαν ἀκριβῆ ἀντίληψιν τῶν ἰνδικῶν μαθηματικῶν καὶ τὰ ὁποῖα δὲν εἶναι παρὰ κεφάλαια, ἀποσπασθέντα ἀπὸ ἔργα προωρισμένα διὰ τὴν προπαρασκευὴν τῶν ὑποψηφίων ἀστρονόμων. Τὰ κεφάλαια αὐτὰ θὰ μᾶς χρησιμεύσουν, διὰ νὰ συμπληρώσωμεν τὸ πλαίσιον τῶν γνώσεών μας ἐπὶ τῶν ἰνδικῶν μαθηματικῶν, ὅπως μᾶς ἐχρησίμευσαν μερικὰ κεφάλαια τῆς Ἀλμαγέστας, διὰ τὸν ἴδιον σκοπόν, προκειμένου περὶ τῶν ἑλληνικῶν μαθηματικῶν. Κάθε κεφάλαιον περιλαμβάνει εἰς στίχους τὴν ἐκφώνησιν ἑνὸς κανόνος καὶ ἔπειτα ἐφαρμο-

γὴν τούτου εἰς τὴν λύσιν ἑνὸς ἢ περισσοτέρων προβλημάτων. Τόσον εἰς τὸ σύνολον, ὅσον καὶ εἰς τὰς λεπτομερείας μορφῆς καὶ μεθόδου, παρουσιάζουν μεγάλην ὁμοιότητα εἰς τρόπον, ὥστε, πρὸς ἀποφυγὴν ὀχληρῶν ἐπαναλήψεων, θὰ περιορισθῶμεν νὰ ἐκθέσωμεν μόνον ὅ,τι οὐσιῶδες εὑρίσκεται εἰς αὐτά.

Ὁ Bhascara, ὁ συγγραφεὺς τῆς Lilavati*, τοῦ σπουδαιοτέρου ἐκ τῶν περὶ ὧν ὁ λόγος κειμένων, δηλοῖ ἐν προοιμίῳ, ὅτι «ἐκεῖνος, ποὺ γνωρίζει καθαρὰ καὶ ξάστερα τὴν πρόσθεσιν, τὰς ἄλλας εἴκοσι πράξεις καὶ τοὺς ὀκτὼ προσδιορισμούς, μὴ ἐξαιρουμένου ἐκείνου μέσῳ τῆς σκιᾶς, ἠμπορεῖ νὰ λέγεται μαθηματικός». Αἱ πράξεις καὶ οἱ προσδιορισμοί, περὶ τῶν ὁποίων ὁμιλεῖ, καὶ οἱ ὁποῖοι δίδουν εἰς τὰ ἰνδικὰ μαθηματικὰ τὸν πλέον ἐντυπωσιακὸν χαρακτῆρα, εἶναι ἀνάγκη ν' ἀπαριθμηθοῦν ἐδῶ:

Πράξεις: 1. Πρόσθεσις, 2. Ἀφαίρεσις, 3. Πολλαπλασιασμός, 4. Διαίρεσις, 5. Ὕψωσις εἰς τετράγωνον, 6. Ἐξαγωγὴ τετραγωνικῆς ρίζης, 7. Ὕψωσις εἰς κύβον, 8. Ἐξαγωγὴ κυβικῆς ρίζης, 9 - 14. Πράξεις ἐπὶ τῶν κλασμάτων, 15 - 19. Ἀναλογίαι μὲ τρεῖς, πέντε, ἑπτὰ καὶ ἕνδεκα ὅρους, 20. Ἀνταλλαγαί.

Προσδιορισμοί: 1. Μῖξις, 2. Πρόοδοι, 3. Ἐπίπεδα σχήματα, 4. Ὀρύγματα, 5. Σωροί, 6. Στέγαι, 7. Ἐπιχώματα, 8. Σκιαί.

Ποία εἶναι ἀκριβῶς ἡ γραμμὴ διαχωρισμοῦ μεταξὺ πράξεων καὶ προσδιορισμῶν δὲν εἶναι σαφές. Ἂν αἱ πρόοδοι δὲν περιελαμβάνοντο εἰς τοὺς προσδιορισμούς, θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ δεχθῶμεν, ὅτι αἱ πράξεις ἀνῆκον εἰς τὴν ἀριθμητικήν, ἐνῷ οἱ προσδιορισμοὶ εἰς τὴν πρακτικὴν γεωμετρίαν. Ἀλλ' ὅπως θὰ ἴδωμεν κατωτέρω, αἱ πράξεις καὶ οἱ προσδιορισμοὶ δὲν ἐξαντλοῦν ὅλα τὰ μαθηματικὰ ζητήματα, ποὺ ἐξήτασαν οἱ Ἰνδοί.

Ἂς ἔλθωμεν εἰς κάποιαν σημαντικωτέραν λεπτομέρειαν. Ἀφήνοντες ὀπίσω τὴν πρακτικὴν ἀριθμητικήν, παρατηροῦντες μόνον ὅτι οἱ Ἰνδοὶ εἶχον εἰδικὰ ὀνόματα διὰ τὴν μονάδα καὶ τὰς 17 πρώτας δυνάμεις τοῦ 10, θὰ προχωρήσωμεν εἰς τὸν χαρακτηρισμὸν τοῦ ἀλγεβρικοῦ των συμβολισμοῦ, ὁ ὁποῖος, δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν, ἀντιπροσωπεύει ἕνα μεταβατικὸν στάδιον μεταξὺ διοφαντικῆς καὶ σημερινῆς ἀλγέβρας.

Πρὸς δήλωσιν τῆς ἰσότητος δύο ποσοτήτων δὲν ἐχρησιμοποίουν εἰδικὸν σύμβολον, ἀλλὰ περιωρίζοντο εἰς τὸ νὰ γράφουν τὰς δύο ἴσας ποσότητας ἐπὶ δύο διαδοχικῶν γραμμῶν. Ἐὰν τὰ συγκρινόμενα μεγέθη ἦσαν πολυώνυμα μὲ ἕνα ἄγνωστον, τότε ἐγράφοντο διατεταγμένα κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις αὐτοῦ, οἱ δὲ συντελεσταί, θετικοὶ ἢ ἀρνητικοί, ἐπροτάσσοντο

* Αὐτὸ εἶναι τὸ ὄνομα μιᾶς γυναικός, (τῆς κόρης του), εἰς τὴν ὁποίαν ὁ συγγραφεὺς ἀποτείνει τὰς ἐκφωνήσεις τῶν διαφόρων ζητημάτων. Οὕτω εἰς μίαν ἐξ αὐτῶν διαβάζομεν: «Χαριτωμένη καὶ ἀγαπητὴ Lilavati, ποὺ τὰ μάτια σου σὲ κάνουν νὰ μοιάζῃς σὰν ἐλαφάκι, πές μου, τί βρίσκεις, ἂν πολλαπλασιάσῃς τὸ 135 ἐπὶ τὸ 12;»

τῶν ἀντιστοίχων δυνάμεων. Οὔτε πρὸς δήλωσιν τῆς προσθέσεως εἶχον ἰδιαίτερον σύμβολον, τὸ δὲ γινόμενον ἐδηλοῦτο δι' ἁπλῆς παραθέσεως τῶν παραγόντων. Ἕνα σημεῖον, προτασσόμενον τοῦ ἀριθμοῦ, εἶχε τὴν ἔννοιαν ὅτι οὗτος ἔπρεπε νὰ ληφθῇ ἀρνητικῶς. Ἕνα κλάσμα παριστάνετο μὲ τὸ σύμβολον a/b ἢ $a \div b$. Τέλος, ἡ δευτέρα καὶ τρίτη δύναμις ἑνὸς μεγέθους παριστάνετο μὲ τὰ ἀρχικὰ γράμματα τῶν λέξεων «τετράγωνον» καὶ «κύβος», προτασσόμενα εἰς τὸ σύμβολον τοῦ μεγέθους. Ἂν καὶ ὁ ἀνωτέρω συμβολισμὸς δὲν διαφέρει πολὺ τοῦ ὑπὸ τῶν Ἑλλήνων ἐφαρμοσθέντος, ἐν τούτοις ὑπερέχει τούτου ὡς πρὸς τὴν δυνατότητα ἀναγραφῆς περισσοτέρων ἀγνώστων. Τὸ σημαντικὸν τοῦτο ἀποτέλεσμα ἐπετύγχανον δίδοντες εἰς ἕκαστον ἄγνωστον τὸ ὄνομα ἑνὸς χρώματος καὶ σύμβολον τὸ ἀρχικὸν γράμμα τοῦ χρώματος τούτου.

Εἰς τὴν ἰνδικὴν ἄλγεβραν παρουσιάζει ἰδιαίτερον ἐνδιαφέρον ἕνα χωρίον, ἀφιερωμένον εἰς τοὺς κανόνας τῶν πράξεων μὲ τὸ μηδέν, διότι ἀποδεικνύει ὅτι ἐκτὸς τοῦ ἰδιάζοντος λειτουργήματος, τὸ ὁποῖον ἀνέθεσαν εἰς τὸ σύμβολον τοῦτο πρὸς τελειοποίησιν τῆς ἀριθμογραφίας θέσεως, εἶχον πλήρη ἐπίγνωσιν τοῦ γεγονότος ὅτι τοῦτο ἔχαιρεν εἰς τοὺς λογισμοὺς εἰδικῶν προνομίων! Ἐγνώριζον δηλαδὴ ὄχι μόνον τὰς πράξεις:

$$a \pm 0 = a, \qquad a \times 0 = 0,$$

ἀλλὰ καὶ τὸ γεγονός, ὅτι τὸ 0, ὡς παρονομαστὴς κλάσματος, ἔδιδε γένεσιν εἰς μίαν ὀντότητα νέου εἴδους, προικισμένην μὲ τὴν περιεργοτάτην ἰδιότητα, νὰ μὴ μεταβάλλῃ μέγεθος διὰ τῆς προσθήκης ἢ ἀφαιρέσεως ἑνὸς ἀριθμοῦ ὁσονδήποτε μεγάλου. Δὲν εἶχε λοιπὸν διαφύγει τῆς προσοχῆς των ἡ σπουδαιοτέρα ἰδιότης τοῦ ἀπείρου. Οὔτε τὸ γεγονός, ὅτι ἡ βαθμιαία ἐλάττωσις τοῦ παρονομαστοῦ ἑνὸς κλάσματος προκαλεῖ ἀντίστοιχον αὔξησιν τῆς τιμῆς τούτου πέραν παντὸς ἐπιθυμητοῦ ὁρίου. Εἶναι λοιπὸν θεμιτὸν ν' ἀναγνωρίσωμεν, ὅτι μὲ τὸν Bhascara κάνουν τὴν εἴσοδόν των εἰς τὴν θεωρητικὴν ἀριθμητικὴν οἱ ἀριθμοὶ 0 καὶ ∞.

Οἱ Ἰνδοὶ ἐχειρίζοντο μὲ οἰκειότητα τὰς ἀρνητικὰς ποσότητας, μὲ τὰς ὁποίας ἐσυνήθιζον νὰ παριστοῦν τὰ χρέη, ἀπέκλειον δὲ αὐτὰς ἐκ τῶν λύσεων ἑνὸς προβλήματος, ὅταν ὑπὸ τὰς συνθήκας αὐτοῦ ἦσαν ἀνεπίδεκτοι ἑρμηνείας. Μολονότι δὲν εἶχον φθάσει εἰς τὴν γενικὴν ἔννοιαν τοῦ ἀσυμμέτρου ἀριθμοῦ, εἶχον ἀκριβεῖς γνώσεις γύρω ἀπὸ τοὺς ὑπολογισμοὺς μὲ ριζικά, ὅπως ἀποδεικνύεται ἀπὸ τὰς ἀκολούθους ταυτότητας:

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{a + b \pm 2\sqrt{ab}},$$

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}},$$

τὰς ὁποίας ἐφήρμοζον ὁσάκις παρεῖχον ὠφέλειαν, ὅταν δηλαδὴ τὸ γινόμενον ab εἰς τὴν πρώτην ἢ ἡ διαφορὰ $a^2 - b$ εἰς τὴν δευτέραν ἦσαν τέλεια τετράγωνα. Δὲν ἦτο ἐπίσης ἄγνωστον εἰς αὐτοὺς τὸ ἀμφίσημον τῆς τετραγωνικῆς ρίζης, τὴν δὲ ἔκφρασιν $\sqrt{-a}$ ἐχαρακτήριζον ὡς πρᾶξιν ἀδύνατον.

Οἱ Brahmagupta καὶ Bhascara ἦσαν ἀρκετὰ οἰκεῖοι — ὅπως καὶ ὁ Aryabhata — μὲ τὰ στοιχεῖα τῆς θεωρίας τῶν ἀριθμητικῶν καὶ γεωμετρικῶν προόδων, ἐγνώριζον ἐπὶ πλέον νὰ ὑπολογίζουν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων καὶ τῶν κύβων πεπερασμένου ἀριθμοῦ διαδοχικῶν ἀκεραίων καὶ τέλος ἦσαν εἰς θέσιν νὰ λύσουν τὰ στοιχειωδέστερα προβλήματα ἁπλοῦ τόκου καὶ μερικὰ στοιχειώδη ζητήματα συνδυαστικῆς ἀναλύσεως. Θὰ ἠδύνατο μάλιστα νὰ λεχθῇ ὅτι τῆς τελευταίας ταύτης ἱδρυταὶ ὑπῆρξαν οἱ Ἰνδοί. Προσθέτομεν ὅτι εἰς νεωτέρους χρόνους ἔθεσαν τὰς βάσεις τῆς θεωρίας τῶν μαγικῶν τετραγώνων (τῶν ὁποίων τοὐλάχιστον τὸ ἁπλούστερον ἦτο γνωστὸν εἰς τοὺς Κινέζους), πρᾶγμα τὸ ὁποῖον δὲν θὰ προκαλέσῃ θαυμασμὸν εἰς τοὺς γνωρίζοντας, ὅτι εἰς τοὺς Ἰνδοὺς ἀποδίδεται καὶ ἡ ἐφεύρεσις τοῦ ζατρικίου (σκάκι).

135. Διαθέτοντες ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ ἀλγεβρικοῦ λογισμοῦ, οἱ μαθηματικοί, περὶ τῶν ὁποίων ὁ λόγος, ἠδυνήθησαν ν' ἀντιμετωπίσουν μὲ ἐπιτυχίαν τὴν λύσιν τῶν ἐξισώσεων πρώτου καὶ δευτέρου βαθμοῦ. Ὅσον ἀφορᾷ τὰ ὡρισμένα συστήματα γραμμικῶν ἐξισώσεων, ἡ ἐξέτασις τῶν διαφόρων προβλημάτων, τὰ ὁποῖα οὗτοι ἐπραγματεύθησαν (μερικὰ τῶν ὁποίων δὲν διαφέρουν ἐκείνων, ποὺ ἀπαντῶνται εἰς τὴν ἑλληνικὴν βιβλιογραφίαν, ἐνῷ ἄλλα εὑρίσκονται εἰς τὰς σημερινὰς συλλογὰς σχολικῆς χρήσεως) ἄγει εἰς τὸ συμπέρασμα, ὅτι οἱ Ἰνδοὶ μαθηματικοὶ δὲν ὑπερέβησαν τοὺς Ἕλληνας εἰς ἀλγεβρικὴν δεξιότητα, ἠδύναντο ὅμως, χάρις εἰς τὸν ἀποτελεσματικώτερον συμβολισμόν, νὰ ὑπερνικήσουν τὰς δυσκολίας τοῦ ἀλγεβρικοῦ λογισμοῦ.

Εἶναι ἐπίσης ἀξιοσημείωτον ὅτι παρουσιάζονται χειραφετημένοι ὡς πρὸς τὴν ἰδέαν τῆς ἀποκλειστικῆς ἐξετάσεως τῶν τριῶν περιπτώσεων τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως :

$$x^2 = ax + b, \quad x^2 + ax = b, \quad x^2 + b = ax,$$

αἱ ὁποῖαι ἐπιβάλλονται μόνον ὅταν θέλωμεν οἱ συντελεσταὶ νὰ εἶναι θετικοί. Πρὸς λύσιν αὐτῶν ἐχρησιμοποίουν μίαν μέθοδον μὴ διαφέρουσαν τῆς σήμερον ἐν χρήσει καὶ δὲν ἠρνοῦντο τὰς δύο ρίζας, ὅταν ὑπῆρχον τοιαῦται θετικαί. Κατὰ συνέπειαν ἡ ὑπεροχὴ τῶν ἔργων τούτων ἐν σχέσει πρὸς τὰ προηγούμενα, ὅσα γνωρίζομεν, εἶναι δίκαιον ν' ἀναγνωρισθῇ μὲ εἰλικρίνειαν.

Τὸ αὐτὸ δύναται νὰ λεχθῇ καὶ διὰ τὰς ἐξισώσεις τρίτου καὶ τετάρτου

βαθμοῦ. Πράγματι, ἐνῷ ὁ Διόφαντος εὗρε μίαν μόνον ρίζαν τῆς τριτοβαθμίου ἐξισώσεως :

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = x^2 + 2x + 3,$$

ὁ Brahmagupta ἐπέτυχε τὸ αὐτὸ εἰς τὰς ἀκολούθους δύο ἐξισώσεις :

$$x^3 + 12x = 6x^2 + 35,$$

$$x^4 - 2(x^2 + 200x) = 9999,$$

μεταγράφων αὐτὰς ὑπὸ τὰς μορφάς :

$$(x - 2)^3 = 3^3,$$

$$(x^2 + 1)^2 = (2x + 100)^2$$

καὶ ἐξάγων ἔπειτα τὴν κυβικὴν ἢ τετραγωνικὴν ρίζαν. Τὸ τέχνασμα τοῦτο ὡδήγησε πολὺ ἀργότερα εἰς τὴν λύσιν ὅλων τῶν τεταρτοβαθμίων ἐξισώσεων.

Ἀλλ' ἡ περιοχὴ τῶν μαθηματικῶν, εἰς τὴν ὁποίαν οἱ Ἰνδοὶ δύνανται νὰ προβάλλουν, μέχρις ἀποδείξεως τοῦ ἐναντίου, ἀδιαφιλονίκητα δικαιώματα κυριότητος εἶναι ἡ ἀπροσδιόριστος ἀνάλυσις. Εἴδομεν, πράγματι, ὅτι ὁ Aryabhata ἀναζητεῖ τὰς ἀκεραίας καὶ θετικὰς λύσεις τῆς ἐξισώσεως $ax + by = c$, κατὰ τρόπον μὴ διάφορον τοῦ σήμερον ἐφαρμοζομένου. Ὁ Brahmagupta καὶ ὁ Bhascara ἐπεκτείνουν τὴν ἔρευναν εἰς δευτεροβαθμίους ἐξισώσεις τῶν ἀκολούθων τύπων :

$$ax^2 \pm 1 = y^2 \qquad (\alpha)$$

$$ax^2 \pm b = y^2 \qquad (\beta)$$

$$xy + ax + by = c \qquad (\gamma)$$

καὶ ἄλλων εἰδικῶν μορφῶν, εἰς τὰς ὁποίας οἱ ἄγνωστοι εἶναι ὑψωμένοι εἰς τὸν τρίτον βαθμόν.

Διὰ νὰ δώσωμεν μίαν ἰδέαν κατὰ προσέγγισιν τῶν ἀποτελεσμάτων, εἰς τὰ ὁποῖα ἔφθασαν, θὰ σημειώσωμεν ὅτι ἐδίδαξαν μίαν μέθοδον (ποὺ ὠνομάσθη «κυκλικὴ μέθοδος»), ἡ ὁποία ἐπιτρέπει ἐκ μιᾶς λύσεως τῆς ἐξισώσεως (α), νὰ εὕρωμεν ἀπειρίαν ἄλλων, ἐφ' ὅσον ὑφίστανται τοιαῦται. Εἶναι ἀληθὲς ὅτι δὲν κατέλιπον καμμίαν γραπτὴν ἔνδειξιν δυναμένην νὰ διευκολύνῃ τὴν εὕρεσιν τῆς ἀφετηριακῆς λύσεως, ἀλλ' ἐν τούτοις ἀνεγνώρισαν εἰς ὡρισμένας περιπτώσεις τὴν ἀνυπαρξίαν τοιαύτης. Πολλὰ ἀπὸ τὰ συμπεράσματα, εἰς τὰ ὁποῖα ἔφθασαν, σχετικῶς μὲ τὴν ἀπροσδιόριστον ἀνάλυσιν δευτέρου βαθμοῦ, ἐπανευρέθησαν, ἀνεξαρτήτως, ὑπὸ ἐπιφανῶν μαθηματικῶν τοῦ XVII καὶ XVIII αἰῶνος καὶ οὕτω ἀπετέλεσαν μόνιμον κτῆμα τῆς ἐπιστήμης μας. Εἶναι δὲ τοῦτο ἀρκετόν, διὰ νὰ ἐξαρθῇ ἡ μεγάλη σπουδαιότης των.

136. — Ἐὰν αἱ ἀριθμητικο-ἀλγεβρικαὶ ἐργασίαι τῶν Ἰνδῶν, αἱ ἀπο-

τελοῦσαι τὸν πυρῆνα τῆς μαθηματικῆς φιλολογίας των, εἶναι τοιαύτης σπουδαιότητος, δὲν δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι ὑστεροῦν αἱ σελίδες αἱ ἀφιερωμέναι εἰς τὴν γεωμετρίαν, αἱ ὁποῖαι, ὡς παρετήρησε μὲ ὀξυδέρκειαν ὁ M. Chasles, ἀποτελοῦν μίαν θεωρίαν τοῦ τριγώνου καὶ τοῦ τετραπλεύρου. Περιέχουν, πράγματι, τὴν λύσιν τῶν ἀκολούθων θεμελιωδῶν προβλημάτων:

I. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου καὶ ἡ ἀκτὶς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου συναρτήσει τῶν πλευρῶν.

II. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραί, τὸ ἐμβαδὸν καὶ ἡ ἀκτὶς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου νὰ ἐκφράζωνται ὑπὸ ρητῶν ἀριθμῶν.

III. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τετραπλεύρου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον, συναρτήσει τῶν πλευρῶν, ὡς καὶ ἡ ἀκτὶς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου, αἱ διαγώνιοι κλπ.

IV. Νὰ κατασκευασθῇ τετράπλευρον ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, τοῦ ὁποίου ὅλα τὰ ἀνωτέρω στοιχεῖα νὰ ἐκφράζωνται ὑπὸ ρητῶν ἀριθμῶν.

Κατὰ τὴν διάρκειαν τῶν ἐρευνῶν αἱ ὁποῖαι ὡδήγησαν εἰς τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων τούτων, ὁ Brahmagupta συνήντησε ὄχι μόνον τὸν γνωστὸν τύπον τοῦ Ἥρωνος :

$$E=\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)},$$

διὰ τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου μὲ πλευρὰς α, β, γ καὶ ἡμιπερίμετρον τ, ἀλλ' ἐπίσης τὸν ἀνάλογον διὰ τὸ τετράπλευρον :

$$E=\sqrt{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)(\tau-\delta)},$$

ἔκαμε δὲ τὴν παρατήρησιν ὅτι ὁ πρῶτος προκύπτει ἀπὸ τὸν δεύτερον, ἂν μηδενίσωμεν μίαν πλευρὰν τοῦ τετραπλεύρου. Παρὰ ταῦτα οὐδεμίαν ἀπόδειξιν παρέχει διὰ τὸν ἕνα ἢ τὸν ἄλλον ἀπὸ τοὺς ἀνωτέρω τύπους. Ἐπὶ πλέον δὲ παρασιωπᾷ τὸν ἱκανὸν ὅρον τῆς ἰσχύος τοῦ δευτέρου, νὰ εἶναι δηλαδὴ τὸ τετράπλευρον ἐγγράψιμον εἰς κύκλον. Οὕτω ἀγόμεθα εἰς τὸ νὰ ὑποθέσωμεν, ὅτι εὑρισκόμεθα μᾶλλον ἐνώπιον συμπερασμάτων μηχανικῶς ἀντιγραφέντων ἀπὸ ἄλλα ἔργα, ἄγνωστα εἰς ἡμᾶς, ἴσως τοῦ Ἀρχιμήδους, εἰς τὸν ὁποῖον ἀποδίδεται ἕνα ἀπολεσθὲν ἔργον ἐπὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου.

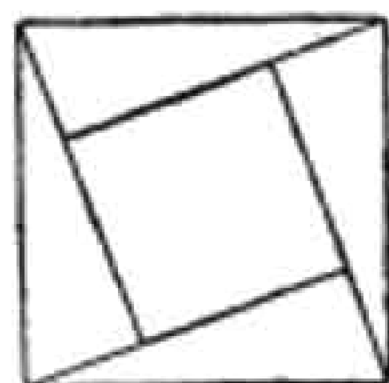
Εἰς τὰ ὑπ' ἀριθμὸν II καὶ IV προβλήματα συνοψίζονται αἱ μέθοδοι κατασκευῆς ὀρθογωνίων τριγώνων μὲ πλευρὰς ρητοὺς ἀριθμούς, δυναμένας νὰ ἐκφρασθοῦν ἀλγεβρικῶς μὲ τοὺς τύπους :

$$a, \quad \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b}-b\right), \quad \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b}+b\right),$$

ἢ τοὺς ἰσοδυνάμους : $a, \quad \frac{a^2-b^2}{2b}, \quad \frac{a^2+b^2}{2b}$,

οἱ ὁποῖοι διὰ $b=1$ καὶ 2 ἀνάγονται εἰς τοὺς τύπους τοῦ Πυθαγόρου καὶ τοῦ Πλάτωνος (ἢ τοῦ Ἀρχύτα).

Οἱ ἀνωτέρω εἶναι συνδεδεμένοι μὲ τὸ θεώρημα τοῦ Πυθαγόρου, τοῦ ὁποίου θεωρήματος ὁ Bhascara δίδει, ὡς ἐκ συμπτώσεως καὶ εἰς εἰδικὰ τρίγωνα, δύο ἀποδείξεις. Ἡ μία ἐξ αὐτῶν στηρίζεται ἐπὶ τῆς ὁμοιότητος τῶν δύο τριγώνων εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζεται τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον διὰ τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας. Ἡ ἄλλη ἀπόδειξις συνίσταται εἰς μίαν προτροπὴν νὰ «παρατηρήσωμεν» τὸ παρατιθέμενον σχῆμα (σχ. 20) καὶ νὰ συναγάγωμεν ἐξ αὐτοῦ ὅτι :



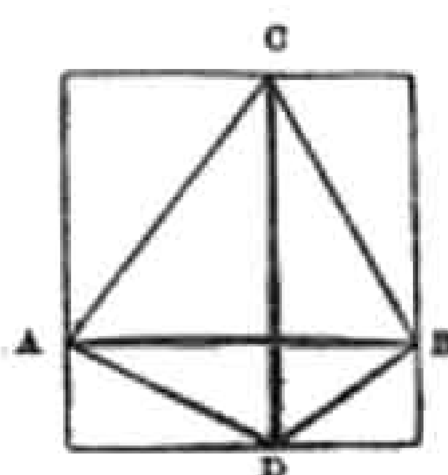
Σχ. 20

$$c^2=(a-b)^2+4\,\frac{ab}{2}\,.$$

Μὲ τὰς ἰδίας αὐτὰς θεωρίας συνδέεται μία ἀξιοσημείωτος κατασκευὴ ἑνὸς τετραπλεύρου, ὄχι μόνον ἐγγραψίμου καὶ ρητοπλεύρου (ἔχοντος δηλαδὴ πλευρὰς μετρουμένας ὑπὸ ρητῶν ἀριθμῶν), ἀλλὰ ἔχοντος συγχρόνως καὶ τὰς διαγωνίους καθέτους μεταξύ των. Ἡ κατασκευὴ τοιούτου σχήματος, θὰ ἠδύνατο κανεὶς νὰ ἰσχυρισθῇ, ὅτι εἶναι ἐμπνευσμένη ἀπὸ τὰ Ἀριθμητικὰ τοῦ Διοφάντου (Βιβλίον III, πρόβλημα 19), ὡς προκύπτει ἐξ ὅσων θὰ εἴπωμεν ἀμέσως.

Ἔστωσαν δύο τρίγωνα ὀρθογώνια μὲ πλευρὰς α, β, γ καὶ α΄, β΄, γ΄, ὅπου γ, γ΄ εἶναι αἱ ὑποτείνουσαι. Ἐκ τούτων παράγονται τὰ ἀκόλουθα τέσσαρα, ἐπίσης ὀρθογώνια τρίγωνα :

$$(\alpha\alpha',\ \beta\alpha',\ \gamma\alpha') \qquad (\alpha'\alpha,\ \beta'\alpha,\ \gamma'\alpha)$$
$$(\alpha\beta',\ \beta\beta',\ \gamma\beta') \qquad (\alpha'\beta,\ \beta'\beta,\ \gamma'\beta),$$



Σχ. 21

τὰ ὁποῖα δύνανται νὰ διαταχθοῦν εἰς τὸ ἐπίπεδον (σχ. 21) κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε νὰ σχηματισθῇ ἕνα τετράπλευρον ABCD τοῦ ζητουμένου εἴδους. Ἡ ἐξέτασις τοῦ σχήματος δεικνύει ἀμέσως, ὅτι τὸ ἐμβαδόν του δύναται νὰ ἐκφρασθῇ 1/2. AC. BD. Ἀλλ᾽ ὁ τύπος αὐτὸς ἠμπορεῖ νὰ γραφῇ διαδοχικῶς ὡς ἕπεται :

$$\frac{(\alpha\alpha'+\beta\beta')(\alpha\beta'+\alpha'\beta)}{2}=\frac{\alpha'\beta'(\alpha^2+\beta^2)+\alpha\beta\,(\alpha'^2+\beta'^2)}{2}=$$
$$=\frac{\alpha'\gamma\cdot\beta'\gamma+\alpha\gamma'\cdot\beta\gamma'}{2}\,.$$

Ἐντεῦθεν συνάγεται ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου τούτου ἐκφράζεται ἀκόμη :

$$\frac{AD \cdot BC + AB \cdot CD}{2}.$$

Ἐξισώνοντες λοιπὸν μὲ τὴν προηγουμένην ἔκφρασιν εὑρίσκομεν τὸν τύπον:

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC,$$

ὁ ὁποῖος ἐκφράζει, εἰς τὴν ὑπ' ὄψει εἰδικὴν περίπτωσιν, τὸ θεώρημα τοῦ Πτολεμαίου διὰ τὸ ἐγγράψιμον τετράπλευρον. Τέλος ἀπὸ τὸ ἴδιον σχῆμα ἀπορρέει ἐπίσης ἡ σχέσις :

$$\frac{AB \cdot AD + BC \cdot CD}{AB \cdot BC + CD \cdot AD} = \frac{\alpha\alpha' + \beta\beta'}{\alpha\beta' + \alpha'\beta} = \frac{AC}{BD},$$

ἥτις ἀποτελεῖ ἄλλο θεώρημα τοῦ ἐγγραψίμου τετραπλεύρου.

Εἶναι πιθανὸν νὰ ἐχρησιμοποιήθησαν αἱ σχέσεις αὐταὶ ἀπὸ τοὺς Ἰνδοὺς (ἢ τοὺς ἐμπνευστάς των) διὰ νὰ φθάσουν εἰς τὴν «κυκλικὴν μέθοδον» (§ 135) τῆς ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως δευτέρου βαθμοῦ καὶ διὰ νὰ ἐκφράσουν τὸ συν (x - y), συναρτήσει τῶν ἡμιτόνων καὶ συνημιτόνων τῶν τόξων x, y.

Ὁ Brahmagupta ἐγνώριζε νὰ ὑπολογίζῃ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κύκλου συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος καί, κατ' ἀντίθεσιν πρὸς τὸν Aryabhata, ἦτο ἀκόμη εἰς θέσιν νὰ ὑπολογίσῃ τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς σφαίρας, συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος. Ὅτι αἱ γνώσεις αὐταὶ προέρχονται ἀπὸ ἔντονον ἐπίδρασιν τοῦ Ἀρχιμήδους εἶναι πιθανόν, οὐχὶ ὅμως ἱστορικῶς ἐξηκριβωμένον. Κατὰ τὴν διεξαγωγὴν τοιούτων ὑπολογισμῶν ἀπαντᾶται, ἐκτὸς τῶν γνωστῶν τιμῶν προσεγγίσεως τοῦ π, δηλαδὴ 22/7 καὶ 3,1416 καὶ μιὰ ἄλλη τελείως νέα τιμή, δηλαδὴ $\pi = \sqrt{10}$. Διὰ ποίας ὁδοῦ ἔφθασεν εἰς αὐτὴν εἶναι ἄγνωστον. Εἶναι ἐν τούτοις λίαν πιθανὴ ἡ ὑπόθεσις νὰ ἔφθασεν εἰς τὴν ἀνωτέρω προσέγγισιν ὡς ἑξῆς : αἱ περίμετροι τῶν κανονικῶν πολυγώνων 12, 24, 48 καὶ 96 πλευρῶν, ἐγγεγραμμένων εἰς κύκλον διαμέτρου 10, ἐκφράζονται ἀντιστοίχως ὑπὸ τῶν ἀριθμῶν $\sqrt{965}$, $\sqrt{981}$, $\sqrt{986}$, $\sqrt{987}$, ἐκ τῶν ὁποίων ἄγεται εὐκόλως κανεὶς εἰς τὴν παραδοχὴν ὅτι, εἰς τὸ ὅριον (ἄπειρον πλῆθος πλευρῶν), θὰ ἐλαμβάνετο $\sqrt{1000} = 10\sqrt{10}$.

Ἐξ ἄλλου ὁ Bhascara ἐκθέτει δύο ἀξιολόγους τύπους (ἐκ τῶν ὁποίων ὁ ἕνας ἀντίστροφος τοῦ ἄλλου), οἱ ὁποῖοι συνδέουν κυκλικὸν τόξον a μὲ τὴν χορδήν του c, εἰς περιφέρειαν μήκους p καὶ διαμέτρου d, ἤτοι :

(χορδή) $$c = \frac{4\,da\,(p-a)}{\frac{5}{4}p^2 - a(p-a)}, \qquad (\alpha)$$

(τόξον) $$a - \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - \frac{\frac{5}{4}p^2c}{4d+c}}\,. \qquad (\beta)$$

Πῶς εὑρέθησαν οἱ τύποι αὐτοὶ εἶναι ἄγνωστον, τοῦ συγγραφέως περιοριζομένου εἰς τὴν ἐφαρμογήν των, πρὸς ὑπολογισμὸν πλευρῶν μερικῶν κανονικῶν πολυγώνων. Δύο ἀποδείξεις, αἱ ὁποῖαι ἐδόθησαν προσφάτως, πρὸ ἑνὸς μόλις αἰῶνος (Servois, 1816 καὶ Suter, 1904), φαίνονται ἀνώτεραι τῆς πνευματικῆς στάθμης τῶν Ἰνδῶν μαθηματικῶν.

Τέλος εἰς τὰ ἔργα ποὺ ἐξετάζομεν εὑρίσκομεν, διὰ πρώτην φοράν, ἐγκαταλειπομένην τὴν θεώρησιν τῶν χορδῶν τῶν κυκλικῶν τόξων εἰς τοὺς κυκλομετρικοὺς ὑπολογισμούς, εἰσαγομένων τῶν συναρτήσεων :

	ἡμίτονον	παρημίτονον	συνημίτονον
(λατινιστί)	sinus	sinus versus	cosinus.

Ἐὰν ἦτο μαθηματικῶς ἀποδεδειγμένον, ὅτι εὑρισκόμεθα ἐνώπιον ἰνδικῆς ἐπινοήσεως, θὰ ἔπρεπε νὰ τοποθετήσωμεν εἰς τὰς ὄχθας τοῦ Γάγγου τὴν κοιτίδα τῶν τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων. Πολὺ περισσότερον ἀφοῦ οἱ Ἰνδοὶ τῆς περιόδου, ποὺ ἐξετάζομεν, ἐγνώριζον τὰς σχέσεις :

$$\sin^2 x + \cos^2 x = (\text{ἀκτίς})^2 \qquad (\gamma)$$

$$\left(2\sin\frac{x}{2}\right)^2 = (\sin x)^2 + (\sin \text{versus } x)^2 \qquad (\delta)$$

καὶ ἦσαν κάτοχοι ἑνὸς πίνακος τιμῶν τῶν ἡμιτόνων τῶν τόξων κατ' ἀριθμητικὴν πρόοδον. Τοῦ τελευταίου ἡ κατασκευὴ ἐστηρίζετο ἐπὶ τοῦ ἀκολούθου τύπου παρεμβολῆς :

$$\sin(\overline{x+1}\,225') - \sin(225') = \sin(x\,225') - \sin(\overline{x-1}\,225') - \frac{1}{225}\sin(x\,225'). \qquad (\varepsilon)$$

Παρατηρητέον ἐπίσης, ὅτι εἰς προβλήματα σχετικὰ πρὸς τὰς ἐρριμμένας σκιὰς διαφαίνεται ἡ ἔννοια τῆς τριγωνομετρικῆς ἐφαπτομένης.

Ἐκτὸς τῶν τύπων καὶ τῶν προτάσεων, τὰς ὁποίας εἴδομεν καὶ τὰς ὁποίας οἱ Brahmagupta καὶ Bhascara περιλαμβάνουν, χωρὶς σφάλματα, εἰς τὰ ἔργα των, ὑπάρχουν καὶ ἄλλαι, τὰς ὁποίας ἡ ἐπιστήμη ἀπορρίπτει. Ἐφαρμόζεται π.χ. ἡ ἔκφρασις $^1/_4\,(a+b)\,(c+d)$ διὰ τὸ ἐμβαδὸν τετραπλεύρου ἔχοντος διαδοχικὰς πλευρὰς a, b, c, d ὡς ἐπίσης ἡ ἀνάλογος $^1/_4(a+b)c$ διὰ τὸ τρίγωνον, ἐκφράσεις αἱ ὁποῖαι ἦσαν διαδεδομέναι εἰς τὴν Αἴγυπτον κατὰ τὸν II αἰῶνα π.Χ. Ἡ παρουσία τῶν ἀνακριβειῶν τούτων δὲν δύναται παρὰ νὰ προκαλῇ εἰς τὸν ἀναγνώστην τὴν ὀδυνηροτέραν ἔκπληξιν καὶ νὰ ἐξαλείφῃ ἀπὸ τὸ πνεῦμα του τὸν ἐνθουσιασμὸν ἐκεῖνον, ποὺ εὐλόγως ἐδη-

μιούργησεν ἡ ἀνάγνωσις τῶν προηγηθεισῶν σελίδων. Πέραν δὲ τούτου, γεννᾷ ἀβιάστως τὴν ὑπόνοιαν, ὅτι εὑρισκόμεθα ἐνώπιον ἑνὸς ἀπέπτου συμπιλήματος ἐκ πηγῶν διαφόρου φύσεως καὶ διαφόρου ἀξίας.

Ἀλλὰ περὶ αὐτοῦ θὰ ὁμιλήσωμεν εἰς εὐθετώτερον χρόνον.

Μαθηματικοὶ μεταγενέστεροι

137. Ἐν τούτοις εἶναι ἐνδιαφέρον νὰ σημειώσωμεν ὅτι ἡ μεγάλη ἐκτίμησις, τῆς ὁποίας ἀπελάμβανεν ὁ Brahmagupta, πιστοποιεῖται εἰς τὴν διαδρομὴν τῶν αἰώνων τόσον ἀπὸ τοὺς σχολιαστὰς τῶν ἔργων του, ὅσον καὶ ἀπὸ τοὺς μιμητάς του, οἱ ὁποῖοι δὲν ἔλλειψαν ἐπὶ μακρὰν σειρὰν ἐτῶν. Εἰς τὴν κατηγορίαν αὐτὴν ἀνήκει καὶ ὁ μέτριος ἐρανιστὴς Bhascara, περὶ τοῦ ὁποίου ὡμιλήσαμεν ἤδη, ὡς καὶ δύο ἄλλοι συγγραφεῖς, οἱ ὁποῖοι μόλις προσφάτως ἔγιναν γνωστοὶ εἰς τὴν Εὐρώπην καὶ οἱ ὁποῖοι παρέχουν ἀπόδειξιν ὅτι εἰς τὰς Ἰνδίας ὑπῆρχον σημαντικὰ κέντρα σπουδῶν, ὄχι μόνον εἰς τὰς παραλίους ἀκτάς, ἀλλὰ καὶ εἰς ἀπόστασιν πολλῶν μιλίων ἐντὸς τῆς ἐνδοχώρας. Ὁμιλοῦμεν διὰ τὸν Maharaviracarya, γεννηθέντα τὸ 850 καὶ ζήσαντα εἰς τὴν χώραν ποὺ ἀποτελεῖ σήμερον τὸ βασίλειον τοῦ Mysore, καὶ τὸν Sridhara, γεννηθέντα τὸ 991 καὶ συγγραφέα ἑνὸς ἔργου, τὸ ὁποῖον ἐκτὸς ἀπὸ τὸν τίτλον Ganitasara, δηλαδὴ «Σύνοψις λογισμοῦ», φέρει ἀκόμη καὶ τὸ ὄνομα Trisatika, εἰς δήλωσιν τῶν 300 στροφῶν ποὺ τὸ ἀποτελοῦν*.

Τὰ γραπτὰ αὐτὰ ἔχουν μεταξύ των καὶ μὲ τὰ ἀρχαιότερά των ἐντυπωσιακὰς ὁμοιότητας. Ἔχουν γραφῆ ἐμμέτρως, δίδουν ἐξαντλητικὰς πληροφορίας γύρω ἀπὸ τὰ σταθμά, τὰ μέτρα καὶ τὰ νομίσματα κοινῆς χρήσεως τότε εἰς τὰς Ἰνδίας, διδάσκουν τὰς ἰδίας «πράξεις» καὶ «προσδιορισμούς», ποὺ συνηντήσαμεν ἤδη εἰς τοὺς Brahmagupta καὶ Bhascara, πραγματεύονται τὰ ἴδια προβλήματα, ἐρευνοῦν τὰ αὐτὰ σχήματα καὶ παρουσιάζουν τὰς ἰδίας ἑρμηνευτικὰς ἀβεβαιότητας ἐκ τῆς ἐλλείψεως ὁρισμῶν.

Ἔχομεν λοιπὸν τὸ δικαίωμα νὰ μὴ εἰσχωρήσωμεν εἰς λεπτομερῆ ἀνάλυσιν τοῦ περιεχομένου, τονίζοντες μόνον τοῦτο· ὅτι εἰς τὴν γενικὴν διάρθρωσιν φαίνονται ὡς νὰ ἔχουν πλασθῆ ἐπὶ τῇ βάσει κάποιου ἀγνώστου εἰς ἡμᾶς ἀρχετύπου, κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον, μὲ τὸν ὁποῖον ἀναρίθμητα βιβλία στοιχειώδους γεωμετρίας ἔχουν συγγραφῆ εἰς τὴν Εὐρώπην μὲ ὑπόδειγμα, ὡμολογημένον ἢ μή, τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου.

* Ὁ Maharaviracarya παρουσιάζεται ἐν τούτοις ὄχι ὑπὸ τὸ ταπεινὸν ἔνδυμα τοῦ σχολιαστοῦ, διότι γράφει: «Μὲ τὴν βοήθειαν τῶν ἁγίων σοφῶν, συλλέγω ἀπὸ τὸν ἀπέραντον ὠκεανὸν τῆς ἐπιστήμης τῶν ἀριθμῶν ἕνα μέρος τῆς οὐσίας της, κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον μὲ τὸν ὁποῖον τὰ κοράλλια ἐξάγονται ἀπὸ τὴν θάλασσαν, ὁ χρυσὸς ἀπὸ τοὺς βράχους καὶ τὰ μαργαριτάρια ἀπὸ τὸ κέλυφος τῶν στρειδιῶν».

7. Ἡ χρησιμοποιουμένη γενικῶς σήμερον ἀριθμογραφία θέσεως εἶναι ἐπινόησις τῶν Ἰνδῶν, ὡς προκύπτει α) ἀπὸ ἀρχαίας ἐπιγραφάς, β) ἀπὸ μαρτυρίας τῶν Ἀράβων, γ) ἀπὸ τὴν ἀρχαιοτάτην χρῆσιν τοῦ ἄβακος.

Συνοψίζομεν ἤδη, περαιτέρω, χάριν τῆς πληρότητος, τὰς ἀντιρρήσεις, αἱ ὁποῖαι διατυπώνονται ἐναντίον τῶν ἀνωτέρω ἰσχυρισμῶν.

1. Ἡ ἐποχὴ καθ' ἣν ἐγράφη ὁ Sulvasutras δὲν εἶναι γνωστὴ μὲ ἀκρίβειαν. Τοῦ ἔργου τούτου ὑφίστανται διάφοροι γραφαί, διαφέρουσαι μεταξύ των εἰς σημεῖα σημαντικά, εἰς οὐδεμίαν δὲ ἐξ αὐτῶν ἀπαντᾶται τὸ Πυθαγόρειον θεώρημα εἰς τὴν γενικότητά του.

2. Τὸ γεγονὸς ὅτι οἱ Ἰνδοὶ ἐγνώριζον μίαν ἐξαιρετικὴν τιμὴν προσεγγίσεως τῆς $\sqrt{2}$ (§ 131) δὲν δύναται προφανῶς ν' ἀποτελέσῃ ἀπόδειξιν τοῦ ὅτι εἶχον φθάσει εἰς ἐπίγνωσιν τῆς γενικῆς ἐννοίας τοῦ ἀσυμμέτρου.

3. Ἡ τιμὴ $\pi = 3{,}1416$ εἶχε δοθῆ ἀπὸ τὸν Πτολεμαῖον πρὸ τοῦ Aryabhata, ὁ ὁποῖος μάλιστα ἦτο τόσον ὀλίγον εἰς θέσιν νὰ ἐκτιμήσῃ τὴν ἀξίαν της, ὥστε ἔδιδε προτίμησιν εἰς τὴν τιμὴν $\sqrt{10} = 3{,}1623$.

4. Ὁ πίναξ τῶν ἡμιτόνων, ποὺ εὑρίσκεται εἰς τὸ ἔργον τοῦ Aryabhata, εἶναι εἰς τὴν πραγματικότητα περίληψις ἄλλου, ὀφειλομένου εἰς ἕνα ἀλεξανδρινὸν ἀστρονόμον Πουλίζαν (τὸν ὁποῖον οἱ διασημότεροι ἀνατολισταὶ ταυτίζουν μὲ τὸν Κλαύδιον Πτολεμαῖον) καὶ δὲν ἀποτελεῖ παρὰ ἁπλῆν μεταμόρφωσιν τοῦ πίνακος τῶν χορδῶν τοῦ περιεχομένου εἰς τὴν Ἀλμαγέσταν.

5. Ἡ ἀπροσδιόριστος ἀνάλυσις ἀποτελεῖ ὡραιότατον κεφάλαιον τῆς ἰνδικῆς ἐπιστήμης· ἀλλ' οἱ μαθηματικοὶ ποὺ τὸ ἔγραψαν, οἱ γνωστοὶ εἰς ἡμᾶς, εἶναι ὅλοι μεταγενέστεροι τοῦ Διοφάντου, τοῦ ὁποίου τὰ ἔργα ἔφθασαν μέχρις ἡμῶν ὡς ἀκρωτηριασμένα ἀποσπάσματα.

Διὰ τὴν λύσιν τῆς ἐξισώσεως $ax+by=c$, ὁ Aryabhata ἐκθέτει ἕνα κανόνα σκοτεινότατον, χωρὶς νὰ τὸν δικαιολογῇ ἢ νὰ τὸν ἐφαρμόζῃ. Ἐπανευρίσκεται ὁ κανὼν οὗτος εἰς τὸν Brahmagupta ὑπὸ καταληπτὴν μορφήν, μὲ κάποιαν ἐφαρμογήν, χωρὶς ὅμως καμμίαν ἀπόδειξιν.

Ὅσον ἀφορᾷ τὴν ἐξίσωσιν $ax^2+1=y^2$, αὕτη ἀπαντᾶται διὰ πρώτην φορὰν εἰς τὸν Brahmagupta καὶ κατόπιν εἰς τὸν Bhascara. Ἀλλ' αἱ μέθοδοι τῆς λύσεως δὲν ἀνήκουν ἀσφαλῶς εἰς τὸν πρῶτον, διότι ἠγνόει εἰς τοιοῦτον βαθμὸν τὴν ἔννοιαν καὶ τὴν ἀξίαν των, ὥστε τὰς ἐφήρμοζεν ἐσφαλμένως. Εἰς αὐτὰς ὁ Bhascara κάμνει μίαν προσθήκην, ἀναφερόμενος μὲ ἀοριστίαν εἰς αὐθεντίας προγενεστέρας τοῦ Brahmagupta. Ἐπειδὴ δὲν γνωρίζομεν δι' αὐτὰς τίποτε τὸ συγκεκριμένον, δὲν ἀποκλείεται νὰ ἀνῆκον εἰς ἄλλην μαθηματικὴν φιλολογίαν, μὴ ἰνδικήν.

6. Ὁ τύπος, ὁ ὁποῖος δίδει τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου συναρτήσει τῶν πλευρῶν του ἐφαρμόζεται, χωρὶς τὴν οὐσιώδη συνθήκην, νὰ εἶναι τὸ τετράπλευρον ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

μιούργησεν ἡ ἀνάγνωσις τῶν προηγηθεισῶν σελίδων. Πέραν δὲ τούτου, γεννᾷ ἀβιάστως τὴν ὑπόνοιαν, ὅτι εὑρισκόμεθα ἐνώπιον ἑνὸς ἀπέπτου συμπιλήματος ἐκ πηγῶν διαφόρου φύσεως καὶ διαφόρου ἀξίας.

Ἀλλὰ περὶ αὐτοῦ θὰ ὁμιλήσωμεν εἰς εὐθετώτερον χρόνον.

Μαθηματικοὶ μεταγενέστεροι

137. Ἐν τούτοις εἶναι ἐνδιαφέρον νὰ σημειώσωμεν ὅτι ἡ μεγάλη ἐκτίμησις, τῆς ὁποίας ἀπελάμβανεν ὁ Brahmagupta, πιστοποιεῖται εἰς τὴν διαδρομὴν τῶν αἰώνων τόσον ἀπὸ τοὺς σχολιαστὰς τῶν ἔργων του, ὅσον καὶ ἀπὸ τοὺς μιμητάς του, οἱ ὁποῖοι δὲν ἔλλειψαν ἐπὶ μακρὰν σειρὰν ἐτῶν. Εἰς τὴν κατηγορίαν αὐτὴν ἀνήκει καὶ ὁ μέτριος ἐρανιστὴς Bhascara, περὶ τοῦ ὁποίου ὡμιλήσαμεν ἤδη, ὡς καὶ δύο ἄλλοι συγγραφεῖς, οἱ ὁποῖοι μόλις προσφάτως ἔγιναν γνωστοὶ εἰς τὴν Εὐρώπην καὶ οἱ ὁποῖοι παρέχουν ἀπόδειξιν ὅτι εἰς τὰς Ἰνδίας ὑπῆρχον σημαντικὰ κέντρα σπουδῶν, ὄχι μόνον εἰς τὰς παραλίους ἀκτάς, ἀλλὰ καὶ εἰς ἀπόστασιν πολλῶν μιλίων ἐντὸς τῆς ἐνδοχώρας. Ὁμιλοῦμεν διὰ τὸν Maharaviracarya, γεννηθέντα τὸ 850 καὶ ζήσαντα εἰς τὴν χώραν ποὺ ἀποτελεῖ σήμερον τὸ βασίλειον τοῦ Mysore, καὶ τὸν Sridhara, γεννηθέντα τὸ 991 καὶ συγγραφέα ἑνὸς ἔργου, τὸ ὁποῖον ἐκτὸς ἀπὸ τὸν τίτλον Ganitasara, δηλαδὴ «Σύνοψις λογισμοῦ», φέρει ἀκόμη καὶ τὸ ὄνομα Trisatika, εἰς δήλωσιν τῶν 300 στροφῶν ποὺ τὸ ἀποτελοῦν*.

Τὰ γραπτὰ αὐτὰ ἔχουν μεταξύ των καὶ μὲ τὰ ἀρχαιότερά των ἐντυπωσιακὰς ὁμοιότητας. Ἔχουν γραφῆ ἐμμέτρως, δίδουν ἐξαντλητικὰς πληροφορίας γύρω ἀπὸ τὰ σταθμά, τὰ μέτρα καὶ τὰ νομίσματα κοινῆς χρήσεως τότε εἰς τὰς Ἰνδίας, διδάσκουν τὰς ἰδίας «πράξεις» καὶ «προσδιορισμούς», ποὺ συνηντήσαμεν ἤδη εἰς τοὺς Brahmagupta καὶ Bhascara, πραγματεύονται τὰ ἴδια προβλήματα, ἐρευνοῦν τὰ αὐτὰ σχήματα καὶ παρουσιάζουν τὰς ἰδίας ἑρμηνευτικὰς ἀβεβαιότητας ἐκ τῆς ἐλλείψεως ὁρισμῶν.

Ἔχομεν λοιπὸν τὸ δικαίωμα νὰ μὴ εἰσχωρήσωμεν εἰς λεπτομερῆ ἀνάλυσιν τοῦ περιεχομένου, τονίζοντες μόνον τοῦτο· ὅτι εἰς τὴν γενικὴν διάρθρωσιν φαίνονται ὡς νὰ ἔχουν πλασθῆ ἐπὶ τῇ βάσει κάποιου ἀγνώστου εἰς ἡμᾶς ἀρχετύπου, κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον, μὲ τὸν ὁποῖον ἀναρίθμητα βιβλία στοιχειώδους γεωμετρίας ἔχουν συγγραφῆ εἰς τὴν Εὐρώπην μὲ ὑπόδειγμα, ὡμολογημένον ἢ μή, τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου.

* Ὁ Maharaviracarya παρουσιάζεται ἐν τούτοις ὄχι ὑπὸ τὸ ταπεινὸν ἔνδυμα τοῦ σχολιαστοῦ, διότι γράφει : «Μὲ τὴν βοήθειαν τῶν ἁγίων σοφῶν, συλλέγω ἀπὸ τὸν ἀπέραντον ὠκεανὸν τῆς ἐπιστήμης τῶν ἀριθμῶν ἕνα μέρος τῆς οὐσίας της, κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον μὲ τὸν ὁποῖον τὰ κοράλλια ἐξάγονται ἀπὸ τὴν θάλασσαν, ὁ χρυσὸς ἀπὸ τοὺς βράχους καὶ τὰ μαργαριτάρια ἀπὸ τὸ κέλυφος τῶν στρειδιῶν».

Ἐπίλογος

138. Ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω βραχεῖαν ἀνάλυσιν τῶν μαθηματικῶν ἔργων τῶν Ἰνδῶν, ποὺ ἐδημοσιεύθησαν μέχρι τοῦδε, προκύπτουν τὰ κοινὰ σημεῖα ἐπαφῆς τούτων μὲ ἄλλα, ἤδη γνωστά, ὡς καὶ αἱ νέαι ἀλήθειαι, τὰς ὁποίας διδάσκουν. Μερικαὶ ἀπὸ αὐτὰς ἔχουν τοιαύτην καὶ τοσαύτην σπουδαιότητα, ὥστε, ὅταν κατὰ τὴν πρώτην εἰκοσαετίαν τοῦ παρελθόντος αἰῶνος ἐγένοντο γνωσταὶ εἰς τὴν Εὐρώπην, μερικοὶ ἐνόμισαν ὅτι ἐπέστη ἡ στιγμὴ νὰ καταβιβάσωμεν τοὺς Ἕλληνας μαθηματικοὺς ἀπὸ τὴν ὑψηλὴν θέσιν, εἰς τὴν ὁποίαν, κατὰ γενικὴν καὶ ὁμόφωνον γνώμην, εἶχον τοποθετηθῆ. Ἐπειδὴ μάλιστα, ἀφ' ἑνὸς μὲν οἱ ἰνδολόγοι εἶχον τὴν τάσιν ν' ἀναβιβάσουν μερικὰ ἐκ τῶν ἔργων τούτων εἰς ἑκατοντάδας ἐτῶν πρὸ Χριστοῦ, ἀφ' ἑτέρου δὲ μερικαὶ θρησκευτικαὶ ἐντολαί, διατηρούμεναι εἰς τὰς Ἰνδίας, παρουσιάζουν ἔντονον ὁμοιότητα πρὸς τὰς ὑπὸ τοῦ Πυθαγόρου ἐπιβαλλομένας εἰς τοὺς μαθητάς του, ἔφθασαν μέχρι τοῦ σημείου, ὥστε νὰ μεταβάλουν τὸν φιλόσοφον τῆς Σάμου εἰς μαθητὴν τῶν ἱερέων τοῦ Βράχμα, νὰ ὑποστηρίξουν δέ, ὅτι τὰ εὐρωπαϊκὰ μαθηματικὰ δὲν εἶναι παρὰ μία ἁπλῆ ἀντανάκλασις τῆς ἐπιστήμης, ἡ ὁποία ἐβλάστησεν εἰς τὰς Ἰνδίας πρὸ ἀμνημονεύτων χρόνων.

Διὰ νὰ μὴ ἐξέλθωμεν τοῦ περιγράμματος τῆς παρούσης ἱστορίας, περιοριζόμεθα εἰς τὸ νὰ συνοψίσωμεν ἐδῶ τὰς σκέψεις, ἐπὶ τῶν ὁποίων ἐθεμελιώθη ἡ θέσις, ὅτι ἡ ἰνδικὴ μαθηματικὴ ἐπιστήμη, συγκρινομένη πρὸς τὰ γραπτὰ μνημεῖα ἄλλων προελεύσεων, παρουσιάζει μεγάλην ἀξίαν καὶ πρωτοτυπίαν.

1. Τὸ θεώρημα τοῦ Πυθαγόρου ἀπαντᾶται ὑπὸ γενικὴν μορφὴν εἰς τὸν Sulvasutras.

2. Τὴν ἐποχήν, καθ' ἣν ἐγράφη τὸ βιβλίον τοῦτο, οἱ Ἰνδοὶ εἶχον ἤδη οἰκειότητα μὲ τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀσυμμέτρου ἀριθμοῦ.

3. Ὁ Aryabhata γνωρίζει τιμὴν τοῦ π, ἀκριβεστέραν ἄλλων τιμῶν, ἐφαρμοζομένων πρὸ αὐτοῦ.

4. Ὁ ἴδιος ἐκθέτει πίνακα ἡμιτόνων καὶ διδάσκει τὴν κατασκευήν του.

5. Ὁ ἴδιος γνωρίζει τὴν εἰς τὸ πεδίον τῶν θετικῶν ἀκεραίων λύσιν τῶν ἐξισώσεων:

$$ax + by = c,$$
$$ax^2 + 1 = y^2.$$

6. Ὁ Brahmagupta διδάσκει τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ἐγγραψίμου τετραπλεύρου διὰ τοῦ τύπου:

$$E = \sqrt{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)(\tau-\delta)}$$

(α, β, γ, δ αἱ πλευραί, τ ἡ ἡμιπερίμετρος).

7. Ὅσον ἀφορᾷ τὸ ἀριθμητικόν μας σύστημα, εἶναι ἀνάγκη νὰ παρατηρήσωμεν τὰ ἑξῆς:

α) Πολλαὶ ἐπιγραφαί, ποὺ ἐθεωροῦντο ἀνήκουσαι εἰς τὸν IV ἢ εἰς τὸν III αἰῶνα, ἀπεδείχθησαν κατόπιν, ὅτι ἦσαν νεώτεραι νοθεύσεις. Ἡ μόνη ἐπὶ τῆς ὁποίας δὲν δύναται νὰ διατυπωθῇ ἀμφιβολία, ἀνήκει εἰς τὸ ἔτος 813

β) Ἡ μαρτυρία τῶν Ἀράβων δὲν ἔτυχε τῆς δεούσης κατανοήσεως ἐπὶ μακρὸν χρόνον. Πράγματι τὸ ἀρχαιότερον ἀραβικὸν κείμενον ποὺ ἔφθασεν εἰς γνῶσιν μας καὶ ὅπου γίνεται λόγος διὰ τὰ «ψηφία τῶν hind», εἶναι ἕνα χωρίον τοῦ ἔργου Π ε ρ ὶ κ ύ κ λ ο υ κ α ὶ τ ε τ ρ α γ ώ ν ο υ, ὀφειλομένου εἰς τὸν φιλόσοφον καὶ εὐρυμαθῆ Djâhiz (θανόντα τὸ 869). Εἰς τὸ ἔργον αὐτὸ ἐξαίρεται ἡ εὐκολία, μὲ τὴν ὁποίαν, διὰ τῆς χρήσεως τῶν ψηφίων, δύνανται νὰ ἐκφρασθοῦν μεγάλοι ἀριθμοί. Ἀλλὰ φαίνεται ὅτι, ἀντὶ τῆς γραφῆς hind, ἔπρεπε νὰ προτιμηθῇ ἡ γραφὴ end, σημαίνουσα μέτρον τῆς ἀριθμητικῆς ἢ τῆς γεωμετρίας. Ἀντὶ λοιπὸν τῆς ἑρμηνείας ψ η φ ί α ἰ ν δ ι κ ά, ἔπρεπε νὰ υἱοθετηθῇ ἡ σημασία ψ η φ ί α μ α θ η μ α τ ι κ ά.

Πρέπει λοιπὸν νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι, ὅσον ἀφορᾷ τὴν ἐφεύρεσιν τοῦ ἀριθμητικοῦ μας συστήματος, εὑρισκόμεθα μᾶλλον ἐνώπιον ἑνὸς δεδομένου, τὸ ὁποῖον ἐδημιούργησεν ὁ περσικὸς θρῦλος. Ἃς προσθέσωμεν ὅτι δὲν φαίνεται πιθανὸν τὰ ἐν χρήσει ἀριθμητικὰ ψηφία νὰ προῆλθον ἐκ γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου. Πολὺ πιθανωτέρα εἶναι ἡ ἐκδοχή, ὅτι πρόκειται μᾶλλον περὶ χαρακτήρων ad hoc (ἐπίτηδες ἐπινοηθέντων), τοὺς ὁποίους ἐπρότεινον ἴσως νεοπυθαγόρειοι, γεννηθέντες εἰς Περσίαν πρὸ τῆς μουσουλμανικῆς κατακτήσεως καὶ τοὺς ὁποίους παρέλαβον οἱ ἄραβες κατακτηταὶ τῆς χώρας, διὰ νὰ τοὺς διαδώσουν κατόπιν καὶ εἰς τὰς Ἰνδίας.

γ) Ἡ χρῆσις τοῦ ἄβακος ὑπὸ τῶν Ἰνδῶν εἶναι λίαν ἀμφίβολος, διότι τὰ μέχρι τοῦδε προβαλλόμενα ἐπιχειρήματα δὲν ἔχουν καμμίαν ἀποδεικτικὴν ἀξίαν.

Εἰς τὰ ἀνωτέρω ἐπιχειρήματα ἐναντίον τῆς πρωτοτυπίας τῶν ἰνδικῶν μαθηματικῶν δύνανται ἀκόμη νὰ προστεθοῦν καὶ οἱ χονδρικῶς ἐσφαλμένοι κανόνες, ἡ τελεία ἔλλειψις ἀποδείξεων καὶ λογικῆς διαρθρώσεως ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἔργου καὶ τέλος τὸ γεγονός, ὅτι εἰς τὴν ἀστρονομίαν οἱ Ἰνδοὶ ὑπῆρξαν μαθηταὶ τῶν Ἑλλήνων καὶ ἴσως τῶν Κινέζων (ἂς ληφθῇ ὑπ' ὄψιν, ὅτι τὸ κύριον ἀστρονομικὸν των ἔργον — Surya Siddhanta ἢ Ἐ π ι σ τ ή μ η τ ο ῦ ἡ λ ί ο υ — δὲν εἶναι προγενέστερον τοῦ IV μ.Χ. αἰῶνος).

Ἐὰν ἀκόμη παρατηρήσωμεν, ὅτι τόσον ὁ Brahmagupta ὅσον καὶ ὁ Bhascara συχνὰ στηρίζονται εἰς ἀρχαιοτέρας αὐθεντίας, ὅτι εἰς τὰς Ἰνδίας τὰ μαθηματικὰ εὑρίσκονται πάντοτε εἰς τὴν ὑπηρεσίαν τῆς θρησκείας, τῆς ἀστρονομίας καὶ τῶν ἐμπορικῶν συναλλαγῶν καὶ ὅτι ἡ περίοδος 400-650, τῆς μεγίστης των ἀνθήσεως, συμπίπτει μὲ τὴν ἐποχήν, κατὰ τὴν ὁποίαν αἱ παντὸς εἴδους σχέσεις μεταξὺ Ἀνατολῆς καὶ Δύσεως κατέστησαν ζωηρότεραι,

θὰ φθάσωμεν εἰς τὸ ἀμείλικτον συμπέρασμα, ὅτι τὰ ἰνδικὰ μαθηματικά, δὲν ἀνεπτύχθησαν κατὰ συνέχειαν, μὲ ἐσωτερικὴν συνοχὴν καὶ κατὰ τρόπον αὐτόνομον. Κατὰ συνέπειαν δὲν εὐσταθεῖ σήμερον ἡ ἄποψις, ὅτι δῆθεν τὰ μαθηματικὰ ἤκμασαν εἰς τὰς Ἰνδίας αὐθορμήτως καὶ μὲ ἀνθηρότητα ἀληθῶς μεσογειακήν. Ἀπόκειται εἰς τὸ μέλλον ν' ἀποδειχθῇ τοῦτο ἤ, ἐν περιπτώσει ἀποτυχίας, νὰ προσδιορισθῇ σαφῶς ἀπὸ ποίαν πηγήν, πότε καὶ κατὰ ποῖον τρόπον οἱ Ἰνδοὶ ἤντλησαν τὰς ἀληθείας ἐκείνας, αἱ ὁποῖαι ἀναμφισβητήτως τιμοῦν τὴν μαθηματικὴν φιλολογίαν.

Ἡ δυσκολία τοῦ ἱστορικοῦ τούτου προβλήματος γίνεται μεγαλυτέρα ἐκ τῆς ὑπάρξεως εἰς τὴν χώραν τῶν Ἰνδιῶν διαφόρων κέντρων σπουδῶν, κυβερνωμένων ἀπὸ διαφόρους πολιτικο-θρησκευτικὰς αἱρέσεις. Διὰ μίαν ἐξ αὐτῶν, διαφυγοῦσαν μέχρι τοῦδε τῆς προσοχῆς τῶν ἱστορικῶν, γίνεται λόγος εἰς πρόσφατον ὑπόμνημα τοῦ B. Datta: Ἡ μαθηματικὴ σχολὴ Jaina (Δελτίον τῆς μαθημ. ἑταιρείας τῆς Καλκούτας, τόμος XXI, 1929). Ἐξ ὅσων ἐκτίθενται ἐκεῖ ἐπιβεβαιοῦται τὸ πάθος τῶν Ἰνδῶν πρὸς τοὺς μεγάλους ἀριθμούς, διότι κατ' αὐτοὺς ἐκτιμᾶται τὸ πλῆθος τῶν κατοίκων τῆς γῆς ὡς ἑξῆς :

$$2^{96} = 79\,288\,162\,514\,264\,337\,593\,543\,950\,336.$$

Ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς ὑπερβαίνει κατὰ πολὺ τὸν γνωστὸν ἀριθμόν, ποὺ συνδέεται μὲ τὸ «σκάκι», δηλαδή : $2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$.

Εὑρίσκονται ἐπίσης ἐφαρμογαὶ τῶν τύπων :

$$C = \sqrt{10}\, d, \quad A = \frac{1}{4} C d, \quad c = \sqrt{4h(d-h)},$$

$$h = \frac{1}{2}\left(d - \sqrt{d^2 - c^2}\right), \quad a = \sqrt{16 h^2 + c^2},$$

$$d = \frac{1}{h}\left(h^2 + \frac{c^2}{4}\right),$$

ὅπου C ἡ περιφέρεια, A τὸ ἐμβαδὸν κύκλου διαμέτρου d, a μῆκος τόξου χορδῆς c καὶ βέλους h.

Ὁ πρῶτος τύπος εἶναι ἀκριβής, ἂν δεχθῶμεν $\pi = \sqrt{10}$, ὁ προτελευταῖος εἶναι κατὰ προσέγγισιν ἀληθής, οἱ δὲ λοιποὶ εὑρίσκονται σήμερον ἐν χρήσει καὶ ἀποδεικνύουν ὅτι οἱ Ἰνδοὶ ἐγνώριζον τὸ Πυθαγόρειον θεώρημα. Διὰ λεπτομερεστέρας, παρομοίας φύσεως, πληροφορίας παραπέμπομεν τὸν ἀναγνώστην εἰς τὸ ἀναφερθὲν ἀνωτέρω ὑπόμνημα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XI

ΤΟ ΑΡΑΒΙΚΟΝ ΘΑΥΜΑ

Προλεγόμενα

139. Ἀπὸ τὰ πλέον ἐκπληκτικὰ φαινόμενα, ποὺ ἀπαντῶνται εἰς τὴν παγκόσμιον ἱστορίαν, εἶναι ἀσφαλῶς ἐκεῖνο ποὺ παρουσιάζουν οἱ Ἄραβες· ἕνας λαὸς ὁ ὁποῖος, ἐμφανισθεὶς αἰφνιδίως ὡς μετέωρον μεταξὺ VI καὶ VII αἰῶνος, ἐξήστραψεν εἰς τὸ στερέωμα τοῦ πολιτισμοῦ μὲ ἕνα ἐκθαμβωτικὸν φῶς, τὸ ὁποῖον ὅμως ἐντὸς διαστήματος ὀλίγων μόνον αἰώνων ἔσβησε καὶ ἐχάθη, ὡς ἐὰν ἐξηντλήθη ἀποτόμως ὅλη ἡ λανθάνουσα ἐνέργεια, μὲ τὴν ὁποίαν τὸν εἶχε προικίσει ἡ φύσις.

Ἡ φυλὴ αὐτή, ἡ ὁποία μέχρι τότε οὐδεμίαν αἰσθητὴν ἐπίδρασιν εἶχεν ἀσκήσει ἐπὶ τῆς πορείας τῶν ἀνθρωπίνων πραγμάτων, εἰς τὴν ἀκαταμάχητον φωνὴν τοῦ Μωάμεθ (571-632), ἀνεκάλυψεν εἰς τὸν ἑαυτόν της τοιαῦτα θαυμαστὰ ἀποθέματα δυνάμεως, ὥστε, χάρις εἰς αὐτά, νὰ κυριαρχήσῃ ἐπὶ ψυχῶν καὶ σωμάτων κατὰ τὴν διάρκειαν μερικῶν ἑκατονταετηρίδων.

Ἀπὸ τοῦ VII αἰῶνος πράγματι, ἡ ἀραβικὴ σπάθη προήλαυνε νικηφόρος ἀπὸ χώρας εἰς χώραν μὲ τόσην ἀνατρεπτικὴν ὁρμήν, ὥστε ἐν διαστήματι ἑνὸς μόλις αἰῶνος ὑπέταξε τὰς Ἰνδίας, τὴν Περσίαν, τὴν Μεσοποταμίαν, τὴν Συρίαν, τὴν Αἴγυπτον, τὴν Βόρειον Ἀφρικὴν καὶ τέλος μέγα μέρος τῆς Ἱσπανίας. Λόγῳ ὅμως τῶν ἀγεφυρώτων διχονοιῶν, ποὺ ἐξεδηλώθησαν μεταξὺ τῶν πιστῶν τοῦ Ἀλλάχ, ἡ τεραστία ἐκείνη αὐτοκρατορία κατεκερματίσθη τελικῶς εἰς πλῆθος βασιλείων, τῶν ὁποίων ἡ ἀντιζηλία δὲν ἐβράδυνε νὰ ἐκφυλισθῇ εἰς ἀνοικτὴν ἐχθρότητα.

Οἱ νέοι δεσπόται ἐπέβαλον τὴν χρῆσιν τῆς γλώσσης των εἰς τοὺς ὑποτεταγμένους λαούς. Παρὰ ταῦτα δὲν περιεφρόνησαν τὰ ἔργα τοῦ πνεύματος ἄλλων λαῶν προηγμένων εἰς τὸν πολιτισμόν, ἀλλ' ἐπεδόθησαν εἰς τὴν μελέτην των καὶ κατέληξαν ν' ἀφομοιώσουν τελείως τὸ περιεχόμενόν των. Μὴ ἀρκούμενοι εἰς τὴν στρατιωτικὴν δόξαν, οἱ χαλῖφαι, ἀρχῆς γενομένης ἀπὸ τῆς δυναστείας τῶν Ἀβασσιδῶν, ἐφιλοδόξησαν νὰ γίνουν ἐφάμιλλοι τῶν Λαγιδῶν καὶ Ἀτταλιδῶν, ὡς ἡγεμόνες προστάται τῶν ἐπιστημῶν καὶ τῶν τεχνῶν. Τοιουτοτρόπως ἡ Βαγδάτη, ἡ ὁποία ἀπὸ τοῦ 762 ἦτο ἕδρα

τῆς κεντρικῆς κυβερνήσεως, ἔγινε τὸ σημεῖον τῆς συμβολῆς δύο μεγάλων πολιτισμῶν, τοῦ ἑλληνικοῦ καὶ τοῦ ἰνδικοῦ. Διὰ τὰς ἀποτελεσματικὰς καὶ ἀκαταπαύστους ἐνθαρρύνσεις πρὸς ἐκτέλεσιν μεταφράσεων καὶ συγγραφὴν ὑπομνημάτων (ὑπὸ ἀνθρώπων ἔστω καὶ μὴ ἀνηκόντων εἰς τὴν μωαμεθανικὴν θρησκείαν) ἄξιοι ἰδιαιτέρας μνείας εἶναι οἱ χαλῖφαι Al Mansur (ὅστις ἐβασίλευσε κατὰ τὴν περίοδον 754-775), Harun al Rascid (786-809) καὶ Al Mamun (813-833). Ὁ τελευταῖος εἶναι μάλιστα καὶ κατὰ τοῦτο ἄξιος τιμητικῆς μνείας, ὅτι ἐπὶ τῶν ἡμερῶν τῆς βασιλείας του ἐγένετο μία ἀξιομνημόνευτος καταμέτρησις τόξου μεσημβρινοῦ τῆς γῆς, ἡ πρώτη μετὰ τὴν ὑπὸ τοῦ Ἐρατοσθένους ἐκτελεσθεῖσαν (§51).

Τοιουτοτρόπως — διὰ νὰ περιορισθῶμεν εἰς τὰ ἔργα τῆς δικαιοδοσίας μας — ὄχι μόνον ὁ Εὐκλείδης, ὁ Ἀρχιμήδης, ὁ Ἀπολλώνιος καὶ ὁ Πτολεμαῖος, ἀλλ' ἀκόμη καὶ οἱ γεωμέτραι καὶ οἱ ἀστρονόμοι δευτέρας τάξεως, ἔγιναν διὰ τῆς ἀραβικῆς μεταφράσεως γνωστοὶ εἰς τοὺς ἄραβας διανοουμένους, τοὺς ἀγνοοῦντας τὴν γλῶσσαν τοῦ Ὁμήρου.

Τὸ ἀποτέλεσμα ἦτο ὅτι οἱ Ἄραβες, ἐνῷ εἰς τὴν ἀρχὴν ἐζήτουν τὰ φῶτα τῶν Ἰνδῶν διὰ νὰ λάβουν πληροφορίας ἐπὶ τῶν οὐρανίων φαινομένων, τῶν ὁποίων ἡ γνῶσις ἦτο ἀναγκαία εἰς τοὺς φανατικοὺς τηρητὰς τῶν ἐντολῶν τοῦ Κορανίου — αἱ προσευχαὶ ἔπρεπε νὰ γίνωνται μὲ πρόσωπον ἐστραμμένον πρὸς τὴν Μέκκαν, οἱ δὲ ἐξαγνιστικοὶ καθαρμοὶ καθ' ὡρισμένας ὥρας τῆς ἡμέρας — τελικῶς περιωρίσθησαν εἰς τὴν πιστὴν τήρησιν τῶν ὁδηγιῶν τοῦ διασήμου Ἕλληνος ἀστρονόμου Ἱππάρχου καὶ τῶν ἐξοχωτέρων μαθητῶν του. Τοιουτοτρόπως οἱ Ἄραβες διέδωσαν ἀνὰ τὸν τότε κόσμον μίαν ἐπιστήμην ἀσφαλῆ, ἐμπλουτισμένην μάλιστα μὲ ἰδικάς των βελτιώσεις ἀναμφισβητήτου ἀξίας.

Ἡ εὐεργετικὴ αὐτὴ δραστηριότης τῶν Ἀράβων, παραταθεῖσα ἐπὶ πέντε καὶ πλέον αἰῶνας, ὑπῆρξεν ὠφέλιμος ἀκόμη καὶ διὰ τοὺς Εὐρωπαίους, ὅταν οὗτοι ἦλθον εἰς ἐπαφὴν μὲ τὴν Ἀνατολήν, κυρίως διὰ τῶν πρώτων σταυροφοριῶν καὶ ὅταν, μετὰ τὴν ἀραβικὴν κατάκτησιν τῆς Ἱσπανίας, ἡ Κορδούη (Cordoba) μετεβλήθη εἰς κέντρον σπουδῶν ἐφάμιλλον τῆς Βαγδάτης. Ὅταν ὅμως ἡ πόλις κατελήφθη τὸ 1236, καθὼς καὶ ἡ γειτονικὴ πόλις Σεβίλλη (Sevilla) τὸ 1248, ἀπὸ τὸν Φερδινάνδον τῆς Καστίλλης, οἱ ἄραβες ἡγεμόνες, ὑποτασσόμενοι εἰς τὴν μοῖραν τῶν ἡττημένων, ἀπεσύρθησαν εἰς Γρανάδαν (Granada).

Τότε ὁ βασιλεὺς τῆς Καστίλλης (Castilla) Ἀλφόνσος Χ, φημιζόμενος τόσον ὡς ἔμπειρος πολιτικός, ὅσον καὶ ὡς σοφὸς ἀστρονόμος, διὰ τῆς ἀποφάσεώς του νὰ μεταφρασθοῦν εἰς τὴν λατινικὴν τὰ ἐξοχώτερα στοιχεῖα τῆς μαυριτανικῆς ἐπιστημονικῆς φιλολογίας, ἐπανέφερε τοὺς Εὐρωπαίους εἰς τὰς καθαρὰς πηγὰς πάσης γνώσεως, ἐγκαινιάζων τοιουτοτρόπως τὴν

χειραφέτησιν τῶν διανοουμένων τῆς Δύσεως ἀπὸ τὴν κατάστασιν τῆς ταπεινωτικῆς ὑποτελείας, εἰς τὴν ὁποίαν διετέλουν προηγουμένως.

Ἐν πάσῃ περιπτώσει, ἡ ἐπίδρασις τὴν ὁποίαν ἤσκησαν οἱ Ἄραβες ἐπὶ τῆς ἐξελίξεως τῆς ἐπιστημονικῆς σκέψεως εἰς τὴν Εὐρώπην εἶναι τόσον βαθεῖα, ὥστε ἡ μελέτη τῶν ἔργων των, ἐπὶ ὅλων τῶν κλάδων τῆς γνώσεως, ἀποτελεῖ βασικὴν ὑποχρέωσιν δι' οἱονδήποτε ἱστορικόν. Τὸ ἔργον δὲ τοῦτο κατέστη σήμερον εὐκολώτερον, χάρις εἰς τὰς πολυαρίθμους ἐκδόσεις, αἱ ὁποῖαι ἐκυκλοφόρησαν κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ παρελθόντος αἰῶνος, εἰς πρωτότυπον γλῶσσαν καὶ κατὰ μετάφρασιν εἰς ἄλλας εὐρωπαϊκὰς γλώσσας. Εἶναι ὅμως ἀληθὲς ὅτι, ἐὰν συγκρίνωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν μεταφρασθέντων ἔργων πρὸς τὴν πληθώραν ἐκείνων, τὰ ὁποῖα παραμένουν ἀκόμη ἄθικτα, θὰ φθάσωμεν εἰς τὸ ἀποθαρρυντικὸν συμπέρασμα, ὅτι ὅσα ἠμποροῦμεν νὰ εἴπωμεν σήμερον ἐπὶ τοῦ θέματός μας ἀποτελοῦν μικρὸν μόνον κλάσμα ἐκείνων, τὰ ὁποῖα πρόκειται νὰ μᾶς διδάξῃ τὸ μέλλον.

Πόσα καὶ ποῖα εἶναι τὰ ἔργα ποὺ ἔχουν δημοσιευθῆ προκύπτει ἀπὸ τὴν εἰς τὸ κεφάλαιον τοῦτο τῆς ἱστορίας μας ἀναφερομένην βιβλιογραφίαν. Πόσα καὶ ποῖα εἶναι τὰ ὑφιστάμενα, ἀλλὰ μὴ ἐλθόντα εἰς τὸ φῶς τῆς δημοσιότητος, μανθάνομεν ἀπὸ μίαν εὐσυνείδητον ἐργασίαν ἑνὸς μαθηματικοῦ — ἀνατολιστοῦ*, ὁ ὁποῖος, μὲ αὐτήν, προσέθεσεν ἕνα νέον τίτλον τιμῆς εἰς ἐκείνους ποὺ εἶχεν ἤδη ἀποκτήσει μεταφράζων** τὰ μαθηματικὰ δεδομένα τὰ περιεχόμενα εἰς ἐκτενῆ βιβλιογραφικὸν κατάλογον, συνταχθέντα ἀπὸ ἕνα πολυμαθῆ Ἄραβα τὸ ἔτος 987 μ.Χ.

Μερικαὶ ἐνδιαφέρουσαι πληροφορίαι ἐπὶ τῶν πρώτων ἀραβικῶν μεταφράσεων ἐπιστημονικῶν ἔργων περιέχονται εἰς μίαν εἰσαγωγὴν ἀραβικῆς μεταφράσεως, ὀφειλομένης εἰς τὸν Ben Esdra, ἑνὸς ἔργου, ποὺ θὰ ἐξετάσωμεν κατωτέρω. Ὁ ἀναγνώστης δύναται νὰ εὕρῃ ἀγγλικὴν μετάφρασιν τούτου εἰς ἄρθρον τῶν D. E. Smith καὶ J. Ginsburg: Rabbi Ben Ezdra and the Hindu - Arabian Problem (Amer. math. Monthly, t. XXV, 1918).

Ὁ ἐπιθυμῶν νὰ μορφώσῃ γενικὴν ἰδέαν περὶ τῶν μαθηματικῶν γνώσεων τῶν Ἀράβων, περὶ τῶν κλάδων τοὺς ὁποίους ἐγνώριζον καὶ περὶ τῶν ἑλλήνων ἢ ἀράβων συγγραφέων, τοὺς ὁποίους οὗτοι ἐθεώρουν ὡς κλασσικούς, δύναται νὰ καταφύγῃ εἰς τὰ προλεγόμενα ἑνὸς ἐκτεταμένου ἱστορικοῦ ἔργου τοῦ Ibn Kahldum, ἐκ Τύννιδος (1332 - 1406), θεωρουμένου ὡς κορυφαίου ἱστορικοῦ τῆς ἰσλαμικῆς φιλοσοφίας. (F. Woepcke: Traduction

* H. Suter, Die Mathematiker und Astronome der Araber und ihre Werke (Abh. zur Gesch. der Mathem., X Heft, 1900).

J. A. Sanchez Perez, Biografias de matematicos Arabes que floreciaron en Espana (Mem. de la R. Acad. de Madrid, 2a serie, t. I, 1921).

** H. Suter, Das Mathematiker — Verzeichniss in Fihrist des Ibn Takuban - Nadim (Abh. zur. Gesch. der Mathem., t. VI, 1892).

d' un chapitre des Prolégomènes d' Ibn Khaldum, relatif aux sciences mathématiques — Atti Accad. Nuovi Lincei, t. X, 1856 - 57).

140. Προτοῦ ἐκθέσωμεν ἐν συνόψει ποῖα μαθηματικὰ παρέλαβον καὶ ποῖα ἐδίδαξαν οἱ Ἄραβες, εἶναι σκόπιμον νὰ προτάξωμεν μίαν ἐνδιαφέρουσαν γλωσσικὴν λεπτομέρειαν.

Οἱ Ἄραβες εἶχον εἰς τὴν διάθεσίν των ἕνα πολὺ περιωρισμένον ἀριθμὸν κυρίων ὀνομάτων. Διὰ ν' ἀποφεύγουν λοιπὸν τὰς συγχύσεις, μεταξὺ τῶν προσώπων, κατέφευγον εἰς τὴν συνήθειαν νὰ προσθέτουν εἰς τὸ κύριον ὄνομα ἑνὸς προσώπου καὶ τὸ ὄνομα τοῦ πατρός, προτάσσοντες αὐτοῦ τὴν ἔκφρασιν «υἱός του», ἐκφερομένην ἀραβικὰ διὰ τοῦ «ibn». Καὶ ἐπειδὴ τοῦτο δὲν ἦτο πάντοτε ἐπαρκές, προσέθετον, ὅπου τὸ ἐκάλει ἡ ἀνάγκη καὶ τὸ ὄνομα τοῦ πάππου, τοῦ προπάππου κλπ. Ἐὰν δὲ ἐπρόκειτο περὶ προσώπου, τοῦ ὁποίου ἡ φήμη ὑπερέβαινε τὴν τοῦ πατρός, τότε ἀντὶ τοῦ «ibn» ἐπροτάσσετο τὸ «abu» = «πατρός». Ἐπὶ πλέον, διὰ μεγαλυτέραν ἀκρίβειαν, ἐδηλοῦτο καὶ ἡ πατρὶς τοῦ κατονομαζομένου προσώπου. Προκύπτουν τοιουτοτρόπως ὀνόματα ἀρκετὰ μακρὰ καὶ περίπλοκα, τὰ ὁποῖα, διὰ τοῦτο, δὲν ἀναφέρονται πάντοτε ὁλόκληρα· καὶ ἐπειδὴ ἡ περικοπὴ τῶν ὀνομάτων δὲν ἐγίνετο πάντοτε κατὰ σταθερὰν μέθοδον, δὲν εἶναι συχνὰ εὔκολος ἡ διάκρισις δύο προσώπων.

Διὰ τὸν μὴ δυνάμενον νὰ συμβουλευθῇ τὰ ἀραβικὰ ἔργα εἰς τὸ πρωτότυπον, ἡ δυσκολία τῶν ὀνομάτων αὐξάνεται ἐκ τῆς ποικιλίας τῶν συστημάτων, ποὺ ἐχρησιμοποίησαν οἱ διαφόρων ἐθνικοτήτων λόγιοι, κατὰ τὴν διὰ λατινικῶν χαρακτήρων ἀπόδοσιν τῶν ἀραβικῶν φθόγγων*. Καὶ διὰ νὰ φθάσῃ ἡ δυσκολία εἰς τὸ κατακόρυφον, οἱ πρῶτοι μεταφράσαντες ἀραβικὰ κείμενα εἰς τὴν λατινικήν, συμμορφούμενοι πρὸς μίαν ἀξιοθρήνητον συνήθειαν τῆς ἐποχῆς των, μετέφρασαν ἀκόμη καὶ τὰ κύρια ὀνόματα, ἐπιδιώκοντες νὰ ἐπιτύχουν περισσότερον ἁρμονικοὺς φωνητικοὺς συνδυασμούς, παρὰ ν' ἀποδώσουν τ' ἀρχικὰ ὀνόματα μὲ τοὺς μικροτέρους δυνατοὺς ἀκρωτηριασμούς.

Τὸ γεγονὸς τοῦτο ἐπανελήφθη κατ' ἀντίστροφον ἔννοιαν, ὅταν τὰ ἑλληνικὰ ἔργα μετεφράσθησαν εἰς τὴν ἀραβικήν. Καὶ μάλιστα, ἀκόμη καὶ ὅταν οἱ πρῶτοι μεταφρασταὶ ἀπέφευγον ἐπιμελῶς τὰς ὑπερβολικὰς ἀλλοιώσεις, οἱ μετέπειτα ἀμαθεῖς ἀντιγραφεῖς παρέλειπον ἢ μετέθετον τὰ διακριτικὰ σημεῖα, οἱ δὲ εὐρωπαῖοι μεταφρασταὶ ἐκ τῆς ἀραβικῆς εἰς τὴν λατι-

* Φέρομεν ὡς παράδειγμα ἕνα συγγραφέα, περὶ τοῦ ὁποίου θὰ κάμωμεν λόγον κατωτέρω (§ 143), τοῦ ὁποίου τὸ ὄνομα φέρεται εἰς τὴν Εὐρώπην κατὰ 20 τοὐλάχιστον διαφόρους τρόπους. Ἐδῶ ἀκολουθοῦμεν τὸν τρόπον ποὺ ἐφήρμοσεν ὁ Suter εἰς τὸ ἀνωτέρω μνημονευθὲν ἔργον του, παραλείποντες, πάντως, χάριν τυπογραφικῆς εὐκολίας, τοὺς τόνους, τὰς ἀποστρόφους καὶ τὰς ὑπογραμμίσεις.

νικὴν ἐπολλαπλασίασαν εἰς τοιοῦτον βαθμὸν τὴν παραμόρφωσιν τῶν ἀρχικῶν ὀνομάτων, ὥστε ἦλθον εἰς τὸ φῶς λέξεις, ὅπως π.χ. αἱ ἑξῆς: Yrinus, Asamithes, Milleius, Aganis, Sambelichus, ὑπὸ τοὺς ἤχους τῶν ὁποίων εἶναι κυριολεκτικῶς ἀπίστευτον ὅτι κρύπτονται τὰ ὀνόματα τοῦ Ἥρωνος, τοῦ Ἀρχιμήδους, τοῦ Μενελάου, τοῦ Γεμίνου καὶ τοῦ Σιμπλικίου.

Πρέπει, τέλος, νὰ ἐξάρωμεν ὡς τίτλον τιμῆς τοῦ λαοῦ, περὶ τοῦ ὁποίου ὁ λόγος, τὸ γεγονὸς ὅτι, ἐνῷ ἡ ἔννοια τῆς κυριότητος, ὡς πρὸς τὰ ἔργα τοῦ πνεύματος, εἶναι ἄγνωστος εἰς τοὺς Κινέζους καὶ τοὺς Ἰνδοὺς (ἀκόμη καὶ εἰς τοὺς εὐρωπαίους τοῦ Μεσαίωνος, ὅπως θὰ ἴδωμεν), οἱ Ἄραβες εἶχον τὴν ἐντιμότητα νὰ δηλώνουν πάντοτε μὲ τὴν μεγαλυτέραν εἰλικρίνειαν τὰς πηγάς, ἐκ τῶν ὁποίων ἤντλησαν. Τὸ γεγονὸς τοῦτο εἶναι ἀξιοσημείωτον ὄχι μόνον διὰ τὴν μεγάλην ἠθικήν του ἀξίαν, ἀλλ' ἐπίσης διὰ τὴν μεγάλην ὑπηρεσίαν, τὴν ὁποίαν προσφέρει εἰς τὸ ἔργον τοῦ ἱστορικοῦ.

Γενικότητες ἐπὶ τῆς ἀραβικῆς ἀριθμητικῆς

141. Διὰ νὰ γράψουν τοὺς μικροτέρους τοῦ 400 ἀκεραίους ἀριθμοὺς οἱ Ἄραβες ἔκαμαν ὅ,τι οἱ Ἕλληνες καὶ οἱ Ἑβραῖοι· ἐχρησιμοποίησαν δηλαδὴ τὰ πρῶτα γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου των, διὰ τὴν ἐκτέλεσιν δὲ τῶν ἁπλουστέρων ἀριθμητικῶν πράξεων κατέφευγον εἰς τὰ δάκτυλα τῶν δύο χειρῶν ἐν συνδυασμῷ μὲ διάφορα τεχνάσματα, τῶν ὁποίων τὰς λεπτομερείας μανθάνομεν ἀπὸ ἕνα ἀραβικὸν ποιημάτιον, ὅπου οἱ κανόνες τοῦ δακτυλικοῦ λογισμοῦ ἐκτίθενται πρὸς χρῆσιν τῶν κρατικῶν ὑπαλλήλων*.

Φαίνεται ὅμως ὅτι, ἐλθόντες εἰς ἐπαφὴν μὲ τοὺς Ἰνδούς, ἀντελήφθησαν τὴν ὑπεροχὴν τοῦ ἀριθμητικοῦ συστήματος τῶν ἐννέα ψηφίων καὶ τοῦ μηδενὸς καὶ ἔσπευσαν νὰ τὸ υἱοθετήσουν καὶ νὰ τὸ διαδώσουν εἰς ὅλας τὰς κατακτηθείσας χώρας. Εἶναι ἀληθὲς ὅτι οἱ ἀριθμητικοὶ χαρακτῆρες κατέληξαν μὲ τὸν καιρὸν νὰ λάβουν, εἰς χεῖρας τῶν Ἀράβων, μορφὰς ἐντελῶς διαφερούσας ἀπὸ ἐκείνας, τὰς ὁποίας εὑρίσκομεν εἰς τὰ ἰνδικὰ κείμενα. Καὶ ὄχι μόνον αὐτό· τὰ ψηφία τὰ γραφόμενα ὑπὸ τῶν Ἀράβων τῶν κατοικούντων περὶ τὴν Βαγδάτην καὶ ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα ἐχρησιμοποίουν οἱ Μαυριτανοὶ τῆς Ἱσπανίας παρουσίασαν τοιαύτας διαφοράς, ὥστε τὰ τελευταῖα ἔλαβον εἰδικὸν ὄνομα, ψηφία «gobar». Ὅτι εἰς τὴν ἀρχὴν τὰ ἀριθμητικὰ ψηφία εἶχον παντοῦ τὴν ἰδίαν γραφὴν πιστοποιεῖται ῥητῶς ἀπὸ μάρτυρα ἀπολύτου ἀξιοπιστίας, ὅπως εἶναι ὁ Al Biruni, περὶ τοῦ ὁποίου ἔγινεν ἤδη μνεία (§ 135), θὰ γίνῃ δὲ ἐκτενέστερος λόγος κατωτέρω.

Τὰ ὅρια τῆς παρούσης ἱστορίας δὲν μᾶς ἐπιτρέπουν νὰ εἰσέλθωμεν εἰς λεπτομερειακὰς ἀναλύσεις τῶν μικροδιαφορῶν τῶν ὑφισταμένων με-

* Βλ. A. Marre: Manière de compter des anciens avec les doigts de la main, d'après le petit poème arabe de Choms - Eddin el Massouli (Bull. di bibl. e storia, t. I, 1868).

νικὴν ἐπολλαπλασίασαν εἰς τοιοῦτον βαθμὸν τὴν παραμόρφωσιν τῶν ἀρχικῶν ὀνομάτων, ὥστε ἦλθον εἰς τὸ φῶς λέξεις, ὅπως π.χ. αἱ ἑξῆς: Yrinus, Asamithes, Milleius, Aganis, Sambelichus, ὑπὸ τοὺς ἤχους τῶν ὁποίων εἶναι κυριολεκτικῶς ἀπίστευτον ὅτι κρύπτονται τὰ ὀνόματα τοῦ Ἥρωνος, τοῦ Ἀρχιμήδους, τοῦ Μενελάου, τοῦ Γεμίνου καὶ τοῦ Σιμπλικίου.

Πρέπει, τέλος, νὰ ἐξάρωμεν ὡς τίτλον τιμῆς τοῦ λαοῦ, περὶ τοῦ ὁποίου ὁ λόγος, τὸ γεγονὸς ὅτι, ἐνῷ ἡ ἔννοια τῆς κυριότητος, ὡς πρὸς τὰ ἔργα τοῦ πνεύματος, εἶναι ἄγνωστος εἰς τοὺς Κινέζους καὶ τοὺς Ἰνδοὺς (ἀκόμη καὶ εἰς τοὺς εὐρωπαίους τοῦ Μεσαίωνος, ὅπως θὰ ἴδωμεν), οἱ Ἄραβες εἶχον τὴν ἐντιμότητα νὰ δηλώνουν πάντοτε μὲ τὴν μεγαλυτέραν εἰλικρίνειαν τὰς πηγάς, ἐκ τῶν ὁποίων ἤντλησαν. Τὸ γεγονὸς τοῦτο εἶναι ἀξιοσημείωτον ὄχι μόνον διὰ τὴν μεγάλην ἠθικήν του ἀξίαν, ἀλλ' ἐπίσης διὰ τὴν μεγάλην ὑπηρεσίαν, τὴν ὁποίαν προσφέρει εἰς τὸ ἔργον τοῦ ἱστορικοῦ.

Γενικότητες ἐπὶ τῆς ἀραβικῆς ἀριθμητικῆς

141. Διὰ νὰ γράψουν τοὺς μικροτέρους τοῦ 400 ἀκεραίους ἀριθμοὺς οἱ Ἄραβες ἔκαμαν ὅ,τι οἱ Ἕλληνες καὶ οἱ Ἑβραῖοι· ἐχρησιμοποίησαν δηλαδὴ τὰ πρῶτα γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου των, διὰ τὴν ἐκτέλεσιν δὲ τῶν ἁπλουστέρων ἀριθμητικῶν πράξεων κατέφευγον εἰς τὰ δάκτυλα τῶν δύο χειρῶν ἐν συνδυασμῷ μὲ διάφορα τεχνάσματα, τῶν ὁποίων τὰς λεπτομερείας μανθάνομεν ἀπὸ ἕνα ἀραβικὸν ποιημάτιον, ὅπου οἱ κανόνες τοῦ δακτυλικοῦ λογισμοῦ ἐκτίθενται πρὸς χρῆσιν τῶν κρατικῶν ὑπαλλήλων*.

Φαίνεται ὅμως ὅτι, ἐλθόντες εἰς ἐπαφὴν μὲ τοὺς Ἰνδούς, ἀντελήφθησαν τὴν ὑπεροχὴν τοῦ ἀριθμητικοῦ συστήματος τῶν ἐννέα ψηφίων καὶ τοῦ μηδενὸς καὶ ἔσπευσαν νὰ τὸ υἱοθετήσουν καὶ νὰ τὸ διαδώσουν εἰς ὅλας τὰς κατακτηθείσας χώρας. Εἶναι ἀληθὲς ὅτι οἱ ἀριθμητικοὶ χαρακτῆρες κατέληξαν μὲ τὸν καιρὸν νὰ λάβουν, εἰς χεῖρας τῶν Ἀράβων, μορφὰς ἐντελῶς διαφερούσας ἀπὸ ἐκείνας, τὰς ὁποίας εὑρίσκομεν εἰς τὰ ἰνδικὰ κείμενα. Καὶ ὄχι μόνον αὐτό· τὰ ψηφία τὰ γραφόμενα ὑπὸ τῶν Ἀράβων τῶν κατοικούντων περὶ τὴν Βαγδάτην καὶ ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα ἐχρησιμοποίουν οἱ Μαυριτανοὶ τῆς Ἱσπανίας παρουσίασαν τοιαύτας διαφοράς, ὥστε τὰ τελευταῖα ἔλαβον εἰδικὸν ὄνομα, ψηφία «gobar». Ὅτι εἰς τὴν ἀρχὴν τὰ ἀριθμητικὰ ψηφία εἶχον παντοῦ τὴν ἰδίαν γραφὴν πιστοποιεῖται ρητῶς ἀπὸ μάρτυρα ἀπολύτου ἀξιοπιστίας, ὅπως εἶναι ὁ Al Biruni, περὶ τοῦ ὁποίου ἔγινεν ἤδη μνεία (§ 135), θὰ γίνῃ δὲ ἐκτενέστερος λόγος κατωτέρω.

Τὰ ὅρια τῆς παρούσης ἱστορίας δὲν μᾶς ἐπιτρέπουν νὰ εἰσέλθωμεν εἰς λεπτομερειακὰς ἀναλύσεις τῶν μικροδιαφορῶν τῶν ὑφισταμένων με-

* Βλ. A. Marre: Manière de compter des anciens avec les doigts de la main, d'après le petit poème arabe de Choms - Eddin el Massouli (Bull. di bibl. e storia, t. I, 1868).

ταξὺ τῆς ἀραβικῆς λογιστικῆς καὶ τῆς σήμερον χρησιμοποιουμένης. Ἡ αἰτία τῶν διαφορῶν τούτων πρέπει ν' ἀναζητηθῇ εἰς τὸ γεγονὸς ὅτι οἱ Ἄραβες δὲν ἔγραφον τὰς λογιστικὰς πράξεις ἐπὶ παπύρου ἢ περγαμηνῆς, ἀλλ' ἐπὶ τετραγώνου πινακίδος (πλευρᾶς 30 ἑκατοστῶν περίπου), καλυπτομένης ἀπὸ κόνιν ἐρυθροῦ χρώματος, χρησιμοποιοῦντες λεπτὸν κονδύλιον. Ἐντεῦθεν ἡ ἀνάγκη νὰ γράφουν ὅσον τὸ δυνατὸν ὀλιγώτερον, ἐμπιστευόμενοι εἰς τὴν μνήμην πολλοὺς ἐνδιαμέσους ὑπολογισμούς. Ἐὰν ἐχρησιμοποίουν καὶ ἄλλα βοηθητικὰ μέσα δὲν γνωρίζομεν, μολονότι σήμερον ὑπάρχει ἡ τάσις καταφατικῆς ἀπαντήσεως εἰς τὴν εὔλογον αὐτὴν ἀπορίαν.

Οἱ σχετικοὶ κανόνες εἶχον ἁπλουστάτην διατύπωσιν, συχνὰ δὲ συνωδεύοντο ἀπὸ τὴν καθησυχαστικὴν διαβεβαίωσιν: «Ὁ Θεὸς γνωρίζει τὴν ἀλήθειαν καλύτερα ἀπὸ ἡμᾶς!»

Διὰ τοὺς Ἄραβας, τὰ κλάσματα τὰ ἔχοντα ἀριθμητὴν τὴν μονάδα καὶ παρονομαστὰς 2, 3, 4, . . . , 9, κατεῖχον προνομιοῦχον θέσιν εἰς τὸ σύνολον τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν καὶ ὠνομάζοντο ὅπως καὶ σήμερον, «ἥμισυ», «τρίτον», «τέταρτον» κλπ., ἐνῷ τὰ λοιπὰ κλάσματα ὠνομάζοντο περιφραστικῶς.

Μὲ τὴν χαρακτηριστικὴν αὐτὴν φωνητικὴν ἰδιοτροπίαν συνδέεται, χωρὶς ἀμφιβολίαν, ἡ συνήθεια νὰ μετασχηματίζουν τὰ κλάσματα ἀνάγοντες αὐτὰ εἰς τὴν ἀκόλουθον τυπικὴν μορφήν:

$$a + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\beta\gamma} + \frac{d}{\beta\gamma\delta} + \cdots \qquad (\alpha)$$

Ὁ ἀνωτέρω μετασχηματισμὸς δίδει λαβὴν εἰς ἕνα ἱστορικὸν ἀριθμητικὸν πρόβλημα, μὴ στερούμενον ἐνδιαφέροντος, τὸ ὁποῖον κατὰ τοὺς νεωτέρους χρόνους ἀπησχόλησεν ἐξέχοντας ἐπιστήμονας. Εἶναι εὐνόητον, ὅτι τὸ ἄθροισμα (α) δύναται νὰ γραφῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν ἑνὸς «ἀνιόντος συνεχοῦς κλάσματος»:

$$a + \cfrac{b + \cfrac{c + \cfrac{d + \cdots}{\delta}}{\gamma}}{\beta} \qquad (\beta)$$

Οἱ μεταφρασταὶ τῶν ἑλληνικῶν κειμένων

142. Ἐπειδή, ὅπως εἴπομεν ἤδη, οἱ Ἄραβες, πρὶν ὁμιλήσουν ἐξ ἰδίων, ἐμελέτησαν κατὰ βάθος τὰ ἔργα τῶν μεγάλων μαθηματικῶν τῆς ἀρχαίας Ἑλλάδος, ἔχομεν ὑποχρέωσιν ν' ἀναφέρωμεν τοὺς ἀξιολογωτέρους μεταφραστὰς καὶ σχολιαστάς, οἱ ὁποῖοι διεκρίθησαν μεταξὺ τῶν ἀσχοληθέντων ἀράβων λογίων.

ταξὺ τῆς ἀραβικῆς λογιστικῆς καὶ τῆς σήμερον χρησιμοποιουμένης. Ἡ αἰτία τῶν διαφορῶν τούτων πρέπει ν' ἀναζητηθῇ εἰς τὸ γεγονὸς ὅτι οἱ Ἄραβες δὲν ἔγραφον τὰς λογιστικὰς πράξεις ἐπὶ παπύρου ἢ περγαμηνῆς, ἀλλ' ἐπὶ τετραγώνου πινακίδος (πλευρᾶς 30 ἑκατοστῶν περίπου), καλυπτομένης ἀπὸ κόνιν ἐρυθροῦ χρώματος, χρησιμοποιοῦντες λεπτὸν κονδύλιον. Ἐντεῦθεν ἡ ἀνάγκη νὰ γράφουν ὅσον τὸ δυνατὸν ὀλιγώτερον, ἐμπιστευόμενοι εἰς τὴν μνήμην πολλοὺς ἐνδιαμέσους ὑπολογισμούς. Ἐὰν ἐχρησιμοποίουν καὶ ἄλλα βοηθητικὰ μέσα δὲν γνωρίζομεν, μολονότι σήμερον ὑπάρχει ἡ τάσις καταφατικῆς ἀπαντήσεως εἰς τὴν εὔλογον αὐτὴν ἀπορίαν.

Οἱ σχετικοὶ κανόνες εἶχον ἁπλουστάτην διατύπωσιν, συχνὰ δὲ συνωδεύοντο ἀπὸ τὴν καθησυχαστικὴν διαβεβαίωσιν: «Ὁ Θεὸς γνωρίζει τὴν ἀλήθειαν καλύτερα ἀπὸ ἡμᾶς!»

Διὰ τοὺς Ἄραβας, τὰ κλάσματα τὰ ἔχοντα ἀριθμητὴν τὴν μονάδα καὶ παρονομαστὰς 2, 3, 4, . . . , 9, κατεῖχον προνομιοῦχον θέσιν εἰς τὸ σύνολον τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν καὶ ὠνομάζοντο ὅπως καὶ σήμερον, «ἥμισυ», «τρίτον», «τέταρτον» κλπ., ἐνῷ τὰ λοιπὰ κλάσματα ὠνομάζοντο περιφραστικῶς.

Μὲ τὴν χαρακτηριστικὴν αὐτὴν φωνητικὴν ἰδιοτροπίαν συνδέεται, χωρὶς ἀμφιβολίαν, ἡ συνήθεια νὰ μετασχηματίζουν τὰ κλάσματα ἀνάγοντες αὐτὰ εἰς τὴν ἀκόλουθον τυπικὴν μορφήν:

$$a + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\beta\gamma} + \frac{d}{\beta\gamma\delta} + \cdots \qquad (\alpha)$$

Ὁ ἀνωτέρω μετασχηματισμὸς δίδει λαβὴν εἰς ἕνα ἱστορικὸν ἀριθμητικὸν πρόβλημα, μὴ στερούμενον ἐνδιαφέροντος, τὸ ὁποῖον κατὰ τοὺς νεωτέρους χρόνους ἀπησχόλησεν ἐξέχοντας ἐπιστήμονας. Εἶναι εὐνόητον, ὅτι τὸ ἄθροισμα (α) δύναται νὰ γραφῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν ἑνὸς «ἀνιόντος συνεχοῦς κλάσματος»:

$$a + \cfrac{b + \cfrac{c + \cfrac{d + \cdots}{\delta}}{\gamma}}{\beta} \qquad (\beta)$$

Οἱ μεταφρασταὶ τῶν ἑλληνικῶν κειμένων

142. Ἐπειδή, ὅπως εἴπομεν ἤδη, οἱ Ἄραβες, πρὶν ὁμιλήσουν ἐξ ἰδίων, ἐμελέτησαν κατὰ βάθος τὰ ἔργα τῶν μεγάλων μαθηματικῶν τῆς ἀρχαίας Ἑλλάδος, ἔχομεν ὑποχρέωσιν ν' ἀναφέρωμεν τοὺς ἀξιολογωτέρους μεταφραστὰς καὶ σχολιαστάς, οἱ ὁποῖοι διεκρίθησαν μεταξὺ τῶν ἀσχοληθέντων ἀράβων λογίων.

Πρῶτος δικαιούμενος εὐφήμου μνείας εἶναι ὁ Al-Haggag ibn Jusuf ibn Matar (870-920, περίπου), εἰς τὸν ὁποῖον ὀφείλεται ἡ πρώτη ἀραβικὴ μετάφρασις τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, ὡς καὶ μία ἄλλη ἐργασία ἀνάλογος ἐπὶ τῆς Ἀλμαγέστας τοῦ Πτολεμαίου. Ἀξιόλογος εἶναι ἐπίσης ὁ σύγχρονός του Abu Othman al Dimashki, ἰατρὸς ἐκ Δαμασκοῦ, εἰς τὸν ὁποῖον ὀφείλεται ἡ μετάφρασις τοῦ σχολίου τοῦ Πάππου εἰς τὸ Βιβλίον X τῶν Στοιχείων, ἡ ὁποία ἔσωσεν ἀπὸ τὴν ὁριστικὴν ἐξαφάνισιν (§ 59) τὴν περίφημον ἐργασίαν τοῦ πνευματώδους ἀλεξανδρινοῦ σχολιαστοῦ.

Ἀναφέρομεν κατόπιν ἕνα χριστιανόν, ἀποθανόντα τὸ 912 ἢ 913, τοῦ ὁποίου ἡ ἐπιμέλεια περὶ τὴν μετάφρασιν ἐκ τοῦ ἑλληνικοῦ καὶ τὴν συγγραφὴν σχολίων ὑπῆρξε παροιμιώδης· εἶναι ὁ Qosta ibn Luqa al Balbecki, εἰς τὸν ὁποῖον ὀφείλονται μεταφράσεις, σωζόμεναι μέχρι σήμερον, τῶν ἔργων τοῦ Θεοδοσίου, Αὐτολύκου, Ὑψικλέους, Ἀριστάρχου καὶ Ἥρωνος, ὡς καὶ σχόλια ἐπὶ τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου καὶ ἐπὶ τῶν δύο βιβλίων Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου τοῦ Ἀρχιμήδους. Καθῆκον δικαιοσύνης ἐπιβάλλει νὰ προσθέσωμεν, ὅτι ἄλλα γραπτὰ τοῦ αὐτοῦ συγγραφέως ἀποδεικνύουν, ὅτι δὲν ἦτο ἐστερημένος πρωτοτυπίας, ὡς εἶναι π.χ. ἕνα ἔργον του, τὸ ἀρχαιότερον ἀραβικὸν κείμενον, ποὺ πραγματεύεται κατὰ τρόπον ἱκανοποιητικὸν τὴν μέθοδον τῆς διπλῆς αὐθαιρέτου ἀφετηρίας.

Κατὰ χρονολογικὴν σειρὰν ἔρχεται, ἀμέσως μετ' αὐτόν, ἕνας ἀστρονόμος, εὐφημούμενος ὑπὸ τῶν Ἀράβων, ὁ ὁποῖος προσέφερε προσφάτως σπουδαίας ὑπηρεσίας εἰς τοὺς ἱστορικοὺς τῶν μαθηματικῶν. Εἶναι ὁ Abu'l Abbas al-Fadl ibn Hatim al Nairizi, κοινῶς λεγόμενος Anaritio (§ 73), γεννηθεὶς εἰς Nairiz καὶ ἀποθανὼν τὸ 922 ἢ 923. Εἶναι συγγραφεὺς ἑνὸς πολυτίμου σχολίου εἰς τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου, δημοσιευθέντος προσφάτως εἰς λατινικὴν μετάφρασιν μετὰ τοῦ πρωτοτύπου, εἰς τὸ ὁποῖον ἀναφέρει μεγάλον ἀριθμὸν παρατηρήσεων, γενομένων ἐπὶ τοῦ μεγίστου γεωμετρικοῦ κώδικος τῆς ἀρχαιότητος ὑπὸ διανοουμένων τῆς ἀρχαίας Ἑλλάδος εἰς ἔργα των μὴ διασωθέντα.

Δὲν πρέπει ἐπίσης νὰ παραλείψωμεν τὸν Abu'l Fath Muhammed ibn Muhammed ibn Quasim ibn Fadl al Isfahani, ὁ ὁποῖος μεταφράσας περὶ τὰ τέλη τοῦ X αἰῶνος τὰ πρῶτα 7 βιβλία τῶν Κωνικῶν τοῦ Ἀπολλωνίου (§ 46) ἔσωσεν ἐκ τῆς φθορᾶς τὰ τελευταῖα 3, γεγονὸς ποὺ ἐπέτρεψεν ἀργότερα εἰς τὸν G. A. Borelli νὰ τὰ καταστήσῃ γνωστὰ εἰς τὸν ἐπιστημονικὸν κόσμον ὑπὸ λατινικὴν μετάφρασιν.

Ἀξιοσημείωτον εἶναι τέλος, ὅτι εἰς τὸ Βιβλίον X τῶν Στοιχείων οἱ Ἄραβες ἔδειξαν ἰδιαίτερον ἐνδιαφέρον. Κατὰ τὸ 1100 ἕνας ἄλλος μαθηματικός, ὁ Abu Bekr Muhammed ibn Abdelbaqui al Bagdad, ἔγραψεν ἐπ' αὐτοῦ νέον σχόλιον, ποὺ κατέλαβε τιμητικὴν θέσιν εἰς τὴν συλλογὴν τε-

κμηρίων διὰ τὰς σπουδὰς τῶν Μαυριτανῶν ἐπὶ τῶν ἔργων τοῦ μεγάλου ἀλεξανδρινοῦ γεωμέτρου.

Περὶ ἄλλων μεταφραστῶν, ἀξιολόγων ἐπίσης ὡς πρωτοτύπων διανοουμένων, θὰ κάμωμεν λόγον εἰς ἄλλα μέρη τοῦ κεφαλαίου τούτου.

Muhammed ibn Musa καὶ οἱ σύγχρονοί του

143. Συμφώνως πρὸς μίαν δήλωσιν τοῦ ἐγκυροτάτου ἄραβος ἱστορικοῦ Ibn Kahldum (§ 139), ἡ μαθηματικὴ φιλολογία τῶν Μωαμεθανῶν ἀρχίζει μὲ τὰ ἔργα τοῦ Muhammed ibn Musa al Khowarizmi. Ὁ διακεκριμένος αὐτὸς Ἄραψ ἐγεννήθη εἰς τὴν πόλιν Khowarezm (τὴν σημερινὴν Khiwa) καὶ ἤκμασε κατὰ τὴν περίοδον 813 - 833, κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς ὁποίας ἐβασίλευσεν ὁ χαλίφης Al Mamun, ζήσας εἰς τὴν αὐλὴν τούτου καὶ ἀπολαμβάνων μεγάλων τιμῶν καὶ σεβασμοῦ. Ἐκαλλιέργησε τὴν ἀστρονομίαν καὶ κατέλιπε μίαν σειρὰν ἀστρονομικῶν πινάκων, παρομοίων πρὸς τοὺς ἰνδικούς, τῆς ὁποίας ὑπάρχει σήμερον ἀνάτυπον ληφθὲν δύο αἰῶνας βραδύτερον ἀπὸ ἕνα Ἄραβα τῆς Ἱσπανίας, τὸν Maslema ibn Ahmed Al Madgriti. Οἱ πίνακες αὐτοὶ εἶναι διὰ τὸν μαθηματικὸν κατὰ τοῦτο ἄξιοι προσοχῆς, ὅτι αἱ τριγωνομετρικαὶ σχέσεις παίζουν εἰς αὐτοὺς σημαίνοντα ρόλον, διεδόθησαν δὲ εἰς τὴν Εὐρώπην χάρις εἰς τὸν Ἀδελάρδον ἐκ Bath (περίπου 1120, § 114), ὁ ὁποῖος τοὺς μετέφρασεν εἰς τὴν λατινικήν.

Ὅ,τι ὅμως ἐνδιαφέρει ἡμᾶς πολὺ περισσότερον ἐκ τοῦ μαθηματικοῦ ἔργου τοῦ Muhammed ibn Musa εἶναι μία ἀριθμητική, τῆς ὁποίας εἶναι γνωστὴ σήμερον μόνον μία λατινικὴ μετάφρασις ὑπὸ τὸν τίτλον Algoritmi de numero Indorum, καὶ μία ἄλγεβρα, τῆς ὁποίας κατέχομεν τὸ πρωτότυπον εἰς ἕνα χειρόγραφον τοῦ 1342 ἀνῆκον εἰς τὴν πανεπιστημιακὴν βιβλιοθήκην τῆς Ὀξφόρδης, ὡς ἐπίσης μερικὰς μεταφράσεις ἐν ὅλῳ ἢ ἐν μέρει.

Τὸ πρῶτον ἀναφέρεται κυρίως, διότι μᾶς παρέχει τὰς ἀρχαιοτέρας πληροφορίας γύρω ἀπὸ τὴν χρῆσιν, ἐκ μέρους τῶν Ἀράβων, τῆς δεκαδικῆς ἀριθμογραφίας θέσεως, ὅπου τὸ μηδὲν χαρακτηρίζεται μὲ τὴν περίφρασιν «μικρὸς κύκλος» (circulum parvulum). Τὸ δεύτερον ὅμως ἔχει μεγίστην ἀξίαν, διότι μὲ αὐτὸ ἐγκαινιάζεται ἡ ἀλγεβρικὴ φιλολογία, τῆς ὁποίας ἔκτοτε ὁ πλοῦτος διαφεύγει κάθε προσπάθειαν ὑπολογισμοῦ. Εἶναι σκόπιμον νὰ παρατηρήσωμεν εὐθὺς ἀμέσως ὅτι δὲν πρόκειται περὶ ἔργου πρωτοτύπου, ἀλλ' ἐμπνευσμένου ἀπὸ τοὺς Ἰνδούς, οὔτε περὶ ἔργου περιλαμβάνοντος ἐξαντλητικὴν ἀνάπτυξιν τῆς ἐπιστήμης τοῦ καιροῦ ἐκείνου, μὲ καθαρῶς θεωρητικὰς προθέσεις, ἀλλ' ὅπως δηλώνει ὁ ἴδιος ὁ συγγραφεύς, τὸ ἔργον ἐγράφη κατὰ προτροπὴν τοῦ χαλίφου Al Mansur, ὁ ὁποῖος ἔκρινεν ὅτι ἐπιβάλλεται ἡ ἐκμάθησις τῶν ἰνδικῶν ἀριθμητικῶν μεθόδων εἰς τοὺς ὑπηκόους του, διὰ νὰ δύνανται ν' ἀντεπεξέρχωνται εἰς πρακτικὰ προβλή-

κμηρίων διὰ τὰς σπουδὰς τῶν Μαυριτανῶν ἐπὶ τῶν ἔργων τοῦ μεγάλου ἀλεξανδρινοῦ γεωμέτρου.

Περὶ ἄλλων μεταφραστῶν, ἀξιολόγων ἐπίσης ὡς πρωτοτύπων διανοουμένων, θὰ κάμωμεν λόγον εἰς ἄλλα μέρη τοῦ κεφαλαίου τούτου.

Muhammed ibn Musa καὶ οἱ σύγχρονοί του

143. Συμφώνως πρὸς μίαν δήλωσιν τοῦ ἐγκυροτάτου ἄραβος ἱστορικοῦ Ibn Kahldum (§ 139), ἡ μαθηματικὴ φιλολογία τῶν Μωαμεθανῶν ἀρχίζει μὲ τὰ ἔργα τοῦ Muhammed ibn Musa al Khowarizmi. Ὁ διακεκριμένος αὐτὸς Ἄραψ ἐγεννήθη εἰς τὴν πόλιν Khowarezm (τὴν σημερινὴν Khiwa) καὶ ἤκμασε κατὰ τὴν περίοδον 813 - 833, κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς ὁποίας ἐβασίλευσεν ὁ χαλίφης Al Mamun, ζήσας εἰς τὴν αὐλὴν τούτου καὶ ἀπολαμβάνων μεγάλων τιμῶν καὶ σεβασμοῦ. Ἐκαλλιέργησε τὴν ἀστρονομίαν καὶ κατέλιπε μίαν σειρὰν ἀστρονομικῶν πινάκων, παρομοίων πρὸς τοὺς ἰνδικούς, τῆς ὁποίας ὑπάρχει σήμερον ἀνάτυπον ληφθὲν δύο αἰῶνας βραδύτερον ἀπὸ ἕνα Ἄραβα τῆς Ἰσπανίας, τὸν Maslema ibn Ahmed Al Madgriti. Οἱ πίνακες αὐτοὶ εἶναι διὰ τὸν μαθηματικὸν κατὰ τοῦτο ἄξιοι προσοχῆς, ὅτι αἱ τριγωνομετρικαὶ σχέσεις παίζουν εἰς αὐτοὺς σημαίνοντα ρόλον, διεδόθησαν δὲ εἰς τὴν Εὐρώπην χάρις εἰς τὸν Ἀδελάρδον ἐκ Bath (περίπου 1120, § 114), ὁ ὁποῖος τοὺς μετέφρασεν εἰς τὴν λατινικήν.

Ὅ,τι ὅμως ἐνδιαφέρει ἡμᾶς πολὺ περισσότερον ἐκ τοῦ μαθηματικοῦ ἔργου τοῦ Muhammed ibn Musa εἶναι μία ἀριθμητική, τῆς ὁποίας εἶναι γνωστὴ σήμερον μόνον μία λατινικὴ μετάφρασις ὑπὸ τὸν τίτλον Algoritmi de numero Indorum, καὶ μία ἄλγεβρα, τῆς ὁποίας κατέχομεν τὸ πρωτότυπον εἰς ἕνα χειρόγραφον τοῦ 1342 ἀνῆκον εἰς τὴν πανεπιστημιακὴν βιβλιοθήκην τῆς Ὀξφόρδης, ὡς ἐπίσης μερικὰς μεταφράσεις ἐν ὅλῳ ἢ ἐν μέρει.

Τὸ πρῶτον ἀναφέρεται κυρίως, διότι μᾶς παρέχει τὰς ἀρχαιοτέρας πληροφορίας γύρω ἀπὸ τὴν χρῆσιν, ἐκ μέρους τῶν Ἀράβων, τῆς δεκαδικῆς ἀριθμογραφίας θέσεως, ὅπου τὸ μηδὲν χαρακτηρίζεται μὲ τὴν περίφρασιν «μικρὸς κύκλος» (circulum parvulum). Τὸ δεύτερον ὅμως ἔχει μεγίστην ἀξίαν, διότι μὲ αὐτὸ ἐγκαινιάζεται ἡ ἀλγεβρικὴ φιλολογία, τῆς ὁποίας ἔκτοτε ὁ πλοῦτος διαφεύγει κάθε προσπάθειαν ὑπολογισμοῦ. Εἶναι σκόπιμον νὰ παρατηρήσωμεν εὐθὺς ἀμέσως ὅτι δὲν πρόκειται περὶ ἔργου πρωτοτύπου, ἀλλ' ἐμπνευσμένου ἀπὸ τοὺς Ἰνδούς, οὔτε περὶ ἔργου περιλαμβάνοντος ἐξαντλητικὴν ἀνάπτυξιν τῆς ἐπιστήμης τοῦ καιροῦ ἐκείνου, μὲ καθαρῶς θεωρητικὰς προθέσεις, ἀλλ' ὅπως δηλώνει ὁ ἴδιος ὁ συγγραφεύς, τὸ ἔργον ἐγράφη κατὰ προτροπὴν τοῦ χαλίφου Al Mansur, ὁ ὁποῖος ἔκρινεν ὅτι ἐπιβάλλεται ἡ ἐκμάθησις τῶν ἰνδικῶν ἀριθμητικῶν μεθόδων εἰς τοὺς ὑπηκόους του, διὰ νὰ δύνανται ν' ἀντεπεξέρχωνται εἰς πρακτικὰ προβλή-

ματα τῆς καθημερινῆς ζωῆς, ὅπως εἶναι αἱ περιπτώσεις προσδιορισμοῦ κληρονομικῶν μεριδίων, καταμερισμοῦ περιουσιακῶν στοιχείων, ρυθμίσεως ἐμπορικῶν συναλλαγῶν καὶ διενέξεων, καταμετρήσεως γηπέδων, κατασκευῆς προχωμάτων καὶ τὰ παρόμοια.

Ὁ σεβασμὸς τῶν Ἀράβων πρὸς τὸν ἐν λόγῳ μαθηματικὸν καταφαίνεται ἀπὸ τὸ γεγονός, ὅτι τὸ ἔργον του εὗρε πολὺ γρήγορα τοὐλάχιστον τρεῖς σχολιαστάς, ἡ δὲ ἐπίδρασις, τὴν ὁποίαν ἤσκησε τὸ ἔργον τοῦτο εἰς τὴν Εὐρώπην, εἶναι ἡ ἰσχυροτέρα ἐξ ὅσων ἐξεδηλώθησαν μετὰ τὴν ἑλληνικὴν περίοδον καὶ μέχρι τοῦ Regiomontanus (ψευδώνυμον τοῦ Γερμανοῦ ἀστρονόμου Ἰωάννου Müller, 1436 - 1476, βλ. § 181 - 184). Πόσον εἶναι τοῦτο ἀληθὲς ἀποδεικνύεται ἐπαρκῶς ἀπὸ τὰ ἀκόλουθα δύο γεγονότα.

Ἐν πρώτοις, ἀπὸ τὸ ὄνομα Al Khowarizmi, μὲ τὸ ὁποῖον ἐσυνήθιζον πολλοὶ νὰ συντέμνουν τὸ μακρὸν ὄνομα τοῦ συγγραφέως, κατάγεται ὁ ὅρος «ἀλγόριθμος», ὁ ὁποῖος ἀφοῦ ὑπέστη διαφόρους περιπετείας καὶ ἔπαιξε διαφόρους ρόλους, κατέληξε νὰ προσλάβῃ μονίμως τὴν ἔννοιαν οἱασδήποτε συστηματικῆς λογιστικῆς μεθόδου, ἐκπορευομένης ἔκ τινων δεδομένων καὶ ἀποληγούσης εἰς ἕνα ἀποτέλεσμα. Ἐξ ἄλλου, ἀπὸ τὸ περὶ οὗ πρόκειται ἔργον κατάγονται τὰ στοιχεῖα, ἐκ τῶν ὁποίων ἐτυμολογεῖται ὁ ὅρος «ἄλγεβρα». Διότι μὲ τὰς λέξεις «al gebr» (λατινικὰ restauratio) καὶ «al mukabala» (λατινικὰ oppositio), ἐχαρακτηρίζοντο, εἰς τὸ προκείμενον ἔργον, αἱ δύο πράξεις, αἱ τόσον θεμελιώδεις εἰς τὸν χειρισμὸν τῶν ἐξισώσεων, ἤτοι ἡ «μεταφορὰ» ὅρων ἀπὸ ἑνὸς μέλους εἰς τὸ ἄλλο μὲ σύγχρονον ἀλλαγὴν σημείου καὶ ἡ «ἀναγωγὴ» τῶν ὁμοίων ὅρων.

Ὁ Muhammed ibn Musa δὲν μεταχειρίζεται τὸν ἰδικόν μας συμβολισμόν, οὔτε ἄλλον παρομοίας φύσεως, παραμένει λοιπὸν ἀκόμη πιστὸς εἰς μίαν ρητορικὴν ἄλγεβραν (§ 89), ὅπως ἦτο τοῦ Διοφάντου. Διὰ νὰ δηλώσῃ τὸν ἄγνωστον, χρησιμοποιεῖ τὴν λέξιν «schai», δηλαδὴ «πρᾶγμα», ὅρος ἐπικρατήσας ἔκτοτε ἐπὶ πολλοὺς αἰῶνας εἰς τὴν Εὐρώπην. Ἀποφεύγων τὴν συνήθειαν τῶν Ἰνδῶν, νὰ χρησιμοποιοῦν δηλαδὴ τὰς ποσότητας, ἀδιαφοροῦντες ἂν αὗται εἶναι θετικαὶ ἢ ἀρνητικαί, ἐξετάζει κεχωρισμένως ἓξ τύπους δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων :

$$ax^2 = bx \qquad ax^2 = c \qquad bx = c$$

$$x^2 + bx = a \qquad x^2 + a = bx \qquad x^2 = a + bx,$$

ὅπου a, b, c ἀριθμοὶ θετικοί. Τὸ σύστημα τοῦτο διετηρήθη ἔκτοτε μέχρι τέλους τοῦ XVI αἰῶνος.

Διὰ τοὺς τρεῖς τελευταίους τύπους χρησιμοποιεῖ τὰ παραδείγματα :

$$x^2 + 10x = 39, \qquad x^2 + 21 = 10x, \qquad x^2 = 3x + 4,$$

τὰ ὁποῖα, ἂν καὶ δὲν ἔχουν τίποτε τὸ ἰδιάζον, ἐπανευρίσκονται εἰς τὴν ἀλ-

γεβρικὴν φιλολογίαν ἐπὶ πολλοὺς αἰῶνας μετὰ ταῦτα καὶ δύνανται νὰ δώσουν λαβὴν εἰς ἀπόδειξιν κάποιας προελεύσεως μὴ ὁμολογουμένης*. Διὰ τὴν λύσιν τῶν ἐξισώσεων τούτων, ὁ Muhammed ἀκολουθεῖ μίαν ὁδόν, ἡ ὁποία, κατὰ βάθος, δὲν διαφέρει ἐκείνης, τὴν ὁποίαν ἐφαρμόζομεν σήμερον, ὅταν π.χ. ἐκ τῆς ἐξισώσεως $x^2+bx=a$ μεταβαίνομεν διὰ μετασχηματισμῶν εἰς τὴν ἰσοδύναμον :

$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2=a+\frac{b^2}{4}\cdot$$

Τὴν μέθοδόν του αἰσθητοποιεῖ ἐποπτικῶς, προσφεύγων εἰς γεωμετρικὰς θεωρίας, τὰς ὁποίας ἐμπνέεται — πιθανῶς μέσῳ τῶν Ἰνδῶν — ἀπὸ τοὺς μεγάλους μαθηματικοὺς τῆς Ἑλλάδος.

Ἡ ἑλληνικὴ ἐπίδρασις διαφαίνεται ἀκόμη καθαρωτέρα εἰς τὸ καθαρῶς γεωμετρικὸν μέρος τοῦ ὑπ' ὄψιν ἔργου. Ἀπαντᾶται πράγματι ἐκεῖ μία ἀπόδειξις τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος διὰ τὰ ὀρθογώνια καὶ ἰσοσκελῆ τρίγωνα, τῆς ὁποίας εἶναι δύσκολον ν' ἀρνηθῶμεν τὴν συνάφειαν μὲ τὸ ἔνδοξον πλατωνικὸν χωρίον τοῦ Μένωνος. Περαιτέρω, ἡ ἀναφερομένη ταξινόμησις τῶν ἐπιπέδων τετραπλεύρων δὲν διαφέρει τῆς ἐκτιθεμένης εἰς τὸν Εὐκλείδην. Τέλος ἡ τιμὴ 22/7, τὴν ὁποίαν χρησιμοποιεῖ ὁ Muhammed διὰ τὸν λόγον τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον, εἶναι ἡ δοθεῖσα ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους. Ἡ παρουσία, ἐν τούτοις, καὶ ἄλλων τιμῶν ($\sqrt{10}$, 3,1416) δηλοῖ ὅτι ὁ θαυμασμὸς πρὸς τὴν Δύσιν δὲν τὸν ἠμπόδιζε νὰ τείνῃ προθύμως τὰ ὦτα καὶ πρὸς διδασκαλίας προερχομένας ἐξ Ἀνατολῶν.

Μεταξὺ τῶν προβλημάτων, τῶν ὁποίων ἐκθέτει τὰς λύσεις ὁ Muhammed ibn Musa, σημειώνομεν ἐκεῖνο, τὸ σχεδὸν κλασσικόν, τοῦ ὑπολογισμοῦ τοῦ ὄγκου μιᾶς κολούρου πυραμίδος τετραγωνικῆς βάσεως, ὡς ἐπίσης μίαν σειρὰν ἀριθμητικῶν προβλημάτων τῆς πράξεως ἐξυπηρετούντων τὸν σκοπόν, διὰ τὸν ὁποῖον, ὡς εἴπομεν, ἐσχεδιάσθη καὶ ἐγράφη τὸ ἔργον. Πρόκειται κατὰ μέγα μέρος περὶ προβλημάτων, ποὺ ἀφοροῦν τὴν διανομὴν μιᾶς περιουσίας εἰς διαφόρους κληρονόμους, δικαιουμένους, κατόπιν διαθήκης, διάφορα ποσοστὰ συμμετοχῆς, ὅταν ἡ κληρονομία βαρύνεται καὶ μὲ χρέη πρὸς τρίτους. Παρουσιάζουν μερικὰς ἑρμηνευτικὰς δυσκολίας, διότι δὲν εἶναι μὲ ἀκρίβειαν γνωστοὶ οἱ ἀραβικοὶ νόμοι οἱ διέποντες τὸ κληρονομικὸν δίκαιον. Ἀλλὰ αἱ ἐξισώσεις, εἰς τὰς ὁποίας ἀνάγονται, εἶναι ὅλαι τοῦ πρώτου βαθμοῦ καὶ λύονται ἐν γένει μὲ τὴν μέθοδον τῆς αὐθαιρέτου ἀφετηρίας (Regula Falsi)[81] ἢ διὰ καλῶς ρυθμιζομένων

* Βλ. π.χ. τὴν μετάφρασιν ἀποσπάσματος ἑνὸς ἀνωνύμου ἀλγεβρικοῦ ἔργου, γενομένην ὑπὸ τοῦ Γεράρδου τῆς Κρεμώνης καὶ δημοσιευθεῖσαν, μὲ βάσιν ἕνα κώδικα τοῦ Βατικανοῦ, ὑπὸ τοῦ B. Boncompagni εἰς τὸ ὑπόμνημα: Della vita e delle opere di Gherardo Cremonese — Atti dell Acad. Pont. de Nuovi Lincei, t. IV, 1850 - 51.

δοκιμῶν. Π.χ. ἕνα ἀπὸ τ' ἀνωτέρω προβλήματα θὰ ἠδύνατο ν' ἀναχθῇ σήμερον εἰς τὴν ἐξίσωσιν:

$$k-\left(\frac{k}{5}-x\right)-\left(\frac{k}{4}-2x\right)=13x.$$

Διὰ νὰ λύσωμεν τώρα τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν εἰς ἀκεραίους ἀριθμούς, ἂς ὑποθέσωμεν $k = 4.5 = 20$, ὁπότε $11 = 10x$. Τοιουτοτρόπως προκύπτει διὰ τὸν ἄγνωστον ἡ κλασματικὴ τιμὴ 11/10. Δεχόμεθα λοιπὸν $k = 200$ καὶ λαμβάνομεν $x = 11$.

Ἐντελῶς ἀναλόγως διὰ νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$k-\left(\frac{k}{3}-3x\right)-\left(\frac{k}{4}-2x\right)-\left(\frac{k}{2}-x\right)=13x,$$

δεχόμεθα $k = 60$, ὁπότε αὕτη ἀνάγεται εἰς τὴν

$$13 + 6x = 13x,$$

ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει $x = 13/7$. Διὰ νὰ λάβωμεν ἀκεραίας τιμάς, πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 7, ὅτε $k = 760 = 420$ καὶ $x = 13$, δηλαδὴ ἡ τιμή, τὴν ὁποίαν ἀκριβῶς εὑρίσκει καὶ ὁ περὶ οὗ ὁ λόγος μαθηματικός.

144. Ἡ κλίσις καὶ ὁ ζῆλος τοῦ Muhammed ibn Musa διὰ τὰ μαθηματικὰ ἀπαντῶνται ἐπίσης εἰς τοὺς τρεῖς ἀδελφοὺς Muhammed, Ahmed καὶ Al Hasan, εἰς τοὺς ὁποίους ἀποδίδεται ἡ διὰ συνεχοῦς κινήσεως καταγραφὴ ἐλλείψεως μὲ δοθείσας ἑστίας καὶ ὡρισμένον μεγάλον ἄξονα. Οἱ τρεῖς ἀδελφοὶ ἐδαπάνησαν τεράστια ποσὰ διὰ τὴν ἀπόκτησιν ἑλληνικῶν ἔργων καὶ τῶν μεταφράσεών των εἰς τὴν ἀραβικήν, ἐπεχείρησαν δὲ πρὸς τὸν σκοπὸν αὐτὸν περιπετειώδη ταξίδια, ἀναθέτοντες ἑκάστοτε τὴν ἀγορὰν τοιούτων κειμηλίων εἰς πρόσωπα διαθέτοντα εἰδικὴν ἐμπειρίαν.

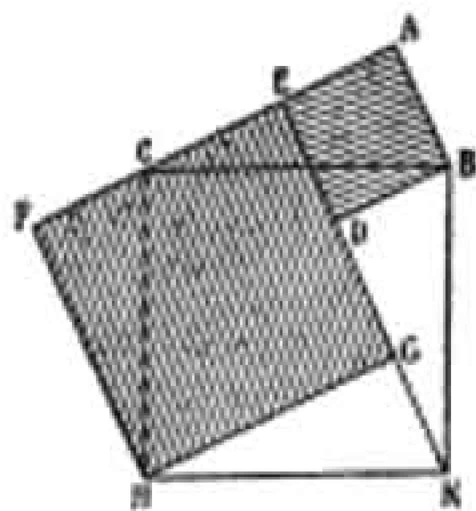
Εὐφυέστερος ἐκ τῶν τριῶν ἀδελφῶν φαίνεται ὅτι ἦτο ὁ πρῶτος, εἰς τὸν ὁποῖον ἀποδίδεται ἰδιαιτέρα αὐθεντία εἰς τὴν λογικὴν καὶ τὴν ἀστρονομίαν. Ὁ δεύτερος ἠσχολήθη κατὰ προτίμησιν μὲ τὴν μηχανικήν, ἐνῷ ὁ τρίτος ἔδειξεν ἐξαιρετικὴν κλίσιν πρὸς τὴν γεωμετρίαν. Ἐκ τῶν πολλῶν ἔργων, ποὺ ἀποδίδονται εἰς τὴν εὐγενῆ αὐτὴν τριάδα, ἕνα μόνον ἐκυκλοφόρησεν εἰς τὴν Εὐρώπην, πρῶτον εἰς λατινικὴν μετάφρασιν γενομένην ὑπὸ τοῦ Γεράρδου τῆς Κρεμώνης, κατόπιν δὲ εἰς μερικὴν γερμανικὴν μετάφρασιν ἐπὶ τῇ βάσει συντετμημένου πρωτοτύπου, ὀφειλομένου πιθανῶς εἰς τὸν μαθηματικὸν Nasir ed din (§ 152).

Τὸ βιβλίον ὠνομάσθη Liber Trium Fratrem, διότι ἀρχίζει μὲ τὰς λέξεις: «Verba filiorum Moysii filii Sacker, Muhumeti, Hameti, Hasan». Πρόκειται περὶ μιᾶς συλλογῆς στοιχειωδῶν γεωμετρικῶν προτάσεων, μὴ διεκδικουσῶν πρωτοτυπίαν, καθ' ὅσον ἔχουν ληφθῆ ἐξ ἑλληνικῶν πηγῶν. Ἀξία

προσοχῆς εἶναι μόνον ἡ μέθοδος προσδιορισμοῦ τοῦ γνωστοῦ τύπου τοῦ Ἥρωνος διὰ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου, ἡ ὁποία διαφέρει τῆς χρησιμοποιηθείσης ὑπὸ τοῦ Ἥρωνος.

Σύγχρονος τῶν τριῶν ἀδελφῶν εἶναι ὁ Abu'l Hasan Tabit ibn Qorra ibn Merwan al Harrani, γεννηθεὶς εἰς Harran (πόλις τῆς βορείου Μεσοποταμίας, πλησίον τῆς Edessa) τὸ 836 (ἢ κατ' ἄλλους τὸ 835) καὶ ἀποθανὼν εἰς Safar τὴν 18ην Φεβρουαρίου 901. Ἀφοῦ ἤσκησεν εἰς τὴν πατρίδα του ἐπί τινα χρόνον τὸ ἐπάγγελμα τοῦ ἀργυραμοιβοῦ, ὠθούμενος ἀπὸ τὴν δίψαν τῆς γνώσεως, μετεφέρθη εἰς τὴν Βαγδάτην, ὅπου τὴν ἐποχὴν ἐκείνην ἔλαμπεν ὁ γιγαντιαῖος πυρσός, ὁ ἀποστέλλων τὰς ἀστραπάς του εἰς ὅλας τὰς χώρας, ποὺ ἐξετείνοντο ἀπὸ τῶν Ἡρακλείων στηλῶν μέχρι τῆς ἄπω Ἀνατολῆς. Ἐκεῖ ἦλθεν εἰς ἐπαφὴν μὲ τὸν Muhammed ibn Musa, ὁ ὁποῖος ἐκτιμῶν τὴν ὀξεῖαν διάνοιαν καὶ τὴν εὐρεῖαν του μόρφωσιν, τὸν ἐκάλεσεν ὑπὸ τὴν στέγην του καὶ τὸν παρώτρυνε νὰ δώσῃ ἔμπρακτον ἀξίαν εἰς τὰς φιλολογικὰς καὶ ἐπιστημονικὰς γνώσεις του, μεταφράζων ἑλληνικὰ ἐπιστημονικὰ κείμενα καὶ ἀναθεωρῶν ὅσα εἶχον ἤδη μεταφρασθῆ.

Μία ἐργασία τοιαύτης φύσεως, τὴν ὁποίαν ἔκαμεν ὁ Tabit ἐπὶ τῶν Κωνικῶν τοῦ Ἀπολλωνίου καὶ τὸ γεγονός, ὅτι εἰς αὐτὸν ὀφείλεται κατὰ μέγα μέρος ἡ διάσωσις τῶν Λημμάτων τοῦ Ἀρχιμήδους ὡς καὶ τοῦ Περὶ ἑπταγώνου ὑπομνήματος (§ 44) αὐτοῦ, ἀρκοῦν διὰ ν' ἀποδείξουν, ὅτι ἡ σοφὴ ἐκείνη παρόρμησις δὲν ἔμεινεν ἄκαρπος. Γενόμενος δὲ κύριος τῶν μεθόδων καὶ τῶν θεωρημάτων τῶν θεμελιωτῶν τῆς γεωμετρίας καὶ ἐμβαθύνας εἰς τὰς παρατηρήσεις τῶν σχολιαστῶν των, κατώρθωσε νὰ τοὺς συμπληρώσῃ εἰς μερικὰ σημαντικὰ σημεῖα, ὅπως προκύπτει ἐξ ὅσων θὰ εἴπωμεν ἀμέσως*.



Σχ. 22

Ὁ Anaritio διέσωσε τὴν μνήμην μιᾶς ἀποδείξεως τοῦ θεωρήματος τοῦ Πυθαγόρου, στηριζομένην εἰς ἔμπνευσιν τοῦ Tabit. Αὕτη ἐκφράζεται διὰ τοῦ σχ. 22, ὅπου τὸ φέρον διαγράμμησιν χωρίον, ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο καθέτων πλευρῶν τοῦ ληφθέντος ὀρθογωνίου τριγώνου, δύναται νὰ μετασχηματισθῇ εἰς τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης προσθετομένων καὶ ἀφαιρουμένων δύο τριγώνων ἴσων πρὸς τὸ δοθέν.

Δὲν θὰ ἐνδιατρίψωμεν εἰς ἕνα ἔργον τοῦ Tabit σχετικὸν μὲ τὸν μοχλόν, ἐμπνευσμένον ἀπὸ τὰ ἀνάλογα ἔργα τοῦ Εὐκλείδου, τοῦ Ἀρχιμήδους καὶ

* Ἐδῶ ἀσχολούμεθα μόνον μὲ τὰς μαθηματικὰς ἐργασίας τοῦ Tabit, οἱ βιογράφοι του ὅμως ἀναφέρουν καὶ ἄλλας, ἐκ τῶν ὁποίων συνάγεται, ὅτι ὁ ἐν λόγῳ σοφὸς εἶχεν ἐναγκαλισθῆ ὅλας τὰς ἐπιστήμας τῆς ἐποχῆς του.

τοῦ Ἥρωνος, διὰ νὰ ὁμιλήσωμεν ἐκτενέστερον ἐπὶ μιᾶς μεθόδου, τὴν ὁποίαν ἐπενόησεν ὁ Tabit πρὸς εὕρεσιν ζευγῶν ἀριθμῶν φίλων. Ὅπως γνωρίζομεν, τὸ ὄνομα τοῦτο ἐδόθη ὑπὸ τοῦ Πυθαγόρου εἰς δύο ἀριθμούς, ἑκάτερος τῶν ὁποίων εἶναι ἴσος πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν διαιρετῶν τοῦ ἑτέρου. Ὁ Tabit ἀνεκάλυψεν ὅτι, «ἐὰν οἱ τρεῖς ἀριθμοί :

$$3 \cdot 2^{\nu} - 1$$
$$3 \cdot 2^{\nu-1} - 1$$
$$9 \cdot 2^{2\nu-1} - 1$$

ὑποτεθοῦν πρῶτοι, τότε οἱ ἑξῆς δύο ἀριθμοί :

$$2^{\nu}(3 \cdot 2^{\nu} - 1)(3 \cdot 2^{\nu-1} - 1),$$
$$2^{\nu}(9 \cdot 2^{2\nu-1} - 1),$$

(ὅπου ν θετικὸς ἀκέραιος) εἶναι φίλοι». Διὰ $\nu = 2$ λαμβάνομεν τὸ ζεῦγος : 220, 284. Ἡ μεγάλη ἀξία τῆς ἀνακαλύψεως τοῦ Tabit ἀπορρέει ἐκ τοῦ γεγονότος, ὅτι αὕτη ἀποτελεῖ μέχρι σήμερον τὴν μόνην γνωστὴν μέθοδον εὑρέσεως ζευγῶν φίλων ἀριθμῶν.

Χρεωστοῦμεν ἐπίσης εἰς τὸν ἴδιον μαθηματικὸν ἕνα ἔργον, τὸ ὁποῖον ἔφθασε μέχρις ἡμῶν μέσῳ τῆς λατινικῆς του μεταφράσεως, ὀφειλομένης εἰς τὸν Γεράρδον τῆς Κρεμώνης. Τὸ ἔργον αὐτὸ ἔχει ὡς θέμα τὸ θεώρημα τοῦ Μενελάου, (§ 68), τοῦ ὁποίου τὴν θεμελιώδη σημασίαν εἶχον διακρίνει οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες, ἀφοῦ, ὅπως ἐνθυμεῖται ὁ ἀναγνώστης (§ 70) ἐξ αὐτοῦ ἐπορίσθη ὁ Πτολεμαῖος εἰς τὴν Ἀλμαγέσταν τοὺς τύπους ἐπιλύσεως τῶν σφαιρικῶν τριγώνων. Ἐπειδὴ δὲ ὁ ἄραψ μαθηματικὸς ἀναφέρει ἀκριβῶς εἰς τὸ ἔργον του τὸν Πτολεμαῖον καὶ μόνον αὐτόν, δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν, ὅτι δὲν εἶχεν ἀκόμη τότε συντελεσθῇ (ἢ ἠγνοεῖτο ἀπὸ τὸν Tabit) ἡ ἀραβικὴ μετάφρασις τῆς Σφαιρικῆς τοῦ Θεοδοσίου τοῦ ἐκ Τριπόλεως (§ 67). Τῆς προτάσεως τοῦ Μενελάου δίδει ὁ Tabit νέαν ἀπόδειξιν, μακρηγορεῖ δέ, κατὰ τὴν χαρακτηριστικὴν πολυλογίαν τῆς ἐποχῆς του, μὲ τὴν ἀπαρίθμησιν 18 τοὐλάχιστον περιπτώσεων, ποὺ δύναται νὰ παρουσιάσῃ τὸ σχετικὸν σχῆμα. Ἄξιον σημειώσεως εἶναι ὅτι, ὡς χρησιμοποιῶν τὰς χορδὰς τῶν τόξων, ἀντὶ τῶν ἡμιχορδῶν (δηλαδὴ τῶν ἡμιτόνων), μαρτυρεῖ ὅτι προτιμᾷ νὰ παραμείνῃ μαθητὴς τῶν Ἑλλήνων, ἀντὶ τῶν Ἰνδῶν.

Βαθέα ἴχνη κατέλιπεν ὁ Tabit καὶ εἰς ἄλλον τομέα πολὺ διάφορον, τελειοποιήσας καὶ συμπληρώσας τὰς ἀρχιμηδείους προτάσεις τὰς σχετικὰς μὲ τὸν τετραγωνισμὸν τῆς παραβολῆς καὶ ἐρευνήσας τὸν κυβισμὸν τῶν στερεῶν, ποὺ γεννῶνται ἐκ περιστροφῆς περὶ τὸν ἄξονά της, πρᾶγμα ἀκόμη περισσότερον ἀξιοσημείωτον, καθ' ὅσον, ὡς πιστεύεται, οἱ Ἄραβες δὲν ἐγνώριζον τὰς θεμελιώδεις ἐργασίας τοῦ Ἀρχιμήδους Περὶ σφαιροειδέων καὶ κωνοειδέων. Τοιαῦται ἔρευναι διεξήγοντο μὲ τὴν

βοήθειαν τῶν ἀπειροστικῶν μεθόδων, ποὺ ἔμαθον οἱ Ἄραβες ἀπὸ τὸν Εὐκλείδη καὶ τὸν Ἀρχιμήδη. Τὸ πεδίον τῆς ἐρεύνης ἀπεδείχθη τόσον γόνιμον, ὥστε καὶ ἄλλοι μαθηματικοὶ ἔσπευσαν νὰ τὸ καλλιεργήσουν. Θὰ μνημονεύσωμεν δύο ἐξ αὐτῶν, ἐνῷ δι' ἕνα τρίτον θὰ ὁμιλήσωμεν κατωτέρω (§ 147).

Ὁ ἕνας ἐξ αὐτῶν εἶναι ἀνεψιὸς τοῦ ἰδίου τοῦ Tabit καὶ ὀνομάζεται Abu Ishaq Ibrahim ibn Sinah ibn Tabit ibn Qorra, γεννηθεὶς τὸ 908 ἢ 909 καὶ ἀποθανὼν τὸ 946. Εἰς αὐτὸν ὀφείλεται ἕνας νέος τρόπος, μὲ τὸν ὁποῖον φθάνομεν εἰς τετραγωνισμὸν τῆς παραβολῆς, εἰς δὲ τὸν φερόμενον ὡς υἱόν του Abu Said Gabir Ibraim Al Sabi ὀφείλονται μερικαὶ σελίδες ἐπὶ τῆς μεθόδου τῆς αὐθαιρέτου ἀφετηρίας (Regula Falsi) [81].

Ὁ ἄλλος μαθηματικὸς εἶναι ὁ Abu Sahl Wigan ibn Rustem Al Kuhi, γεννηθεὶς εἰς Kuh τοῦ Tabaristan καὶ δράσας εἰς τὴν αὐλὴν τῆς Βαγδάτης κατὰ τὸ δεύτερον ἥμισυ τοῦ X αἰῶνος. Εἶναι συγγραφεὺς πολλῶν ἔργων μαθηματικῶν καὶ ἀστρονομικῶν. Ἕνα ἐξ αὐτῶν, πραγματευόμενον τὰς καμπύλας ποὺ γεννῶνται ἐκ τῆς προβολῆς τῆς σκιᾶς ἑνὸς στύλου ἐπὶ τοῦ γηπέδου, ἀποδεικνύει ὅτι ὁ συγγραφεὺς εἶχε βαθεῖαν γνῶσιν τῶν κωνικῶν τομῶν. Ἕνα ἄλλο, ποὺ ἔγινε γνωστὸν εἰς τὴν Εὐρώπην ἔκ τινος μερικοῦ σχολίου, πραγματεύεται γεωμετρικῶς κυβικὰ ζητήματα (τρίτου βαθμοῦ), μεταξὺ τῶν ὁποίων καὶ τὴν τριχοτόμησιν τῆς γωνίας. Τέλος ἕνα τρίτον, ἀκόμη σπουδαιότερον, ἔχει ὡς θέμα τὸν κυβισμὸν τοῦ ἐλλειπτικοῦ παραβολοειδοῦς.

Ἐὰν ὅλα αὐτὰ τὰ ἔργα τῶν ἀράβων μαθηματικῶν εἶχον γίνει ἐγκαίρως γνωστὰ καὶ κατανοητὰ εἰς τοὺς Εὐρωπαίους, ἡ ἐκ τοῦ τάφου ἔξοδος τοῦ μεγάλου Συρακουσίου θὰ εἶχεν ἐπέλθει μερικοὺς αἰῶνας ἐνωρίτερον καὶ θὰ εἶχεν ὡς ἀποτέλεσμα τὴν ταχυτέραν διαμόρφωσιν τῆς σημερινῆς ἀπειροστικῆς ἀναλύσεως.

Abu Kamil

145. Εἰς τὴν ἱστορίαν τῆς ὑπὸ τῶν Ἀράβων καλλιεργείας τοῦ κλάδου τῆς Ἀλγέβρας φαίνεται, ὅτι τὸν Muhammed ibn Musa ἀκολουθεῖ χρονολογικῶς ὁ αἰγύπτιος Abu Kamil Sega ibn Aslam ibn Muhammed ibn Sega, ἀκμάσας περὶ τὸ ἔτος 900. Οὗτος ἐθαυμάζετο ἀρκετὰ ὑπὸ τῶν ὁμοθρήσκων του δι' ἕνα ἔργον του, περιελθὸν εἰς ἡμᾶς μέσῳ λατινικῆς μεταφράσεως, ὅπου εἰς τὴν λύσιν τῶν ἐξισώσεων ἐφαρμόζει μεθόδους γεωμετρικῆς ἀλγέβρας, γνωστὰς ἀπὸ τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου. Μεταξὺ ἄλλων, ὁ συγγραφεὺς δεικνύει ὅτι γνωρίζει τὰς ταυτότητας :

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{a+b \pm 2\sqrt{ab}}\ ,$$

ἐξαιρετικῶς χρησίμους, ὅταν τὸ γινόμενον ab εἶναι τέλειον τετράγωνον.

βοήθειαν τῶν ἀπειροστικῶν μεθόδων, ποὺ ἔμαθον οἱ Ἄραβες ἀπὸ τὸν Εὐκλείδη καὶ τὸν Ἀρχιμήδη. Τὸ πεδίον τῆς ἐρεύνης ἀπεδείχθη τόσον γόνιμον, ὥστε καὶ ἄλλοι μαθηματικοὶ ἔσπευσαν νὰ τὸ καλλιεργήσουν. Θὰ μνημονεύσωμεν δύο ἐξ αὐτῶν, ἐνῷ δι' ἕνα τρίτον θὰ ὁμιλήσωμεν κατωτέρω (§ 147).

Ὁ ἕνας ἐξ αὐτῶν εἶναι ἀνεψιὸς τοῦ ἰδίου τοῦ Tabit καὶ ὀνομάζεται Abu Ishaq Ibrahim ibn Sinah ibn Tabit ibn Qorra, γεννηθεὶς τὸ 908 ἢ 909 καὶ ἀποθανὼν τὸ 946. Εἰς αὐτὸν ὀφείλεται ἕνας νέος τρόπος, μὲ τὸν ὁποῖον φθάνομεν εἰς τετραγωνισμὸν τῆς παραβολῆς, εἰς δὲ τὸν φερόμενον ὡς υἱόν του Abu Said Gabir Ibraim Al Sabi ὀφείλονται μερικαὶ σελίδες ἐπὶ τῆς μεθόδου τῆς αὐθαιρέτου ἀφετηρίας (Regula Falsi) [81].

Ὁ ἄλλος μαθηματικὸς εἶναι ὁ Abu Sahl Wigan ibn Rustem Al Kuhi, γεννηθεὶς εἰς Kuh τοῦ Tabaristan καὶ δράσας εἰς τὴν αὐλὴν τῆς Βαγδάτης κατὰ τὸ δεύτερον ἥμισυ τοῦ X αἰῶνος. Εἶναι συγγραφεὺς πολλῶν ἔργων μαθηματικῶν καὶ ἀστρονομικῶν. Ἕνα ἐξ αὐτῶν, πραγματευόμενον τὰς καμπύλας ποὺ γεννῶνται ἐκ τῆς προβολῆς τῆς σκιᾶς ἑνὸς στύλου ἐπὶ τοῦ γηπέδου, ἀποδεικνύει ὅτι ὁ συγγραφεὺς εἶχε βαθεῖαν γνῶσιν τῶν κωνικῶν τομῶν. Ἕνα ἄλλο, ποὺ ἔγινε γνωστὸν εἰς τὴν Εὐρώπην ἔκ τινος μερικοῦ σχολίου, πραγματεύεται γεωμετρικῶς κυβικὰ ζητήματα (τρίτου βαθμοῦ), μεταξὺ τῶν ὁποίων καὶ τὴν τριχοτόμησιν τῆς γωνίας. Τέλος ἕνα τρίτον, ἀκόμη σπουδαιότερον, ἔχει ὡς θέμα τὸν κυβισμὸν τοῦ ἐλλειπτικοῦ παραβολοειδοῦς.

Ἐὰν ὅλα αὐτὰ τὰ ἔργα τῶν ἀράβων μαθηματικῶν εἶχον γίνει ἐγκαίρως γνωστὰ καὶ κατανοητὰ εἰς τοὺς Εὐρωπαίους, ἡ ἐκ τοῦ τάφου ἔξοδος τοῦ μεγάλου Συρακουσίου θὰ εἶχεν ἐπέλθει μερικοὺς αἰῶνας ἐνωρίτερον καὶ θὰ εἶχεν ὡς ἀποτέλεσμα τὴν ταχυτέραν διαμόρφωσιν τῆς σημερινῆς ἀπειροστικῆς ἀναλύσεως.

Abu Kamil

145. Εἰς τὴν ἱστορίαν τῆς ὑπὸ τῶν Ἀράβων καλλιεργείας τοῦ κλάδου τῆς Ἀλγέβρας φαίνεται, ὅτι τὸν Muhammed ibn Musa ἀκολουθεῖ χρονολογικῶς ὁ αἰγύπτιος Abu Kamil Sega ibn Aslam ibn Muhammed ibn Sega, ἀκμάσας περὶ τὸ ἔτος 900. Οὗτος ἐθαυμάζετο ἀρκετὰ ὑπὸ τῶν ὁμοθρήσκων του δι' ἕνα ἔργον του, περιελθὸν εἰς ἡμᾶς μέσῳ λατινικῆς μεταφράσεως, ὅπου εἰς τὴν λύσιν τῶν ἐξισώσεων ἐφαρμόζει μεθόδους γεωμετρικῆς ἀλγέβρας, γνωστὰς ἀπὸ τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου. Μεταξὺ ἄλλων, ὁ συγγραφεὺς δεικνύει ὅτι γνωρίζει τὰς ταυτότητας :

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{a + b \pm 2\sqrt{ab}}\ ,$$

ἐξαιρετικῶς χρησίμους, ὅταν τὸ γινόμενον ab εἶναι τέλειον τετράγωνον.

Πολλὰ προβλήματα ὑπηγόρευσε τὸ ἔργον τοῦτο εἰς τὸν ἐκ Πίζης Λεονάρδον, τὰ ὁποῖα περιέλαβεν οὗτος εἰς τὸ ἔργον του Liber Abbaci (§ 158).

Ἡ ἐπίδρασις, τὴν ὁποίαν ἤσκησεν ὁ Abu Kamil εἰς τὴν Εὐρώπην, βεβαιοῦται ἀπὸ ἕνα ἀπόσπασμα, πλῆρες προβλημάτων ἀριθμητικῆς τοῦ εἴδους, ποὺ συνηντήσαμεν ἤδη εἰς τὴν κινεζικὴν φιλολογίαν, ὑπὸ τὸ ὄνομα «πρόβλημα τῶν 100 πτηνῶν» (§ 120), ὡς ἐπίσης εἰς τὸ βιβλίον τοῦ Ἀλκουίνου Propositiones ad acuendos juvenes (θέματα πρὸς ἄσκησιν τῶν νέων) (§ 109). Τὰ προβλήματα αὐτὰ ἐλύοντο μὲ μίαν μέθοδον, ἡ ὁποία κατὰ τὸν μεσαίωνα ἐκαλεῖτο μὲ τὰ ὀνόματα «regula virginum» ἢ «regula potatorum» ἢ ἀκόμη «regula coeci» (κανὼν τῶν παρθένων ἢ τῶν μεθύσων ἢ τῶν τυφλῶν). Τὰ προβλήματα αὐτὰ μεταφράζονται σήμερον εἰς συστήματα ἐξισώσεων τοῦ ἀκολούθου τύπου :

$$x+y+z+\ldots=m,$$
$$\alpha x+\beta y+\gamma z+\ldots=n$$

καὶ λύονται, ἂν ἀπαλείψωμεν ἕνα ἄγνωστον καὶ ἀναζητήσωμεν ἔπειτα ὅλας τὰς ἀκεραίας καὶ θετικὰς λύσεις τῆς προκυπτούσης ἐξισώσεως. Ἡ ἐπιδεξιότης, μὲ τὴν ὁποίαν ἐφαρμόζει τὴν ἰδέαν αὐτὴν τῆς ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως ὁ Abu Kamil, εἶναι ἐκπληκτική, ἂν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν, ὅτι οὗτος προσδιορίζει τὰς 2676 λύσεις, τὰς ὁποίας ἐπιδέχεται τὸ σύστημα :

$$x+y+z+u+v=100,$$
$$2x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{3}z+\frac{1}{4}u+v=100.$$

Ἕνα τρίτον ἔργον τοῦ αὐτοῦ μαθηματικοῦ, ἐγένετο γνωστὸν μόνον μέσῳ μιᾶς ἑβραϊκῆς μεταφράσεως τοῦ 1460, γενομένης, ἐπὶ τῇ βάσει ἱσπανικῆς μεταφράσεως, ὑπὸ τοῦ ἐκ Μαντούης Mardocheo Finzi. Οἱ μὴ εἰδικοὶ ἀνατολισταὶ ἠμποροῦν σήμερον νὰ λάβουν γνῶσιν ἀνατρέχοντες εἰς μίαν ἰταλικὴν μετάφρασιν ἢ ἐπίσης εἰς μίαν γερμανικήν. Πρόκειται περὶ συλλογῆς γεωμετρικῶν προβλημάτων, λυομένων ἀλγεβρικῶς καὶ ἐχόντων ὡς πρώτιστον σκοπὸν τὴν ἐγγραφὴν καὶ περιγραφὴν κανονικῶν πολυγώνων μὲ 5, 10 καὶ 15 πλευράς. Αἱ ἐπιλύουσαι ἐξισώσεις εἶναι δευτεροβάθμιοι ἢ ἀνάγονται εἰς δευτεροβαθμίους. Ὅπου ἐμφανίζονται ἐξισώσεις μὲ ριζικά, τρέπονται δι' ἐπιτυχῶν μετασχηματισμῶν εἰς ἄλλας χωρὶς ριζικά. Ἀναμφισβήτητοι συμπτώσεις ἔχουν διαπιστωθῆ μεταξὺ τοῦ ἔργου τούτου καὶ τῶν ἔργων τοῦ Fibonacci.

Τέλος, εἰς τὸν Abu Kamil ἀποδίδεται μία μονογραφία ἐπὶ τῆς μεθόδου, τὴν ὁποίαν πολλοὶ συγγραφεῖς τοῦ Μεσαίωνος, ἀναφέρουν μὲ τὸν ἀνατολικῆς προελεύσεως ὅρον «al - chataim». Πρόκειται περὶ τοῦ «Regula Falsi» ἢ «Regula augmenti et diminutionis» τοῦ Abraham ben Esdra (§ 113)

καὶ ἄλλων μεσαιωνικῶν συγγραφέων. Τὸ κείμενον ἐκεῖνο εἶναι ἴσως τὸ πρωτότυπον ἄλλου, γνωστοῦ ἀπὸ ἑνὸς αἰῶνος περίπου, χάρις εἰς μίαν λατινικὴν μετάφρασιν φέρουσαν τὸν τίτλον Liber augmenti et diminutionis [81].

Σκοπὸς τοῦ ἔργου τούτου εἶναι νὰ διδάξῃ πῶς, μέσῳ δύο δοκιμῶν, δύναται νὰ λυθῇ οἱαδήποτε ἐξίσωσις ἀναγομένη εἰς τὴν μορφὴν $ax = b$. Θέτομεν διαδοχικῶς εἰς τὴν ἐξίσωσιν δύο αὐθαιρέτους τιμὰς τοῦ x, ἔστω a_1, a_2 καὶ λαμβάνομεν τὰ προκύπτοντα σφάλματα : $e_1 = a_1a\text{-}b$, $e_2 = a_2a\text{-}b$. Ἐντεῦθεν λαμβάνομεν :

$$a = \frac{e_1 - e_2}{a_1 - a_2}, \quad b = \frac{e_1a_2 - e_2a_1}{a_1 - a_2}$$

καὶ τέλος τὴν τιμὴν τοῦ x :

$$x = \frac{e_1a_2 - e_2a_1}{e_1 - e_2}.$$

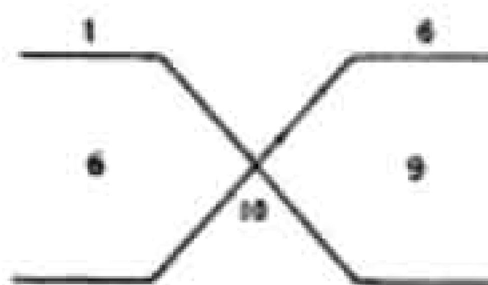
ἐκπεφρασμένην συμφώνως πρὸς τὸν ἀραβικὸν κανόνα. Προσθέτομεν, ὅτι ὁ κανὼν διετυποῦτο διαφόρως καὶ συμφώνως πρὸς τὰ ἑκάστοτε ἀλγεβρικὰ σημεῖα τῶν σφαλμάτων e_1, e_2. Ἐφηρμόζετο δὲ μηχανικῶς μὲ τὴν βοήθειαν ἑνὸς γραφικοῦ σχήματος, ὅπως γίνεται σαφὲς ἀπὸ τὰ ἀκόλουθα παραδείγματα, ποὺ ἀπαντῶνται εἰς μεταγενεστέρους συγγραφεῖς (Al Qalsadi, § 155, Beda Eddin, § 156) :

I. «Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμὸς ὁ ὁποῖος αὐξανόμενος κατὰ τὰ 2/3 αὐτοῦ καὶ μίαν μονάδα δίδει ἄθροισμα 10». Ἡ πρὸς λύσιν ἐξίσωσις εἶναι προφανῶς

$$x + \frac{2}{3}x + 1 = 10.$$

Ἔστωσαν αὐθαίρετοι τιμαὶ τοῦ x, αἱ 9 καὶ 6. Τὰ προκύπτοντα σφάλματα εἶναι + 6, + 1. Κατασκευάζομεν τώρα τὸ σχ. 23, τοῦ ὁποίου αἱ γραμμαὶ βοηθοῦν τὴν ἐξ ὄψεως ἐφαρμογὴν τοῦ ἀνωτέρω κανόνος, ὡς ἑξῆς :

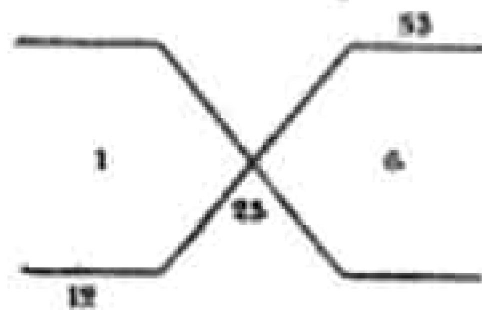
$$x = \frac{6 \cdot 6 - 1 \cdot 9}{6 - 1} = \frac{27}{5} = 5\frac{2}{5}$$



Σχ. 23

II. «Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ ἑξαπλάσιον προστιθέμενον εἰς τὸ ἑπταπλάσιον νὰ δίδῃ ἄθροισμα 25». Ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶναι

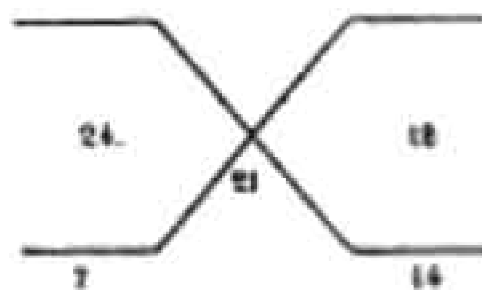
$6x + 7x = 25$. Μὲ τὰς αὐθαιρέτους τιμὰς 6 καὶ 1 ἔχομεν σφάλματα $+53$



Σχ. 24

καὶ -12. Ἐργαζόμενοι, βάσει τοῦ σχ. 24, ὅπως καὶ ἀνωτέρω, εὑρίσκομεν, $x = 1^{12}/_{13}$.

III. «Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου τὸ τέταρτον καὶ τὸ πέμπτον, προστιθέμενα νὰ δίδουν ἄθροισμα 21».Ἡ πρὸς λύσιν ἐξίσωσις εἶναι $x/3 + x/4 =$



Σχ. 25

$= 21$. Μὲ αὐθαιρέτους τιμὰς 12 καὶ 24 εὑρίσκομεν σφάλματα -14, -7. Ὁδηγούμενοι ἀπὸ τὸ σχ. 25, εὑρίσκομεν $x = 36$.

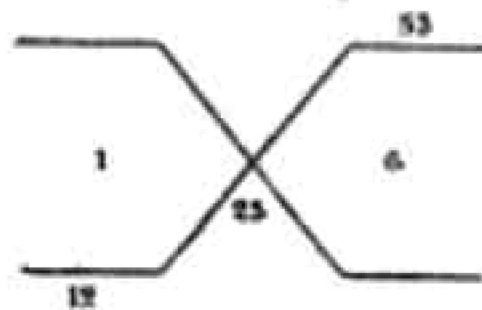
Παρατηρητέον, ὅτι αἱ αὐθαίρετοι τιμαί, ποὺ δίδονται εἰς τὸν x, ἐκλέγονται πάντοτε οὕτως, ὥστε κατὰ τὸν ὑπολογισμόν, ν' ἀποφεύγωνται τὰ κλάσματα.

Ὁ Abu Kamil ἤσκησεν ἀναμφιβόλως ἀξιόλογον ἐπίδρασιν ἐπὶ τῆς εὐρωπαϊκῆς ἐπιστήμης, ἀλλὰ ἀκριβολογημένην εἰκόνα τοῦ μέτρου τῆς ἐπιδράσεως ταύτης θὰ καταστῇ δυνατὸν νὰ λάβωμεν μόνον, ὅταν τὸ ἐπιστημονικόν του ἔργον γίνῃ, εἰς τὸ σύνολον αὐτοῦ γνωστόν, ἀκόμη καὶ εἰς ἐκείνους, οἱ ὁποῖοι δὲν ἔχουν τὴν δυνατότητα νὰ μελετήσουν τὰ ἔργα του εἰς τὸ πρωτότυπον.

Albategno καὶ Abu'l Wafa

146. Ἡ χρονολογικὴ σειρὰ φέρει τώρα εἰς τὸ προσκήνιον ἕνα ἀστρονόμον μεγάλης ἀξίας καὶ παγκοσμίου φήμης, τοῦ ὁποίου τὸ πλῆρες ὄνομα εἶναι : Abu' Abdallah Muhammed ibn Gabir ibn Sinan Al Battani, κοινῶς δὲ Albategno (γεννηθεὶς περὶ τὸ 858 καὶ ἀποθανὼν τὸ 929). Αἱ ἀστρονομικαὶ παρατηρήσεις του καλύπτουν τὴν μακρὰν περίοδον 878 - 919.

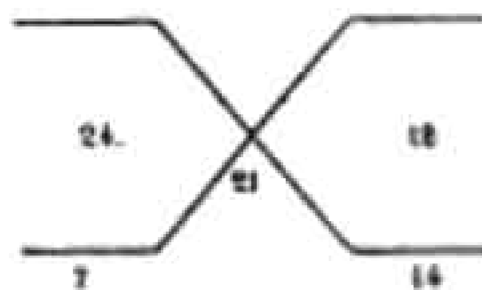
$6x + 7x = 25$. Μὲ τὰς αὐθαιρέτους τιμὰς 6 καὶ 1 ἔχομεν σφάλματα $+53$



Σχ. 24

καὶ -12. Ἐργαζόμενοι, βάσει τοῦ σχ. 24, ὅπως καὶ ἀνωτέρω, εὑρίσκομεν, $x = 1^{12}/_{13}$.

III. «Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου τὸ τέταρτον καὶ τὸ πέμπτον, προστιθέμενα νὰ δίδουν ἄθροισμα 21».Ἡ πρὸς λύσιν ἐξίσωσις εἶναι $x/3 + x/4 =$



Σχ. 25

$= 21$. Μὲ αὐθαιρέτους τιμὰς 12 καὶ 24 εὑρίσκομεν σφάλματα -14, -7. Ὁδηγούμενοι ἀπὸ τὸ σχ. 25, εὑρίσκομεν $x = 36$.

Παρατηρητέον, ὅτι αἱ αὐθαίρετοι τιμαί, ποὺ δίδονται εἰς τὸν x, ἐκλέγονται πάντοτε οὕτως, ὥστε κατὰ τὸν ὑπολογισμόν, ν' ἀποφεύγωνται τὰ κλάσματα.

Ὁ Abu Kamil ἤσκησεν ἀναμφιβόλως ἀξιόλογον ἐπίδρασιν ἐπὶ τῆς εὐρωπαϊκῆς ἐπιστήμης, ἀλλὰ ἀκριβολογημένην εἰκόνα τοῦ μέτρου τῆς ἐπιδράσεως ταύτης θὰ καταστῇ δυνατὸν νὰ λάβωμεν μόνον, ὅταν τὸ ἐπιστημονικόν του ἔργον γίνῃ, εἰς τὸ σύνολον αὐτοῦ γνωστόν, ἀκόμη καὶ εἰς ἐκείνους, οἱ ὁποῖοι δὲν ἔχουν τὴν δυνατότητα νὰ μελετήσουν τὰ ἔργα του εἰς τὸ πρωτότυπον.

Albategno καὶ Abu'l Wafa

146. Ἡ χρονολογικὴ σειρὰ φέρει τώρα εἰς τὸ προσκήνιον ἕνα ἀστρονόμον μεγάλης ἀξίας καὶ παγκοσμίου φήμης, τοῦ ὁποίου τὸ πλῆρες ὄνομα εἶναι : Abu' Abdallah Muhammed ibn Gabir ibn Sinan Al Battani, κοινῶς δὲ Albategno (γεννηθεὶς περὶ τὸ 858 καὶ ἀποθανὼν τὸ 929). Αἱ ἀστρονομικαὶ παρατηρήσεις του καλύπτουν τὴν μακρὰν περίοδον 878 - 919.

Εἰς τὸν Albategno ὀφείλεται ἕνα μέγα ἀστρονομικὸν ἔργον, μεταφρασθὲν εἰς τὴν λατινικὴν ὑπὸ τοῦ Πλάτωνος τοῦ ἐκ Τίβολι ἢ Τιμπουρτίνου (§ 114). Προσφάτως ἐγένετο νέα ἔκδοσις, ἀνταποκρινομένη πλήρως εἰς τὰς ἀπαιτήσεις τῆς συγχρόνου κριτικῆς. Τὸ ἔργον τοῦτο συνέβαλεν ἀποτελεσματικῶς εἰς τὴν διάδοσιν τῆς λέξεως «ἡμίτονον», ἐπὶ τῆς ἐτυμολογίας τοῦ ὁποίου διεξάγονται ἀπὸ μακροῦ χρόνου συζητήσεις εἰς οὐδὲν ἀπολήξασαι ὁριστικὸν συμπέρασμα.

Εἰς τὸ Κεφάλαιον III τοῦ ἀνωτέρω ἀστρονομικοῦ ἔργου ἐφαρμόζεται ἡ συνάρτησις τοῦ ἡμιτόνου εἰς εὐρεῖαν κλίμακα, μὲ καταφανῆ χρησιμοποίησιν ἑλληνικῶν καὶ ἰνδικῶν πηγῶν, ἀλλὰ συγχρόνως μὲ ἀρκετὴν δόσιν πρωτοτυπίας. Εἰς τὸ ἔργον τοῦτο εὑρίσκεται διὰ πρώτην φορὰν «τὸ θεώρημα τοῦ συνημιτόνου» διὰ τυχόντα σφαιρικὰ τρίγωνα, ὡς καὶ αἱ ἀκόλουθοι σχέσεις διὰ τὸ ὀρθογώνιον εἰς B σφαιρικὸν τρίγωνον ABC :

$$\eta\mu\, b = \frac{\eta\mu\, c}{\eta\mu\, C}\ ,\quad \eta\mu\, a = \frac{\varepsilon\varphi\, c}{\varepsilon\varphi\, C}\ ,\quad \sigma\upsilon\nu\, A = \frac{\varepsilon\varphi\, c}{\varepsilon\varphi\, b}\ .$$

Παρὰ ταῦτα, δὲν εἶναι ὁ Albategno ἐκεῖνος ποὺ σημειώνει τὸ ἀπόγειον τῆς ἀραβικῆς ἀστρονομίας. Οἱ ἱστορικοὶ τῆς ἐπιστήμης τοῦ οὐρανοῦ θεωροῦν, ὅτι τὸ ἀπόγειόν της ἐπισημαίνεται μὲ τὴν ἐμφάνισιν τοῦ Muhammed ibn Muhammed ibn Jahja ibn Ismail Al Abbas Abu'l Wafa, ὀνομαζομένου συνήθως μὲ τὸ συγκεκομμένον ὄνομα Abu'l Wafa*.

Ἐγεννήθη εἰς τὴν ἐπαρχίαν Nisabur, τὸν Ἰούνιον 940 ἀπὸ οἰκογένειαν πεπαιδευμένων, ἀπέθανε δὲ εἰς τὴν Βαγδάτην τὸ 997 ἢ 998. Ἀποδίδονται εἰς αὐτὸν σχόλια εἰς τὰ Στοιχεῖα καὶ εἰς ἕνα ἄλλο ἔργον τοῦ Εὐκλείδου Ἐπὶ τῆς διαιρέσεως τῶν σχημάτων, ἔτι δὲ εἰς τὸν Διόφαντον καὶ εἰς τὸν Muhammed ibn Musa. Τέλος ἰσχυρίζονται, ὅτι ἔγραψεν ἐπίσης σχόλια εἰς μίαν ἄλγεβραν (ποίαν ;) τοῦ Ἱππάρχου, τὰ ὁποῖα ἐὰν ὑφίσταντο πράγματι καὶ ἤρχοντο εἰς τὴν δημοσιότητα, θὰ ἦσαν ἀληθῶς στοιχεῖα πολύτιμα πρὸς συμπλήρωσιν τῶν ὀλίγων ἐκείνων, ποὺ γνωρίζομεν περὶ τοῦ μεγίστου Ἕλληνος ἀστρονόμου.

Ὁ Abu'l Wafa φέρεται ὡς συγγραφεὺς πολλῶν πρωτοτύπων γεωμετρικῶν ἔργων, τὰ ὁποῖα ἐν γένει εἶναι ἀκόμη ἄγνωστα εἰς τὴν Εὐρώπην. Ἐξαίρεσιν ἀποτελεῖ τὸ Βιβλίον γεωμετρικῶν κατασκευῶν, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τοὐλάχιστον μίαν ἀνασύνταξιν εἰς περσικὴν γλῶσσαν, γραφεῖσαν ὑπὸ ἑνὸς μαθητοῦ του. Μία ὁμὰς προβλημάτων λελυμένων περιλαμβάνει κατασκευὰς ἀποσκοπούσας εἰς τὴν ἀναγνώρισιν ἂν μία δοθεῖσα γωνία εἶναι ἢ ὄχι ὀρθή. Μία ἄλλη ὁμὰς διδάσκει κατασκευὰς μὲ ἕνα

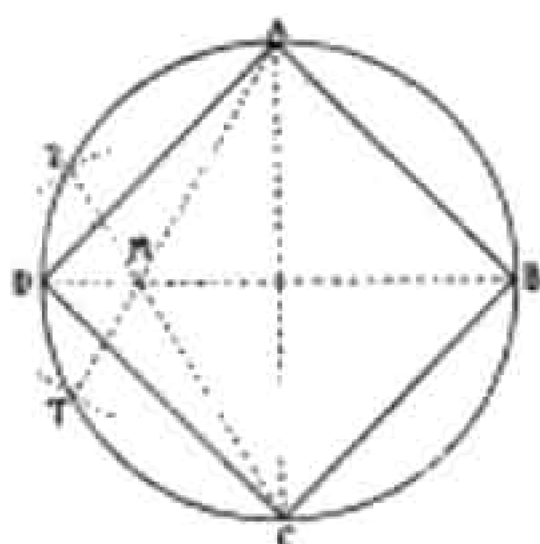
* Πρὸς ἀποφυγὴν συγχύσεων σημειοῦμεν, ὅτι διετηρήθη ἡ μνήμη καὶ ἑνὸς ἄλλου ὁμωνύμου συγγραφέως, ζήσαντος ὀλίγον πρὶν τοῦ 1570, τοῦ ὁποίου ὅμως τὸ ὄνομα συνδέεται μὲ ἕνα μέτριον ἔργον ἀριθμητικῆς.

μόνον ἄνοιγμα τοῦ διαβήτου. Μία τρίτη ὁμὰς διδάσκει τὸν προσδιορισμὸν τετραγώνων ἰσοδυνάμων πρὸς τὸ ἄθροισμα ἄλλων. Τέλος, μία ἄλλη ὁμὰς περιλαμβάνει κατασκευὰς κανονικῶν πολυέδρων ἐπὶ τῇ βάσει ἰδεῶν προσεγγιζουσῶν ἐκείνας τοῦ Πάππου μᾶλλον (§ 58), παρὰ τὰς συναφεῖς τοῦ Εὐκλείδου. Πρόκειται λοιπὸν περὶ βελτιώσεων καὶ συμπληρώσεων τῆς κλασσικῆς γεωμετρίας, μὴ στερουμένων ἐνδιαφέροντος καὶ σήμερον. Τὸν ἴδιον χαρακτῆρα ἔχουν μία κατὰ προσέγγισιν κατασκευὴ τοῦ κανονικοῦ ἑπταγώνου, μία ἄλλη τοῦ ἐννεαγώνου, στηριζομένη ἐπὶ ἑνὸς τῶν Λ η μ μ ά τ ω ν τοῦ Ἀρχιμήδους καὶ τέλος δύο κατασκευαὶ «σημεῖον πρὸς σημεῖον» μιᾶς παραβολῆς.

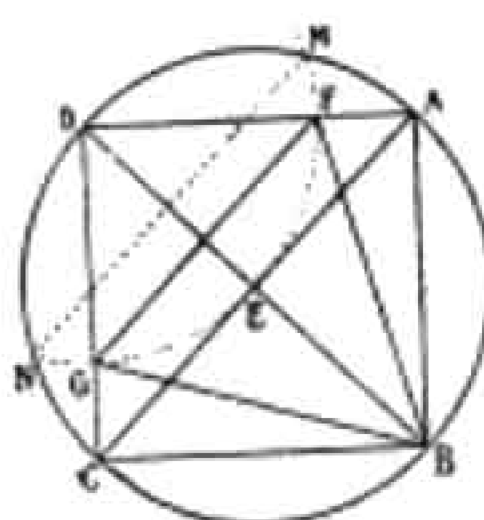
Διὰ νὰ χαρακτηρίσωμεν σαφέστερον τὸ περὶ οὗ πρόκειται ἔργον, ἀρκεῖ νὰ ἐξετάσωμεν τὰ κατωτέρω δύο προβλήματα μὲ τὰς λύσεις των.

I. «Μὲ ἕνα μόνον ἄνοιγμα τοῦ διαβήτου νὰ ἐγγραφῇ τετράγωνον εἰς κύκλον».

Λ ύ σ ι ς (σχ. 26) : Λαμβάνομεν ὡς κέντρα τὰ ἀντιδιαμετρικὰ σημεῖα A καὶ C.



Σχ. 26



Σχ. 27

Μὲ τὸ δοθὲν ἄνοιγμα τοῦ διαβήτου, προσδιορίζονται ἐπὶ τῆς περιφερείας τὰ σημεῖα T καὶ Z. Αἱ εὐθεῖαι AT, CZ τέμνονται εἰς M. Τὰ ἄκρα B, D τῆς διὰ τοῦ M διερχομένης διαμέτρου τοῦ κύκλου εἶναι αἱ δύο ἄλλαι κορυφαὶ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου.

II. «Νὰ ἐγγραφῇ ἰσόπλευρον τρίγωνον εἰς δοθὲν τετράγωνον ABCD». (σχ. 27).

Λ ύ σ ι ς : Ἔστω E τὸ κέντρον τοῦ τετραγώνου, ἄρα καὶ τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου. Μὲ κυκλικὸν τόξον (D, DE) τέμνομεν τὴν περιφέρειαν εἰς M, N. Αἱ εὐθεῖαι BM, BN τέμνουν εἰς F καὶ G τὰς πλευρὰς DA καὶ DC τοῦ τετραγώνου. Τὸ BFG εἶναι τὸ ζητούμενον τρίγωνον.

Δὲν ἔχει δοθῆ μέχρι σήμερον ὁριστικὴ ἀπάντησις εἰς τὸ ζήτημα, κατὰ πόσον ὀφείλεται πράγματι, ὡς πιστεύεται, εἰς τὸν Abu'l Wafa ἡ ἀνακάλυψις μιᾶς τῶν ἀνωμαλιῶν τῆς Σελήνης, γνωστῆς εἰς τὴν Ἀστρονομίαν μὲ τὸ ὄνομα «ἀλλαγή» (variation). Πάντες ὅμως δίδουν εἰς αὐτὸν ἐξέχουσαν θέσιν

εἰς τὴν ἱστορίαν τῆς τριγωνομετρίας, χάρις εἰς τὸ ἔργον του Almagesta, ὅπου περιέχονται μὲ μεγίστην προσέγγισιν αἱ τιμαὶ τῶν ἡμιτόνων γωνιῶν αὐξουσῶν κατ' ἀριθμητικὴν πρόοδον. Οὕτω τὸ ημ 30' δίδεται μὲ 12 δεκαδικὰ ψηφία ἀκριβῆ. Περιέχονται ἀκόμη εἰς τὸ ἔργον αὐτὸ αἱ ἀκόλουθοι θεμελιώδεις τριγωνομετρικαὶ σχέσεις :

$$\text{ημ}x = 2\text{ημ}\frac{x}{2}\text{συν}\frac{x}{2} \qquad (1)$$

$$\frac{\text{εφ}x}{r} = \frac{\text{ημ}x}{\text{συν}x} \qquad (2)$$

$$\frac{\text{σφ}x}{r} = \frac{\text{συν}x}{\text{ημ}x} \qquad (3)$$

$$\frac{\text{εφ}x}{\text{τεμ}x} = \frac{\text{ημ}x}{r} \qquad (4)$$

$$\frac{\text{εφ}x}{r} = \frac{r}{\text{σφ}\,x} \qquad (5)$$

$$\text{τεμ}\,x = \sqrt{r^2 + \text{εφ}^2 x} \qquad (6)$$

$$\text{συν}\,\text{τεμ}x = \sqrt{r^2 + \text{σφ}^2 x} \qquad (7)$$

ὅπου r παριστᾷ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου ἀναφορᾶς. Τελικῶς ὁ μέγας ἀστρονόμος παρετήρησεν ὅτι οἱ τύποι οὗτοι ὑφίστανται ἀξιόλογον ἁπλοποίησιν ἐὰν ληφθῇ $r = 1$. Παρατήρησις μεγάλης σπουδαιότητος, ἡ ὁποία ὅμως παρέμεινεν ἄγονος μέχρι τῆς ἡμέρας, κατὰ τὴν ὁποίαν ἐπανελήφθη αὐτομάτως ἀπὸ τοὺς εὐρωπαίους μαθηματικοὺς τοῦ XVIII αἰῶνος.

Εἶναι τέλος ἄξιον σημειώσεως, ὅτι ἐκθέτων ὁ Abu'l Wafa τὰ τῆς σφαιρικῆς τριγωνομετρίας, ὡρμήθη ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον, διὰ νὰ λύσῃ τὰ προβλήματα, ποὺ ἀπαντῶνται εἰς τὴν ἀστρονομίαν, χωρὶς ν' ἀνατρέξῃ εἰς τὸ θεώρημα τοῦ Μενελάου. Πρόκειται βεβαίως περὶ μιᾶς καινοτομίας ἐν σχέσει πρὸς τὴν ὁδόν, ποὺ ἐχάραξεν ὁ Πτολεμαῖος, εἶναι ὅμως ἀμφισβητήσιμον κατὰ πόσον δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς πρόοδος. Ὅτι, ἐν τούτοις, ὁ ἄραψ ἀστρονόμος ἦτο τελείως κάτοχος τῆς σφαιρικῆς τριγωνομετρίας, πιστοποιεῖται ἀπὸ τὴν ἀπόδειξιν ποὺ ἔδωσεν εἰς τὸ θεώρημα τῶν ἡμιτόνων. Πολλοὶ ἀνάγουν τὸ θεώρημα τοῦτο εἰς τὸν Ibn Nasr Mansur ibn Ali ibn Iraq, περὶ τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν, ὅτι ἀπέθανεν ὀλίγον ἔπειτα ἀπὸ τὸ 1000. Ὁ τελευταῖος ὑπῆρξε διδάσκαλος τοῦ Al Biruni, περὶ τοῦ ὁποίου ἔχομεν ἤδη ὁμιλήσει παρεμπιπτόντως (§ 133, § 141), θὰ κάμωμεν δὲ εἰδικῶς ἐκτενέστερον λόγον κατωτέρω (§ 148).

Ibn Haitam

147. Ἕνας ἄλλος Ἄραψ, ἀσχολούμενος μὲ τὰς ἐφαρμογὰς τῶν μαθηματικῶν εἰς τὴν φυσικήν, ἐξειλίχθη εἰς ἀναμφισβήτητον αὐθεντίαν εἰς τὸν τομέα τῆς Ὀπτικῆς. Ἀπὸ τὸ μέγα ἔργον του Optical Thesaurus Libris Septem (Basilae, 1622) ἤντλησαν γνώσεις καὶ ἐμπνεύσεις ἐπιστήμονες μεγάλης φήμης, ὅπως ὁ Ρογῆρος Βάκων καὶ ὁ Κέπλερος.

Ὁμιλοῦμεν δι' ἐκεῖνον, ἀπὸ τὸν ὁποῖον ἔλαβε τὸ ὄνομα τὸ γνωστότατον γεωμετρικὸν «πρόβλημα τοῦ Alhazen» [52] ἤ, ὅπως λέγεται σήμερον «τοῦ ibn Haitam», κατὰ συγκοπὴν τοῦ πλήρους ὀνόματός του: Al Hasan ibn Al Hasan ibn Al Haitam Abu Ali. Οὗτος ἐγεννήθη εἰς Basra (Βασσόραν) περὶ τὸ 965, ἀπέθανε δὲ εἰς τὸ Κάϊρον περὶ τὰ τέλη τοῦ 1039. Γενόμενος διάσημος μεταξὺ τῶν συμπατριωτῶν του ὡς εὐρυμαθέστατος, ὡς φιλόσοφος καὶ ὡς ἰατρός, μετέβη εἰς Αἴγυπτον μὲ τὴν πρόθεσιν νὰ προτείνῃ εἰς τοὺς ἁρμοδίους τὴν ἐφαρμογὴν ἰδικῆς του ἐμπνεύσεως σχεδίου πρὸς ρύθμισιν τῶν περιοδικῶν πλημμυρῶν τοῦ Νείλου. Ὁ ἡγεμὼν τοῦ τόπου, εἰς τὸν ὁποῖον ἀνεκοίνωσε προφορικῶς τὴν σοβαρωτάτην πρότασιν, ἔθεσεν εἰς τὴν διάθεσίν του ἀπεριόριστον ἠθικὴν καὶ ὑλικὴν ὑποστήριξιν. Ὅταν ὅμως ὁ Al Haitam εὑρέθη ἐνώπιον τῶν γιγαντιαίων ἀρχιτεκτονικῶν μνημείων ποὺ θαυμάζονται εἰς τὴν Αἴγυπτον καὶ ἀνεμέτρησε τὴν στάθμην, εἰς τὴν ὁποίαν εἶχε φθάσει ἡ τέχνη τῶν Αἰγυπτίων ἀπ' ἀρχαιοτάτων χρόνων, ἀνεγνώρισεν ὅτι ὑπερεξετίμησε τὰς ἰδικάς του δυνάμεις καὶ ἀποθαρρυνθεὶς ἤρχισε νὰ σκέπτεται τὸν δρόμον τῆς ἐπιστροφῆς. Προτοῦ ὅμως ἐγκαταλείψῃ τελείως τὴν ἐπιχείρησιν, ἔκαμε κάποιαν δοκιμαστικὴν προσπάθειαν πλησίον τοῦ καταρράκτου, τοῦ κειμένου νοτίως τοῦ Assuan. Μὴ δυνηθεὶς δὲ νὰ φέρῃ ἀποτέλεσμα, ἔχασε τὴν βασιλικὴν εὔνοιαν, περιέπεσεν εἰς δυσυποληψίαν καὶ παρ' ὀλίγον νὰ χάσῃ καὶ τὴν ζωήν του. Κατώρθωσε νὰ διαφύγῃ τελικῶς τὸν μαρτυρικὸν θάνατον, προσποιηθεὶς τὸν τρελλόν. Μετὰ τὸν θάνατον τοῦ αἰγυπτίου βασιλέως ἀνέκτησε τὴν ἀπολεσθεῖσαν ἐλευθερίαν του καὶ ἠδυνήθη νὰ τερματίσῃ ἡσύχως τὰς ἡμέρας του παρὰ τὰς ὄχθας τοῦ ποταμοῦ, τὸν ὁποῖον ἀπέτυχε νὰ δαμάσῃ.

Ὁ Ibn Haitam ἄφησε ποικιλίαν ἔργων — μαθηματικῶν, ἀστρονομικῶν καὶ φιλοσοφικῶν — τῶν ὁποίων ὁ ἀριθμὸς δὲν εἶναι κατώτερος τοῦ 130, τὸ μεγαλύτερον δὲ μέρος αὐτῶν εἶναι ἀκόμη ἀνέκδοτον ἢ ἦλθεν εἰς φῶς ἐν ἐπιτομῇ.

Ἐξαίρεσιν ἀποτελεῖ ἕνα ὑπόμνημα ἐπὶ τῶν καυστικῶν κατόπτρων παραβολικοῦ σχήματος, χρήσιμον εἰς ἐκείνους, οἱ ὁποῖοι ἐπιθυμοῦν ν' ἀνασυντάξουν τὴν θεωρίαν τῶν Ἀράβων ἐπὶ τῶν κωνικῶν τομῶν καὶ νὰ λάβουν πληροφορίας ἐπὶ τῶν ἐπιτευγμάτων τοῦ Ἀρχιμήδους καὶ τοῦ Διοκλέους ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ θέματος.

Τοῦ ἰδίου συγγραφέως εἶναι ἐπίσης γνωστὴ μία πραγματεία ἐπὶ τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου, ἡ ὁποία ὅμως, ὡς ἀποτελοῦσα μίαν ἀνάπλασιν παλαιῶν παρατηρήσεων ὀφειλομένων εἰς τὸν Ἱπποκράτην τὸν Χῖον (§ 25), δὲν προσθέτει τίποτε τὸ ἀξιόλογον εἰς ὅσα γνωρίζομεν ἐπὶ τοῦ περιφήμου προβλήματος καὶ μᾶλλον μειώνει παρὰ αὐξάνει τὴν φήμην τοῦ συγγραφέως.

Δύο βιβλία τοῦ ἰδίου μαθηματικοῦ Ἐπὶ τῶν δεδομένων ἐγράφησαν, ὅπως ὁμολογεῖ ὁ ἴδιος, κατ' ἔμπνευσιν τοῦ γνωστοῦ ἔργου τοῦ Εὐκλείδου (§ 38), ἐχρησιμοποίησεν ὅμως ἐπίσης τὰ Πορίσματα τοῦ ἰδίου συγγραφέως καὶ τοὺς Ἐπιπέδους τόπους τοῦ Ἀπολλωνίου, ἀποδεικνυόμενος οὕτω, ὅπως καὶ τόσοι ἄλλοι συμπατριῶται του, μαθητής, ἐὰν ὄχι συνεχιστής, τῶν μεγάλων ἑλλήνων γεωμετρῶν. Ἐπιβεβαιοῦται δὲ τοῦτο ἀκόμη ἀπὸ μερικὰς σελίδας, τὰς ὁποίας ἀφιέρωσεν εἰς ἕνα πρακτικὸν ζήτημα τῆς ὑψομετρίας, ὡς εἶναι π.χ. ἡ εὕρεσις τοῦ ὕψους οἰκοδομημάτων. Εἶναι ἐπίσης γνωσταὶ μερικαὶ λύσεις δοθεῖσαι ὑπ' αὐτοῦ εἰς τὸ πρόβλημα «νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον τοῦ ὁποίου δίδονται τὸ ἐμβαδόν, μία πλευρὰ καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων».

Μεταξὺ τῶν ἔργων τοῦ Al Haitam, ποὺ ἐγένοντο γνωστά, ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον παρουσιάζει τὴν μεγαλυτέραν πρωτοτυπίαν εἶναι ἀφιερωμένον εἰς τὸν κυβισμὸν τοῦ στερεοῦ τοῦ παραγομένου ἐκ περιστροφῆς μιᾶς παραβολῆς περὶ μίαν διάμετρόν της ἢ μίαν τεταγμένην της. Ὅλα τὰ δεδομένα ἀφήνουν τὴν ἐντύπωσιν, ὅτι καὶ αὐτὸς ἠγνόει τὸ ἀρχιμήδειον ἔργον Περὶ κωνοειδέων καὶ σφαιροειδέων, ἐνῷ ἐγνώριζε τὰς συναφεῖς ἐρεύνας τοῦ Tabit καὶ τοῦ Al Kuhi (§ 144). Εἰς τὰς ἐρεύνας του εἶχεν ὡς ὁδηγὸν τὸν Εὐκλείδη καὶ ἐπέτυχε νὰ ὑπολογίσῃ τὸ ἄθροισμα:

$$S_n = 1^n + 2^n + 3^n + \dots,$$

ὄχι μόνον διὰ τιμὰς 1, 2, 3 τοῦ ἐκθέτου, πρᾶγμα ποὺ εἶχεν ἤδη πραγματοποιηθῆ, ἀλλ' ἀκόμη διὰ $n = 4$. Τὸ κείμενον τοῦτο, ἀληθὲς κειμήλιον, μόλις πρό τινος ἐλθὸν εἰς φῶς, ζωογονεῖ τὰς ἐλπίδας ὅτι τὸ μέλλον μᾶς ἐπιφυλάσσει παρομοίας ἐκπλήξεις καὶ διδάσκει πόσον προσεκτικοὶ πρέπει νὰ εἴμεθα εἰς τὴν διατύπωσιν ἀνωρίμων κρίσεων, ὄχι μόνον διὰ τὸν Al Haitam, ἀλλὰ διὰ τὴν συμβολὴν τῶν ὀπαδῶν τοῦ Μωάμεθ γενικώτερον εἰς τὰς ἀκριβεῖς ἐπιστήμας.

Al Biruni

148. Περίπου σύγχρονος τοῦ Al Haitam εἶναι ὁ Muhammed ibn Ahmed Abu'l Rihan Al Biruni, τὸν ὁποῖον ἐμνημονεύσαμεν ἤδη μὲ τὸ συγκεκομμένον ὄνομα Al Biruni, τὸ ὁποῖον καὶ θὰ ἐξακολουθήσωμεν νὰ τοῦ

Τοῦ ἰδίου συγγραφέως εἶναι ἐπίσης γνωστὴ μία πραγματεία ἐπὶ τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου, ἡ ὁποία ὅμως, ὡς ἀποτελοῦσα μίαν ἀνάπλασιν παλαιῶν παρατηρήσεων ὀφειλομένων εἰς τὸν Ἱπποκράτην τὸν Χῖον (§ 25), δὲν προσθέτει τίποτε τὸ ἀξιόλογον εἰς ὅσα γνωρίζομεν ἐπὶ τοῦ περιφήμου προβλήματος καὶ μᾶλλον μειώνει παρὰ αὐξάνει τὴν φήμην τοῦ συγγραφέως.

Δύο βιβλία τοῦ ἰδίου μαθηματικοῦ Ἐπὶ τῶν δεδομένων ἐγράφησαν, ὅπως ὁμολογεῖ ὁ ἴδιος, κατ' ἔμπνευσιν τοῦ γνωστοῦ ἔργου τοῦ Εὐκλείδου (§ 38), ἐχρησιμοποίησεν ὅμως ἐπίσης τὰ Πορίσματα τοῦ ἰδίου συγγραφέως καὶ τοὺς Ἐπιπέδους τόπους τοῦ Ἀπολλωνίου, ἀποδεικνυόμενος οὕτω, ὅπως καὶ τόσοι ἄλλοι συμπατριῶται του, μαθητής, ἐὰν ὄχι συνεχιστής, τῶν μεγάλων ἑλλήνων γεωμετρῶν. Ἐπιβεβαιοῦται δὲ τοῦτο ἀκόμη ἀπὸ μερικὰς σελίδας, τὰς ὁποίας ἀφιέρωσεν εἰς ἕνα πρακτικὸν ζήτημα τῆς ὑψομετρίας, ὡς εἶναι π.χ. ἡ εὕρεσις τοῦ ὕψους οἰκοδομημάτων. Εἶναι ἐπίσης γνωσταὶ μερικαὶ λύσεις δοθεῖσαι ὑπ' αὐτοῦ εἰς τὸ πρόβλημα «νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον τοῦ ὁποίου δίδονται τὸ ἐμβαδόν, μία πλευρὰ καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων».

Μεταξὺ τῶν ἔργων τοῦ Al Haitam, ποὺ ἐγένοντο γνωστά, ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον παρουσιάζει τὴν μεγαλυτέραν πρωτοτυπίαν εἶναι ἀφιερωμένον εἰς τὸν κυβισμὸν τοῦ στερεοῦ τοῦ παραγομένου ἐκ περιστροφῆς μιᾶς παραβολῆς περὶ μίαν διάμετρόν της ἢ μίαν τεταγμένην της. Ὅλα τὰ δεδομένα ἀφήνουν τὴν ἐντύπωσιν, ὅτι καὶ αὐτὸς ἠγνόει τὸ ἀρχιμήδειον ἔργον Περὶ κωνοειδέων καὶ σφαιροειδέων, ἐνῷ ἐγνώριζε τὰς συναφεῖς ἐρεύνας τοῦ Tabit καὶ τοῦ Al Kuhi (§ 144). Εἰς τὰς ἐρεύνας του εἶχεν ὡς ὁδηγὸν τὸν Εὐκλείδη καὶ ἐπέτυχε νὰ ὑπολογίσῃ τὸ ἄθροισμα:

$$S_n = 1^n + 2^n + 3^n + \dots,$$

ὄχι μόνον διὰ τιμὰς 1, 2, 3 τοῦ ἐκθέτου, πρᾶγμα ποὺ εἶχεν ἤδη πραγματοποιηθῆ, ἀλλ' ἀκόμη διὰ n = 4. Τὸ κείμενον τοῦτο, ἀληθὲς κειμήλιον, μόλις πρό τινος ἐλθὸν εἰς φῶς, ζωογονεῖ τὰς ἐλπίδας ὅτι τὸ μέλλον μᾶς ἐπιφυλάσσει παρομοίας ἐκπλήξεις καὶ διδάσκει πόσον προσεκτικοὶ πρέπει νὰ εἴμεθα εἰς τὴν διατύπωσιν ἀνωρίμων κρίσεων, ὄχι μόνον διὰ τὸν Al Haitam, ἀλλὰ διὰ τὴν συμβολὴν τῶν ὀπαδῶν τοῦ Μωάμεθ γενικώτερον εἰς τὰς ἀκριβεῖς ἐπιστήμας.

Al Biruni

148. Περίπου σύγχρονος τοῦ Al Haitam εἶναι ὁ Muhammed ibn Ahmed Abu'l Rihan Al Biruni, τὸν ὁποῖον ἐμνημονεύσαμεν ἤδη μὲ τὸ συγκεκομμένον ὄνομα Al Biruni, τὸ ὁποῖον καὶ θὰ ἐξακολουθήσωμεν νὰ τοῦ

ἀποδίδωμεν. Ἐγεννήθη εἰς Khowarezm (Khiwa) τὸ 973 καὶ ἀπέθανεν εἰς Gazna (Afganistan) τὸ 1048.

Εἰς τὸν Al Biruni ἀποδίδονται πολλὰ φιλοσοφικὰ καὶ ἱστορικὰ ἔργα, ταξιδιωτικαὶ ἐντυπώσεις καὶ περιγραφαὶ (ἂν καὶ εἰς αὐτὰς εὑρίσκεται ἀκόμη ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ ἀθροίσματος τῶν 64 ὅρων γεωμετρικῆς προόδου μὲ πρῶτον ὅρον 1 καὶ λόγον 2), περιγραφαὶ ἀστρονομικῶν ὀργάνων τῆς ἐποχῆς του, ὡς καὶ ἕνα ὑπόμνημα ἐπὶ μιᾶς εἰδικῆς μεθόδου ἀπεικονίσεως σφαίρας ἐπὶ ἐπιπέδου. Δὲν ὀφείλει ὅμως εἰς αὐτὰ τὴν θέσιν του εἰς τὴν ἱστορίαν τῶν μαθηματικῶν, ἀλλὰ εἰς μίαν ἐργασίαν του ἐπὶ τοῦ ὑπολογισμοῦ τῶν χορδῶν κύκλου, ἡ ὁποία ἀπέβλεπεν εἰς τὴν ἔκθεσιν ὅλων τῶν ἱκανῶν καὶ ἀναγκαίων προτάσεων διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῶν χορδῶν.

Ἡ χρησιμοποίησις χορδῶν ἀντὶ ἡμιτόνων, ἡ ὁποία φαίνεται ὡς σύμπτωμα ἐπιστροφῆς εἰς τὴν ἀρχαιότητα, ὡς καὶ πολυάριθμοι προτάσεις καὶ ἀποδείξεις, τὰς ὁποίας παρέλαβεν ὁ Al Biruni ἀπὸ ἔργα (ἀπολεσθέντα) τοῦ Ἀπολλωνίου καὶ τοῦ Ἀρχιμήδους, ἀποδεικνύουν ὅτι ὁ ἄραψ μαθηματικὸς ἤντλησεν ἀφθόνως ἀπὸ τοὺς Ἕλληνας κλασσικούς, ἀλλὰ καὶ ἀπὸ ἄραβας συγγραφεῖς, τοὺς ὁποίους ἐντιμότατα ἀναφέρει.

Ἐκ τῶν λεγομένων του προκύπτει, ὅτι εἰς τὴν ἐποχήν του ὑφίσταντο ἀκόμη τὰ Στοιχεῖα Γεωμετρίας τοῦ Μενελάου, τὰ ὁποῖα εἶχεν ὑπ' ὄψιν ὁ Πρόκλος, ὅταν ἔγραφε τὰ σχόλιά του ἐπὶ τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου. Εἶναι ἐπίσης ἀξιοσημείωτον, ὅτι ἀποδεικνύει κατὰ πρωτότυπον τρόπον, τὸν ὁποῖον ὁ ἴδιος ἀποδίδει εἰς τὸν Ἀρχιμήδη, τὴν ἔκφρασιν τοῦ ἐμβαδοῦ τριγώνου συναρτήσει τῶν πλευρῶν, τὴν ὁποίαν εἴδομεν διὰ πρώτην φορὰν εἰς ἔργον τοῦ Ἥρωνος χωρὶς—πρέπει νὰ σημειώσωμεν—τὴν παραμικρὰν μνείαν τοῦ Ἀρχιμήδους.

Ἐπὶ πλέον ὁ Al Biruni ἀποδεικνύει (χωρὶς νὰ διεκδικῇ τὴν ἀνακάλυψιν) τὸν ἀνάλογον τύπον διὰ τὸ τετράπλευρον μὲ τὴν ρητὴν δήλωσιν, ὅτι ὁ τύπος εἶναι ἐφαρμόσιμος ἀποκλειστικῶς εἰς τετράπλευρα ἐγγράψιμα εἰς κύκλον, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον φαίνεται νὰ ἠγνόουν οἱ Ἰνδοὶ κατὰ τὴν ἐφαρμογὴν τοῦ ἰδίου τύπου. Ἐὰν τώρα λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὸ γεγονὸς ὅτι ὁ Ἀρχιμήδης εἰς τὸ ὑπ' ἀριθμὸν 12 τῶν Λημμάτων[20] του ἀναφέρει προηγούμενον ἔργον του Περὶ τετραπλεύρων, τοῦ ὁποίου οὐδὲν ἴχνος διεσώθη, γεννᾶται αὐτομάτως ἡ ὑπόθεσις ὅτι εἰς τὸ ἔργον ἐκεῖνο περιελαμβάνετο ὁ τύπος τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ἐγγραψίμου τετραπλεύρου καὶ κατὰ μερικὴν περίπτωσιν ὁ ἀνάλογος τύπος διὰ τὸ τρίγωνον.

Ἐπιστρέφομεν εἰς τὸν Al Biruni, διὰ νὰ σημειώσωμεν, ὅτι εἰς τὸ ἀνωτέρω ἔργον του ἀναφέρει μερικὰς θεωρίας, τὰς ὁποίας χωρὶς ἀμφιβολίαν ἐμπνέεται ἀπὸ τὸν Brahmagupta, σχετικῶς πρὸς τὸ σχῆμα, ποὺ ἀποτελοῦν δύο περιφέρειαι, ὁμοῦ θεωρούμεναι καὶ ἐκθέτει ἐν συνεχείᾳ μερικοὺς ὑπολο-

γισμοὺς ἐπὶ τοῦ κανονικοῦ πενταγώνου καὶ δεκαγώνου, ἀντλῶν ἐξ ἄλλης γνωστῆς μας πηγῆς, ὀφειλομένης εἰς τὸν Abu Kamil (§145).

Διὰ νὰ λάβωμεν καλυτέραν ἰδέαν περὶ τῶν τριγωνομετρικῶν γνώσεων τοῦ Al Biruni πρέπει ν' ἀνατρέξωμεν εἰς ἕνα ἐγχειρίδιον ἀστρονομικῆς γεωγραφίας Al Quanum Al Masudi, διότι μερικὰ κεφάλαια τοῦ βιβλίου τούτου ἔχουν ληφθῆ ἀκριβῶς ἀπὸ ἕνα ἔργον τοῦ Al Biruni. Εἰς τὸ πρῶτον κεφάλαιον ὑπολογίζονται αἱ πλευραὶ τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς κύκλον κανονικῶν πολυγώνων μὲ 3, 4, 5, 6, 8 ἢ 10 πλευράς. Τὰ ἐξαγόμενα ἀποκαλεῖ ὁ συγγραφεὺς «μάννες», εἰς δήλωσιν τῆς σπουδαιότητός των (ὅπως λέγομεν σήμερον «θεμελιώδεις»).

Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς πλευρᾶς τοῦ κανονικοῦ ἑπταγώνου καταφεύγει εἰς τὸ θεώρημα, τὸ ὁποῖον περιέχεται εἰς ἀπολεσθὲν ἔργον τοῦ Ἀρχιμήδους «Περὶ τοῦ κύκλου» καὶ τὸ ὁποῖον ἐμνημονεύσαμεν ἤδη (§ 41). Διὰ νὰ γενικεύσῃ κατόπιν τοὺς «θεμελιώδεις» τύπους, ὁ Al Biruni ἀποκαθιστᾷ μερικὰς σχέσεις γενικῆς φύσεως, αἱ ὁποῖαι ἰσοδυναμοῦν μὲ τοὺς ἰδικούς μας τύπους διπλασιασμοῦ καὶ διχοτομήσεως τῶν τόξων καὶ συμφωνοῦν μὲ ὅσα γνωρίζομεν ἀπὸ τὴν Ἀλμαγέσταν τοῦ Πτολεμαίου.

Μεγαλυτέραν ἴσως πρωτοτυπίαν παρουσιάζει τὸ ἑπόμενον κεφάλαιον, σκοπὸς τοῦ ὁποίου εἶναι ὁ προσδιορισμὸς τῆς πλευρᾶς τοῦ κανονικοῦ ἐνneαγώνου συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου. Εἶναι λίαν ἀξιοσημείωτον τὸ γεγονὸς ὅτι ἡ ἔρευνα τοῦ ζητήματος ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν τῆς ἐξισώσεως:

$$x^3 = 1 + 3x,$$

τῆς ὁποίας ἡ ρίζα ἐκφράζεται, ὡς βεβαιώνει ὁ συγγραφεύς, μὲ ἑξηκονταδικὰ κλάσματα, ὡς ἑξῆς:

$$1 \cdot 52^{I} \cdot 45^{II} \cdot 47^{III} \cdot 13^{IV}.$$

Ἐπειδὴ δὲν γίνεται λόγος περὶ τοῦ τρόπου, μὲ τὸν ὁποῖον κατέληξεν ὁ συγγραφεὺς εἰς αὐτὸ τὸ ἀποτέλεσμα, εἶναι φανερὸν ὅτι ἐπρόκειτο περὶ τῆς ἐφαρμογῆς κάποιας μεθόδου, εὑρισκομένης εἰς κοινὴν χρῆσιν κατὰ τὴν ἐποχὴν ἐκείνην, ἀλλὰ τὴν ὁποίαν ἀγνοοῦμεν σήμερον. Ἡ ἀνωτέρω τιμή, ἐκφραζομένη μὲ δεκαδικὰ ψηφία, γράφεται: 1, 8798352468. Ἡ τιμὴ αὕτη συμπίπτει, κατὰ τὰ 7 πρῶτα ψηφία της, μὲ ἐκείνην τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν ἐφαρμόζοντες τὴν μέθοδον Horner.

Ἀκολουθοῦν οἱ προσδιορισμοὶ τῶν χορδῶν ἄλλων ἀξιοσημειώτων τόξων, οἱ ὁποῖοι τελικῶς ὁδηγοῦν εἰς τὸν προσδιορισμὸν τῆς χορδῆς τόξου μιᾶς μοίρας. Εἰς τὸ Κεφάλαιον V γίνεται χρῆσις ἑνὸς νέου τρόπου διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ π, ὁ ὁποῖος ἀπολήγει εἰς τὴν ἀκόλουθον τιμήν, ἐκπεφρασμένην πάλιν εἰς ἑξηκονταδικὰ κλάσματα:

$$\pi = 3 \cdot 8^{I} \cdot 30^{II} \cdot 17^{III} \cdot 16^{IV} \cdot 46^{V} \cdot 30^{VI}.$$

Ἡ ἰσοδύναμος δεκαδικὴ ἔκφρασις παρουσιάζει τρία μόνον δεκαδικὰ ψηφία ἀκριβῆ. Ἀκολουθοῦν πίνακες καὶ ἄλλαι ἔρευναι, αἱ ὁποῖαι καθιστοῦν φανερὰν τὴν σταθερὰν προσπάθειαν τοῦ συγγραφέως νὰ ἐπιτύχῃ μεγάλην ἀκρίβειαν, διὰ νὰ ἐπωφεληθῇ ταύτης εἰς ἀστρονομικὰς μελέτας.

Εἰς τὰ δύο τελευταῖα κεφάλαια εὑρίσκεται ἡ ἐφαρμογὴ τοῦ θεωρήματος τοῦ Μενελάου εἰς τὴν ἐξαγωγὴν τῶν σχέσεων, αἱ ὁποῖαι συνδέουν μεταξύ των τὰ στοιχεῖα ἑνὸς σφαιρικοῦ τριγώνου. Εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο ὁ Al Biruni, περισσότερον παρὰ ὁπουδήποτε ἀλλοῦ, ἀποκαλύπτεται πιστὸς μαθητὴς τοῦ Πτολεμαίου*.

Θὰ ἦτο, τέλος, ἀδικία ἔναντι τοῦ Al Biruni, ν' ἀντιπαρέλθωμεν σιωπηρῶς μίαν ἄλλην ἀξιέπαινον ὑπηρεσίαν του πρὸς τὴν μαθηματικὴν ἐπιστήμην, ὅτι δηλαδὴ παρώτρυνε καὶ ἄλλους ν' ἀσχοληθοῦν μὲ αὐτήν. Καρπὸς δὲ τῶν παροτρύνσεών του εἶναι ἕνα κείμενον, εἰς τὸ ὁποῖον ὁ μαθητής του Muhammed ibn Al Leit Abu'l Gud, πραγματεύεται γεωμετρικὰ ζητήματα, χαρακτηριζόμενα ὡς ἀνώτερα, διότι δὲν δύνανται νὰ λυθοῦν μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου.

Ibn Sina καὶ Al Nasawi

149. Εἰς τὴν ἰδίαν ἐποχὴν ἀνήκει ὁ Al Hosein ibn Abdallah ibn Al Husain ibn Ali as — Saich ar Rais ibn Sina, ὑπὸ τὸ πολυπλοκώτατον ὄνομα τοῦ ὁποίου, μετὰ δυσκολίας θ' ἀναγνωρίσῃ ὁ ἀναγνώστης τὸν διάσημον Avicenna, τὸν ὁποῖον μνημονεύει ὁ Δάντης (Κόλασις, IV, 143) μεταξὺ ἐκείνων, οἱ ὁποῖοι « δὲν ἡμάρτησαν», ἀλλὰ «δὲν ἐδέχθησαν τὸ βάπτισμα», ὡς ἕνα ἀπὸ τὰ μεγαλύτερα πνεύματα ποὺ ἔζησαν μέχρι τῆς ἐποχῆς του.

Γεννηθεὶς εἰς Safer, πλησίον τῆς Buhara, τὴν 16ην Αὐγούστου 980, ἔμαθε καὶ ἐθαύμασεν ἀπὸ τῆς παιδικῆς του ἡλικίας τὰς λογιστικὰς μεθόδους τῶν Ἰνδῶν, ἐσπούδασεν εἰς νεαρὰν ἡλικίαν τὸ σύνολον τῶν μαθηματικῶν γνώσεων τῆς ἐποχῆς του, ἐπεχείρησε μακρὰ ταξίδια εἰς τὴν Ἀνατολὴν καὶ ἀπέθανεν εἰς Hamadan (ἢ εἰς τὸ Ispahan) τὴν 18ην Ἰουνίου 1037, κατάφορτος ἀπὸ τοιαύτην δόξαν, ὥστε ἕνας σύγχρονός του ποιητὴς δὲν ἐδίστασε νὰ δηλώσῃ, ὅτι εἰς ὅλα τὰ πεδία τῆς γνώσεως, εἰς τὰ ὁποῖα κατέγινεν, ἠδυνήθη νὰ προσθέσῃ κάποιαν ἰδικήν του ἀνακάλυψιν.

Τὸ μεγαλύτερον μέρος τῶν ἔργων του εὑρίσκεται εἰς μίαν τεραστίαν ἐγκυκλοπαιδείαν, τῆς ὁποίας ὁ τίτλος εἶναι Ἡ ἀπελευθέρωσις (τουτέστι «τῆς ψυχῆς ἀπὸ τὰ δεσμὰ τῆς ἀγνοίας»). Τέσσαρα μέρη τοῦ

* Εἶναι ἄξιον σημειώσεως, ἔστω καὶ παρεμπιπτόντως, ὅτι ἂν ἐπιθυμῇ ὁ ἀναγνώστης πλήρη κατάλογον τῆς τριγωνομετρικῆς βιβλιογραφίας τῶν Ἀράβων, δὲν πρέπει ν' ἀμελήσῃ τὴν μελέτην τῶν ὅσων ἔγραψε σχετικῶς ὁ διάσημος ἀστρονόμος τοῦ Χ αἰῶνος Ibn Yunis (Duhem, Le système du monde, τόμος II, Paris, 1914, σελ. 210).

Ἡ ἰσοδύναμος δεκαδικὴ ἔκφρασις παρουσιάζει τρία μόνον δεκαδικὰ ψηφία ἀκριβῆ. Ἀκολουθοῦν πίνακες καὶ ἄλλαι ἔρευναι, αἱ ὁποῖαι καθιστοῦν φανερὰν τὴν σταθερὰν προσπάθειαν τοῦ συγγραφέως νὰ ἐπιτύχῃ μεγάλην ἀκρίβειαν, διὰ νὰ ἐπωφεληθῇ ταύτης εἰς ἀστρονομικὰς μελέτας.

Εἰς τὰ δύο τελευταῖα κεφάλαια εὑρίσκεται ἡ ἐφαρμογὴ τοῦ θεωρήματος τοῦ Μενελάου εἰς τὴν ἐξαγωγὴν τῶν σχέσεων, αἱ ὁποῖαι συνδέουν μεταξύ των τὰ στοιχεῖα ἑνὸς σφαιρικοῦ τριγώνου. Εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο ὁ Al Biruni, περισσότερον παρὰ ὁπουδήποτε ἀλλοῦ, ἀποκαλύπτεται πιστὸς μαθητὴς τοῦ Πτολεμαίου*.

Θὰ ἦτο, τέλος, ἀδικία ἔναντι τοῦ Al Biruni, ν' ἀντιπαρέλθωμεν σιωπηρῶς μίαν ἄλλην ἀξιέπαινον ὑπηρεσίαν του πρὸς τὴν μαθηματικὴν ἐπιστήμην, ὅτι δηλαδὴ παρώτρυνε καὶ ἄλλους ν' ἀσχοληθοῦν μὲ αὐτήν. Καρπὸς δὲ τῶν παροτρύνσεών του εἶναι ἕνα κείμενον, εἰς τὸ ὁποῖον ὁ μαθητής του Muhammed ibn Al Leit Abu'l Gud, πραγματεύεται γεωμετρικὰ ζητήματα, χαρακτηριζόμενα ὡς ἀνώτερα, διότι δὲν δύνανται νὰ λυθοῦν μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου.

Ibn Sina καὶ Al Nasawi

149. Εἰς τὴν ἰδίαν ἐποχὴν ἀνήκει ὁ Al Hosein ibn Abdallah ibn Al Husain ibn Ali as — Saich ar Rais ibn Sina, ὑπὸ τὸ πολυπλοκώτατον ὄνομα τοῦ ὁποίου, μετὰ δυσκολίας θ' ἀναγνωρίσῃ ὁ ἀναγνώστης τὸν διάσημον Avicenna, τὸν ὁποῖον μνημονεύει ὁ Δάντης (Κόλασις, IV, 143) μεταξὺ ἐκείνων, οἱ ὁποῖοι « δὲν ἡμάρτησαν», ἀλλὰ «δὲν ἐδέχθησαν τὸ βάπτισμα», ὡς ἕνα ἀπὸ τὰ μεγαλύτερα πνεύματα ποὺ ἔζησαν μέχρι τῆς ἐποχῆς του.

Γεννηθεὶς εἰς Safer, πλησίον τῆς Buhara, τὴν 16ην Αὐγούστου 980, ἔμαθε καὶ ἐθαύμασεν ἀπὸ τῆς παιδικῆς του ἡλικίας τὰς λογιστικὰς μεθόδους τῶν Ἰνδῶν, ἐσπούδασεν εἰς νεαρὰν ἡλικίαν τὸ σύνολον τῶν μαθηματικῶν γνώσεων τῆς ἐποχῆς του, ἐπεχείρησε μακρὰ ταξίδια εἰς τὴν Ἀνατολὴν καὶ ἀπέθανεν εἰς Hamadan (ἢ εἰς τὸ Ispahan) τὴν 18ην Ἰουνίου 1037, κατάφορτος ἀπὸ τοιαύτην δόξαν, ὥστε ἕνας σύγχρονός του ποιητὴς δὲν ἐδίστασε νὰ δηλώσῃ, ὅτι εἰς ὅλα τὰ πεδία τῆς γνώσεως, εἰς τὰ ὁποῖα κατέγινεν, ἠδυνήθη νὰ προσθέσῃ κάποιαν ἰδικήν του ἀνακάλυψιν.

Τὸ μεγαλύτερον μέρος τῶν ἔργων του εὑρίσκεται εἰς μίαν τεραστίαν ἐγκυκλοπαιδείαν, τῆς ὁποίας ὁ τίτλος εἶναι Ἡ ἀπελευθέρωσις (τουτέστι «τῆς ψυχῆς ἀπὸ τὰ δεσμὰ τῆς ἀγνοίας»). Τέσσαρα μέρη τοῦ

* Εἶναι ἄξιον σημειώσεως, ἔστω καὶ παρεμπιπτόντως, ὅτι ἂν ἐπιθυμῇ ὁ ἀναγνώστης πλήρη κατάλογον τῆς τριγωνομετρικῆς βιβλιογραφίας τῶν Ἀράβων, δὲν πρέπει ν' ἀμελήσῃ τὴν μελέτην τῶν ὅσων ἔγραψε σχετικῶς ὁ διάσημος ἀστρονόμος τοῦ Χ αἰῶνος Ibn Yunis (Duhem, Le système du monde, τόμος II, Paris, 1914, σελ. 210).

ἔργου πραγματεύονται τὴν τετράοδον (Γεωμετρία, Ἀστρονομία, Ἀριθμητική, Μουσική). Τὸ μέρος τὸ σχετικὸν μὲ τὴν ἐπιστήμην τοῦ διαστήματος εἶναι ἕνα Ὑ π ό μ ν η μ α ἢ καλύτερα μία Σ ύ ν ο ψ ι ς τῶν «Σ τ ο ι χ ε ί ω ν» τοῦ Εὐκλείδου, τὸ ὁποῖον δὲν δύναται νὰ θεωρηθῇ ἀνώτερον τῶν παρομοίων κειμένων, τὰ ὁποῖα οἱ ἀνατολικοὶ μαθηματικοὶ ἀφιέρωσαν εἰς τὸν μέγαν γεωμέτρην τῆς Ἀλεξανδρείας.

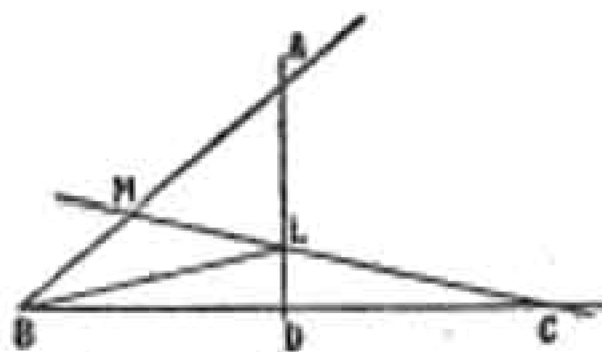
Ἀντιθέτως τὸ ἀριθμητικὸν μέρος φαίνεται, ὅτι ἀποτελεῖ μίαν ἀναδιάρθρωσιν τῆς ὕλης τοῦ ἔργου τοῦ Νικομάχου (§ 86), ἂν καὶ τὸ ὄνομα τοῦ τελευταίου δὲν ἀναφέρεται. Εὑρίσκεται ὅμως ἐκεῖ ἕνα ἀπόσπασμα μὲ καταφανῆ ἰνδικὴν προέλευσιν, διότι ἀφορᾷ τὴν ἐφαρμογὴν τῆς δοκιμῆς τοῦ 9 εἰς τὴν ὕψωσιν ἑνὸς ἀκεραίου ἀριθμοῦ εἰς τὸ τετράγωνον ἢ εἰς τὸν κύβον. Δύο συντάξεις, μὴ τελείως συμπίπτουσαι ὡς πρὸς τὴν μορφήν, ἐδόθησαν τοῦ χωρίου τούτου εἰς τὴν δημοσιότητα καὶ εἰς γαλλικὴν γλῶσσαν ὑπὸ τοῦ **Montferrier** (Dictionnaire des sciences mathématiques, τόμος I, Paris, 1843, σελ. 141) καὶ τοῦ **Woepcke** (Journal Asiatique, σειρὰ VI, τόμος I, 1863, σελ. 502 καὶ 504). Ἀξίζει τὸν κόπον ν' ἀναφέρωμεν ἐδῶ συνοπτικῶς τὸ περιεχόμενον: «ἐὰν ἕνας ἀριθμός, διαιρούμενος διὰ τοῦ 9 δίδῃ ὑπόλοιπον 1 ἢ 8, τὸ τετράγωνόν του διαιρούμενον διὰ τοῦ 9 θὰ δώσῃ ὑπόλοιπον 1, ἐὰν δίδῃ ὑπόλοιπον 2 ἢ 7 τὸ τετράγωνον θὰ δώσῃ ὑπόλοιπον 4, ἐὰν δίδῃ ὑπόλοιπον 4 ἢ 5 τὸ τετράγωνον θὰ δώσῃ ὑπόλοιπον 7, τέλος ἐὰν δίδῃ ὑπόλοιπον 3, 6 ἢ 9, τὸ τετράγωνον θὰ δώσῃ ὑπόλοιπον 9. Ἐὰν τώρα ἕνας ἀριθμὸς διαιρούμενος διὰ 9 δίδῃ ὑπόλοιπον 1, 4 ἢ 7, ὁ κύβος του διὰ τοῦ 9 πάλιν διαιρούμενος δίδει ὑπόλοιπον 1, ἐὰν δίδῃ 2, 5 ἢ 8, ὁ κύβος θὰ δώσῃ 8, ἐὰν δίδῃ 3, ἢ 9, ὁ κύβος θὰ δώσῃ ὑπόλοιπον 9».

Ἡ ἐποχή, κατὰ τὴν ὁποίαν ἔζησεν ὁ Ali ibn Ahmed Abu'l Hasan al Nasawi, εἰκάζεται ἐκ τοῦ γεγονότος ὅτι ἔγραψεν (εἰς τὴν περσικὴν) μίαν Ἔ κ θ ε σ ι ν τ ο ῦ ἀ ρ ι θ μ η τ ι κ ο ῦ λ ο γ ι σ μ ο ῦ μ ὲ ἰ ν δ ι κ ὰ ψ η φ ί α κατὰ τὴν χρονικὴν περίοδον 997 - 1029. Ἡ ἔκθεσις μετεφράσθη εἰς τὴν ἀραβικὴν τὸ 1030. Ἀργότερα τὴν ὑπέβαλεν εἰς ἀναθεώρησιν «καὶ μάλιστα ἐκ θεμελίων», ὑπῆρξε δὲ τόσον εὐχαριστημένος ἀπὸ τὸ τελικὸν ἀποτέλεσμα, ὥστε ἐπιτλοφόρησε τὸ ἀναθεωρηθὲν ἔργον Ἱ κ α ν ο π ο ι η τ ι κ ὴ Π ρ α γ μ α τ ε ί α.

Εἰς αὐτὸν ὀφείλεται ἐπίσης μία νέα μέθοδος πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος τῆς τριχοτομήσεως τῆς γωνίας, τὴν ὁποίαν θεωροῦμεν σκόπιμον ν' ἀναφέρωμεν. Ἔστω ABC (σχ. 28) ἡ δοθεῖσα γωνία. Ἄγεται ἡ AD κάθετος ἐπὶ τὴν BC καὶ λαμβάνεται DC = BD. Φέρομεν κατόπιν διὰ τοῦ C διατέμνουσαν CLM τοιαύτην ὥστε BM = ML. Ἡ εὐθεῖα BL θὰ χωρίσῃ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν εἰς δύο μέρη, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἕνα διπλάσιον τοῦ ἄλλου.

Ἂν καὶ ὅσα ἔχομεν ἀναφέρει περὶ τῆς καθαρᾶς γεωμετρικῆς παρα-

γωγῆς τῶν Ἀράβων ἀναφέρονται κατὰ μέγιστον μέρος εἰς τὴν στοιχειώδη γεωμετρίαν, δὲν πρέπει νὰ πιστεύσωμεν ὅτι ὁ λαὸς αὐτὸς ἔδειξεν ἀδιαφορίαν πρὸς τὰς ἀνωτέρας περιοχὰς τῆς ἐπιστήμης τοῦ χώρου. Ἔστρεψαν πράγματι τὴν προσοχήν των πρὸς τὴν θεωρίαν τῶν κωνικῶν τομῶν, ἔστω καὶ ἂν παρεκινήθησαν ἀπὸ τὰς ἐφαρμογὰς τούτων εἰς τὴν κατασκευὴν τῶν ἡλιακῶν ὡρολογίων (γνωμονικήν). Ἀποδεικνύεται δὲ τοῦτο ἀπὸ τρία ὑπομνήματα ἀφιερωμένα εἰς τὴν θεωρίαν καὶ τὴν κατασκευὴν ἑνὸς ὀργάνου προωρισμένου νὰ χαράσσῃ τὰς κωνικὰς τομὰς διὰ συνεχοῦς κινήσεως. Οἱ συγγραφεῖς τῶν τριῶν ὑπομνημάτων ἀνήκουν οἱ μὲν δύο εἰς τὸν γονιμώτατον X αἰῶνα, ὁ δὲ τρίτος εἰς τὸν XII αἰῶνα. Ὁ λόγιος ὁ ἐπιμεληθεὶς τῆς δημοσιεύσεώς των ἔγραψε τὰ ὀνόματά των ὡς ἑξῆς :



Σχ. 28

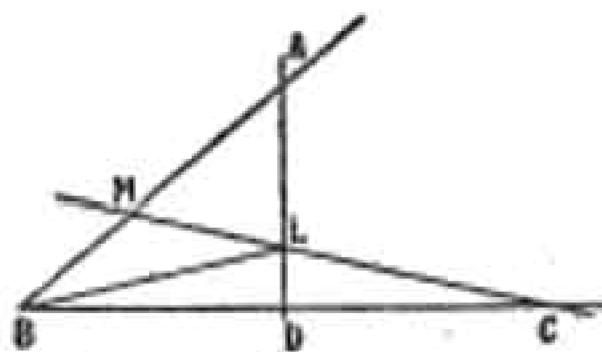
— Mohammed ibn el Hosein (§ 153),
— Abou Sohl Pouidjon ibn Queston el Kohui,
— Ahmed ibn Mohammed ibn Abd el - Djehl Sidji.

Ἐξ ὅσων ἀναφέρουν, δὲν προκύπτει σαφῶς κατὰ πόσον «οἱ ἀρχαῖοι», εἰς τοὺς ὁποίους ἀποδίδουν τὴν ἐφεύρεσιν τοῦ οὕτω καλουμένου «τελείου διαβήτου», ἦσαν Ἕλληνες ἢ Ἄραβες. Ἐκεῖνο εἰς τὸ ὁποῖον ἡμεῖς ἀποδίδομεν σημασίαν εἶναι, ὅτι οἱ τρεῖς συγγραφεῖς, ἐκτὸς μιᾶς λεπτομερειακῆς περιγραφῆς τοῦ ὀργάνου, ἐξέθεσαν καὶ μερικὰς ἰδιότητας τῶν κωνικῶν τομῶν, ἐκ τῶν ὁποίων καταφαίνεται ἡ μεγάλη οἰκειότης των μὲ τὰς ἐν λόγῳ καμπύλας.

Κατὰ τὸν XI αἰῶνα

150. Συμβαίνει εἰς ὅλους τοὺς λαοὺς ν' ἀπαντῶνται πρόσωπα ἀνεξάρτητα, τὰ ὁποῖα ἀρνοῦνται ν' ἀκολουθήσουν τὴν κατεύθυνσιν τοῦ ἐπικρατοῦντος ρεύματος καὶ καταγίνονται, ἂν ὄχι μὲ τὴν διάδοσιν καὶ ἐπιβολὴν ἀπόψεων ἐντελῶς πρωτοτύπων, μὲ τὴν τιμητικὴν ἐπαναφορὰν μεθόδων καὶ συγγραφέων, ἀδίκως καὶ παραλόγως λησμονηθέντων. Εἴδομεν π.χ. εἰς τοὺς Ἕλληνας τὸν Δομνῖνον τὸν Λαρισαῖον (§ 88) νὰ καταπολεμῇ τὰς ἐκφυλισμένας μεθόδους τῶν ἀνακαινιστῶν τῆς πυθαγορείου καὶ πλατωνικῆς διδασκαλίας, χάριν τῆς ἐπικρατήσεως τῆς αὐστηρᾶς λογικῆς, κατὰ τὸ εὐκλείδειον ὑπόδειγμα. Ἀνάλογον ρόλον ἐπωμίσθη ὁ Muhammed ibn Al Hasan abu Bokr Al Karchi, κοινῶς Alkarchi, ὁ ὁποῖος ἀπέθανε τὸ 1029, καταλιπὼν φήμην ἐξαιρέτου μαθηματικοῦ. Ἡ ἀξία του δύναται νὰ ἐκτιμηθῇ ἀπὸ δύο ἔργα του, προσιτὰ ἀκόμη καὶ εἰς τοὺς ἀγνοοῦντας τὴν

γωγῆς τῶν Ἀράβων ἀναφέρονται κατὰ μέγιστον μέρος εἰς τὴν στοιχειώδη γεωμετρίαν, δὲν πρέπει νὰ πιστεύσωμεν ὅτι ὁ λαὸς αὐτὸς ἔδειξεν ἀδιαφορίαν πρὸς τὰς ἀνωτέρας περιοχὰς τῆς ἐπιστήμης τοῦ χώρου. Ἔστρεψαν πράγματι τὴν προσοχήν των πρὸς τὴν θεωρίαν τῶν κωνικῶν τομῶν, ἔστω καὶ ἂν παρεκινήθησαν ἀπὸ τὰς ἐφαρμογὰς τούτων εἰς τὴν κατασκευὴν τῶν ἡλιακῶν ὡρολογίων (γνωμονικήν). Ἀποδεικνύεται δὲ τοῦτο ἀπὸ τρία ὑπομνήματα ἀφιερωμένα εἰς τὴν θεωρίαν καὶ τὴν κατασκευὴν ἑνὸς ὀργάνου προωρισμένου νὰ χαράσσῃ τὰς κωνικὰς τομὰς διὰ συνεχοῦς κινήσεως. Οἱ συγγραφεῖς τῶν τριῶν ὑπομνημάτων ἀνήκουν οἱ μὲν δύο εἰς τὸν γονιμώτατον X αἰῶνα, ὁ δὲ τρίτος εἰς τὸν XII αἰῶνα. Ὁ λόγιος ὁ ἐπιμεληθεὶς τῆς δημοσιεύσεώς των ἔγραψε τὰ ὀνόματά των ὡς ἑξῆς:



Σχ. 28

— Mohammed ibn el Hosein (§ 153),
— Abou Sohl Pouidjon ibn Queston el Kohui,
— Ahmed ibn Mohammed ibn Abd el - Djehl Sidji.

Ἐξ ὅσων ἀναφέρουν, δὲν προκύπτει σαφῶς κατὰ πόσον «οἱ ἀρχαῖοι», εἰς τοὺς ὁποίους ἀποδίδουν τὴν ἐφεύρεσιν τοῦ οὕτω καλουμένου «τελείου διαβήτου», ἦσαν Ἕλληνες ἢ Ἄραβες. Ἐκεῖνο εἰς τὸ ὁποῖον ἡμεῖς ἀποδίδομεν σημασίαν εἶναι, ὅτι οἱ τρεῖς συγγραφεῖς, ἐκτὸς μιᾶς λεπτομερειακῆς περιγραφῆς τοῦ ὀργάνου, ἐξέθεσαν καὶ μερικὰς ἰδιότητας τῶν κωνικῶν τομῶν, ἐκ τῶν ὁποίων καταφαίνεται ἡ μεγάλη οἰκειότης των μὲ τὰς ἐν λόγῳ καμπύλας.

Κατὰ τὸν XI αἰῶνα

150. Συμβαίνει εἰς ὅλους τοὺς λαοὺς ν' ἀπαντῶνται πρόσωπα ἀνεξάρτητα, τὰ ὁποῖα ἀρνοῦνται ν' ἀκολουθήσουν τὴν κατεύθυνσιν τοῦ ἐπικρατοῦντος ρεύματος καὶ καταγίνονται, ἂν ὄχι μὲ τὴν διάδοσιν καὶ ἐπιβολὴν ἀπόψεων ἐντελῶς πρωτοτύπων, μὲ τὴν τιμητικὴν ἐπαναφορὰν μεθόδων καὶ συγγραφέων, ἀδίκως καὶ παραλόγως λησμονηθέντων. Εἴδομεν π.χ. εἰς τοὺς Ἕλληνας τὸν Δομνῖνον τὸν Λαρισαῖον (§ 88) νὰ καταπολεμῇ τὰς ἐκφυλισμένας μεθόδους τῶν ἀνακαινιστῶν τῆς πυθαγορείου καὶ πλατωνικῆς διδασκαλίας, χάριν τῆς ἐπικρατήσεως τῆς αὐστηρᾶς λογικῆς, κατὰ τὸ εὐκλείδειον ὑπόδειγμα. Ἀνάλογον ρόλον ἐπωμίσθη ὁ Muhammed ibn Al Hasan abu Bokr Al Karchi, κοινῶς Alkarchi, ὁ ὁποῖος ἀπέθανε τὸ 1029, καταλιπὼν φήμην ἐξαιρέτου μαθηματικοῦ. Ἡ ἀξία του δύναται νὰ ἐκτιμηθῇ ἀπὸ δύο ἔργα του, προσιτὰ ἀκόμη καὶ εἰς τοὺς ἀγνοοῦντας τὴν

ἀραβικήν, διὰ τῶν ὁποίων οὗτος χαρακτηρίζεται ὡς ὑποστηρικτὴς τῶν ἑλληνικῶν μεθόδων ἔναντι τῶν ἰνδικῶν, τὰς ὁποίας προσποιεῖται ὅτι ἀγνοεῖ, ἐνῷ αὗται ἐδιδάσκοντο εἰς τὸ γνωστόν μας ἤδη (§ 149) καὶ σύγχρονόν του βιβλίον τοῦ Al Nasawi.

Ἐκ τῶν δύο ἀναφερθέντων ἔργων τοῦ Alkarchi τὸ περισσότερον στοιχειῶδες εἶναι ἕνα ἐγχειρίδιον ἀριθμητικῆς, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ ἑλληνικὴ ἐπίδρασις γίνεται αἰσθητὴ τόσον ἐκ τῆς παρουσίας ὁλοκλήρων χωρίων τοῦ Εὐκλείδου, κατὰ λέξιν μεταφρασθέντων, ὅσον καὶ ἐκ τῆς παρουσίας ἀριθμητικῶν μεθόδων καὶ γεωμετρικῶν προτάσεων, ληφθεισῶν ἀπὸ τὰ ἔργα τοῦ Ἥρωνος, Πτολεμαίου καὶ Θέωνος τῆς Ἀλεξανδρείας. Ἡ παρουσία ἐν τούτοις τῆς διὰ τοῦ 9 δοκιμῆς ἀποδεικνύει, ὅτι ὁ συγγραφεὺς δὲν κατώρθωσε ν' ἀπαλλαγῇ τελείως τῆς ἰνδικῆς ἐπιδράσεως.

Ἀλλὰ τὸ ὕψος τῆς ἐπιστήμης τοῦ Alkarchi δὲν δύναται νὰ ἐκτιμηθῇ ἀπὸ τὸ μέτριον αὐτὸ ἐγχειρίδιον τὸ ἀποβλέπον εἰς στοιχειώδεις διδακτικοὺς σκοπούς, ἀλλὰ ἀπὸ ἕνα βιβλίον, τὸ ὁποῖον ἠθέλησε νὰ τιτλοφορήσῃ Al-Fachri, ἀπὸ τὸ παρωνύμιον «Fachr Al Mulk» (Δόξα τῆς αὐτοκρατορίας) τὸ δοθὲν εἰς τὸν Abu Gabil, ὁ ὁποῖος τὴν ἐποχὴν ἐκείνην ἦτο «βεζύρης τῶν βεζυρῶν». Εἶναι ἕνα ἔργον πλῆρες, συντεταγμένον κατὰ τὸ ὑπόδειγμα τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου, πραγματευόμενον ἐξισώσεις, ὡρισμένας ἢ μή, μέχρι δευτέρου βαθμοῦ, ἀλλὰ δίδον συγχρόνως θέσιν καὶ εἰς ζητήματα ἐξετασθέντα ἐν τῷ μεταξὺ ὑπὸ τῶν Ἰνδῶν ἢ περιλαμβανόμενα εἰς τὰ κυκλοφοροῦντα ἔργα των.

Μεταξὺ τῶν προσθηκῶν τῶν ὀφειλομένων εἰς τὸν ἴδιον τὸν συγγραφέα, ἀναφέρομεν τὸν προσδιορισμὸν τῶν ἀθροισμάτων τῶν πρώτων, δευτέρων καὶ τρίτων δυνάμεων τῶν n πρώτων ἀριθμῶν τῆς φυσικῆς σειρᾶς. Ἰδιαιτέρως μάλιστα ἀξιοσημείωτος, διὰ τὴν ἀπαράμιλλον κομψότητά της, εἶναι ἡ μέθοδος, μὲ τὴν ὁποίαν ἐπιτυγχάνει τὸ τελευταῖον καὶ ἡ ὁποία, ἂν πράγματι ὀφείλεται εἰς ἰδικήν του ἔμπνευσιν, ἀρκεῖ διὰ νὰ τοῦ ἐξασφαλίσῃ διακεκριμένην θέσιν μεταξὺ τῶν μαθητῶν τῶν κορυφαίων ἑλλήνων μαθηματικῶν (**E. Woepcke**, Extrait du Fakhri, traité d' algèbre par Abou Bekr Mohamed Ben Alhaçon Alkarkhi, Paris, 1853).

Ἀξιοσημείωτον εἶναι ἐπίσης ὅτι τῆς ἐξισώσεως $x^2 + 21 = 10x$ εὑρίσκει τὰς δυὸ ρίζας 3 καὶ 7 «κατὰ Διόφαντον», ἐνῷ, ὡς εἴδομεν, οὐδὲν στοιχεῖον τῆς ἐποχῆς τοῦ τελευταίου ἔχομεν, βάσει τοῦ ὁποίου νὰ δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν, ὅτι ὁ ἀλεξανδρινὸς μαθηματικὸς ἐγνώριζε τὰς δύο ρίζας μιᾶς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως.

Ἄλλο ἐντυπωσιακὸν γεγονὸς εἶναι ὅτι μερικὰ προβλήματα ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως, λυόμενα ὑπὸ τοῦ Alkarchi, ἀναφέρονται ὑπὸ ἑνὸς σχολιαστοῦ, ὡς «ληφθέντα ἀπὸ τὸν Διόφαντον», ἐνῷ τοιαῦτα δὲν ὑπάρχουν εἰς τὸ ἑλληνικὸν πρωτότυπον, ποὺ ἔχομεν εἰς τὴν διάθεσίν μας.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται ὅτι οἱ Ἄραβες εἶχον εἰς χεῖρας των ἕνα κείμενον τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου πληρέστερον τοῦ ἰδικοῦ μας καὶ τὸ ὁποῖον δὲν ἀποκλείεται ν' ἀνακαλυφθῇ μίαν ἡμέραν μεταξὺ τῶν ἄλλων ἀθίκτων ἀκόμη κειμηλίων τῆς ἀραβικῆς γραμματείας.

Μία ἄλλη παρατήρησις· ἐν ὄψει ἑνὸς προβλήματος μὲ δύο ἀγνώστους ὁ Alkarchi ὀνομάζει τὸν ἕνα «πρᾶγμα», τὸν ἄλλον «μέτρον» ἢ «μέρος».

Καὶ ἕνα τελευταῖον· εἰς τὸν Alkarchi ὀφείλεται, μέχρις ἀποδείξεως τοῦ ἐναντίου, ἡ ἀναγωγὴ εἰς δευτεροβάθμιον ἐξίσωσιν, ἄρα καὶ ἡ λύσις, ὅλων τῶν ἐξισώσεων τῶν ὑπαγομένων εἰς μίαν τῶν ἀκολούθων μορφῶν :

$$ax^{2n} + bx^{n} = c,$$

$$ax^{2n} + c = bx^{n},$$

$$bx^{n} + c = ax^{2n}.$$

151. Μεγάλην φήμην ὡς ἀστρονόμος καὶ μαθηματικός, ὡς φιλόσοφος καὶ ὡς ποιητὴς ἔχει ὁ Omar Ibrahim al Charjami Gijat ad-Din Abu' l Fath, ἀκμάσας μεταξὺ 1036 καὶ 1123. Εἰς αὐτὸν ὀφείλεται μία μεταρρύθμισις τοῦ ἡμερολογίου, ἡ ὁποία συνίσταται εἰς τὴν παρεμβολὴν ἀνὰ τετραετίαν ἑνὸς ἔτους 366 ἡμερῶν, ἀρχῆς γενομένης ἀπὸ τοῦ ἔτους 1079. Ἐπετεύχθη οὕτω μέση διάρκεια τοῦ ἡλιακοῦ ἔτους πολὺ ἀκριβεστέρα τῆς πρότερον παραδεδεγμένης.

Ἕνα Σχόλιον εἰς τὰ αἰτήματα τοῦ Εὐκλείδου, τὸ ὁποῖον ἀποδίδεται εἰς τὸν περὶ οὗ ὁ λόγος ἐπιστήμονα, παραμένει μέχρι τῆς στιγμῆς ἀνέκδοτον, ἐνῷ εἶδε τὸ φῶς τῆς δημοσιότητος ἕνα ἔργον του ἀλγέβρας (E. Woepcke, L' algèbre de Omar Alkayyami, Paris, 1851), τὸ ὁποῖον θεωρεῖται ἕνα ἀπὸ τὰ καλύτερα ἔργα τῆς ἀραβικῆς μαθηματικῆς γραμματείας καὶ εἰς τὸ ὁποῖον ὤφειλε τὴν θέσιν του ὡς διευθυντοῦ τοῦ ἀστεροσκοπείου τῆς Βαγδάτης.

Εἰς τὸ βιβλίον αὐτὸ προτείνει μίαν κατάταξιν ὅλων τῶν ἐξισώσεων τῶν τεσσάρων πρώτων βαθμῶν εἰς 25 τάξεις. Εἰδικώτερα ἔκαμε τὴν ἀρχὴν συστηματικῆς μελέτης τῶν ἐξισώσεων τρίτου βαθμοῦ καὶ ἐπρότεινε τὴν κατάταξίν των εἰς τρεῖς μορφάς, τὰς ὁποίας σήμερον θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ γράψωμεν ὡς ἑξῆς :

$$x^3 + b^2x = b^2c,$$

$$x^3 + ax^2 = c^3,$$

$$x^3 + ax^2 + b^2x = b^2c.$$

Ὁ συγγραφεὺς ἐνόμιζεν (ἀτόπως, φυσικὰ) ὅτι τοιαῦται ἐξισώσεις δὲν ἦτο δυνατὸν νὰ λυθοῦν μὲ ὑπολογισμούς, ἀλλὰ μόνον γεωμετρικῶς διὰ τῆς

χρήσεως κωνικῶν τομῶν*. Τέλος δὲ ἐκαυχᾶτο, ὅτι ἐγνώριζε τὸ θεώρημα τοῦ διωνύμου δι' ἐκθέτας ἀκεραίους καὶ θετικούς.

Τὸν XI αἰῶνα ἔζησεν ἐπίσης ἕνας ἄλλος Ἄραψ τῆς Ἱσπανίας, εἰς τὸν ὁποῖον ἡ σφαιρικὴ τριγωνομετρία ὀφείλει κάποιαν τελειοποίησιν. Τὸ πλῆρες ὄνομά του εἶναι Gabir ibn Al Flah abu Muhammed. Οἱ Εὐρωπαῖοι ὅμως, οἱ ὁποῖοι πρῶτοι ἐγνώρισαν καὶ ἐξετίμησαν τὰς ἐργασίας του, τὸν ὠνόμασαν Geber, δίδοντες οὕτω τὸ δεύτερον συνθετικὸν εἰς μίαν ἀπὸ τὰς πλέον παραδόξους ἐτυμολογίας, ὡς εἶναι ἡ τῆς λέξεως «ἄλγεβρα», ἐνῷ οἱ Ἀνατολῖται τὸν ὠνόμασαν Alschibili, διὰ νὰ ἐνθυμοῦνται ὅτι εἶχε γεννηθῆ εἰς τὴν Σεβίλλην. Ὁ Γεράρδος τῆς Κρεμώνης μετέφρασεν εἰς τὴν λατινικὴν ἕνα ἔργον του, ἀστρονομικοῦ περιεχομένου, εἰς τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται καὶ ἡ σχέσις :

$$\text{συν}\, B = \text{συν}\, b \cdot \text{ημ}\, A$$

τοῦ ὀρθογωνίου εἰς C σφαιρικοῦ τριγώνου, φερομένη μέχρι σήμερον ὑπὸ τὸ ὄνομα «θεώρημα τοῦ Geber». Ἡ σπουδαιότης τοῦ ἐξαγομένου τούτου δίδει τὴν ἐλπίδα, ὅτι καὶ ἄλλα, ἐξ ἴσου σοβαρὰ ζητήματα, ἀναμένουν τὴν ἐκταφήν των, μεταξὺ τῶν πολυαρίθμων ἔργων του, τὰ ὁποῖα ὑφίστανται μέχρι σήμερον ὑπὸ μορφὴν χειρογράφων.

Nasir ed Din

152. Ἀκόμη μεγαλυτέρας σπουδαιότητος εἶναι ἡ ὤθησις, τὴν ὁποίαν ἔδωσεν εἰς τὴν τριγωνομετρίαν, ἕνα καὶ ἥμισυ αἰῶνα βραδύτερον, ὁ πέρσης Muhammed ibn Muhammed ibn al Hasan abu Gafur al Tusi, γνωστὸς περισσότερον μὲ τὸ παρωνύμιόν του Nasir ed Din, ποὺ σημαίνει «ὑπερασπιστὴς τῆς πίστεως». Γεννηθεὶς εἰς Tus (Korasan) τὸν Φεβρουάριον τοῦ 1201, ἐγκατεστάθη εἰς Βαγδάτην, ὅπου ἐπέρασε μέγα μέρος τῆς ζωῆς του, ἀποκτήσας ὑψηλὴν καὶ ἐπαξίαν φήμην ὡς φιλόσοφος, ἀστρονόμος καὶ μαθηματικός, χάρις εἰς τὰς πολυαρίθμους ἐργασίας του, ἐκ τῶν ὁποίων ἄλλαι ἔχουν χαρακτῆρα ἁπλῶν σχολίων, ἄλλαι ὅμως φέρουν τὴν σφραγῖδα ἀδιαφιλονικήτου πρωτοτυπίας.

Ὑπελόγισε περιφημοτάτους ἀστρονομικοὺς πίνακας καὶ ἤγειρε μέγα ἀστεροσκοπεῖον, τὸ ὁποῖον ἐφωδίασεν, ὡς λέγεται, μὲ μίαν τεραστίαν βιβλιοθήκην περιέχουσαν ἄνω τῶν 400.000 τόμων. Ἀπέθανεν εἰς Βαγδάτην τὸ 1274.

Ὁ Nasir ed Din ἔγινεν ἀρκετὰ γνωστὸς εἰς τὴν Εὐρώπην κατόπιν μιᾶς

* Μεταξὺ τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων περιλαμβάνεται καὶ ἐκείνη, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνάγεται τὸ ἀρχιμήδειον πρόβλημα τῆς διαιρέσεως σφαίρας ὑπὸ ἐπιπέδου εἰς δύο μέρη, τῶν ὁποίων οἱ ὄγκοι νὰ ἔχουν δοθέντα λόγον (§ 41, § 54). Ὁ Omar ἀναφέρει ἄραβας μαθηματικούς, ὡς καταστρώσαντας διὰ πρώτην φορὰν τὴν ἐξίσωσιν τοῦ προβλήματος τούτου.

χρήσεως κωνικῶν τομῶν*. Τέλος δὲ ἐκαυχᾶτο, ὅτι ἐγνώριζε τὸ θεώρημα τοῦ διωνύμου δι' ἐκθέτας ἀκεραίους καὶ θετικούς.

Τὸν XI αἰῶνα ἔζησεν ἐπίσης ἕνας ἄλλος Ἄραψ τῆς Ἰσπανίας, εἰς τὸν ὁποῖον ἡ σφαιρικὴ τριγωνομετρία ὀφείλει κάποιαν τελειοποίησιν. Τὸ πλῆρες ὄνομά του εἶναι Gabir ibn Al Flah abu Muhammed. Οἱ Εὐρωπαῖοι ὅμως, οἱ ὁποῖοι πρῶτοι ἐγνώρισαν καὶ ἐξετίμησαν τὰς ἐργασίας του, τὸν ὠνόμασαν Geber, δίδοντες οὕτω τὸ δεύτερον συνθετικὸν εἰς μίαν ἀπὸ τὰς πλέον παραδόξους ἐτυμολογίας, ὡς εἶναι ἡ τῆς λέξεως «ἄλγεβρα», ἐνῷ οἱ Ἀνατολῖται τὸν ὠνόμασαν Alschibili, διὰ νὰ ἐνθυμοῦνται ὅτι εἶχε γεννηθῆ εἰς τὴν Σεβίλλην. Ὁ Γεράρδος τῆς Κρεμώνης μετέφρασεν εἰς τὴν λατινικὴν ἕνα ἔργον του, ἀστρονομικοῦ περιεχομένου, εἰς τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται καὶ ἡ σχέσις :

$$\text{συν}\, B = \text{συν}\, b \cdot \text{ημ}\, A$$

τοῦ ὀρθογωνίου εἰς C σφαιρικοῦ τριγώνου, φερομένη μέχρι σήμερον ὑπὸ τὸ ὄνομα «θεώρημα τοῦ Geber». Ἡ σπουδαιότης τοῦ ἐξαγομένου τούτου δίδει τὴν ἐλπίδα, ὅτι καὶ ἄλλα, ἐξ ἴσου σοβαρὰ ζητήματα, ἀναμένουν τὴν ἐκταφήν των, μεταξὺ τῶν πολυαρίθμων ἔργων του, τὰ ὁποῖα ὑφίστανται μέχρι σήμερον ὑπὸ μορφὴν χειρογράφων.

Nasir ed Din

152. Ἀκόμη μεγαλυτέρας σπουδαιότητος εἶναι ἡ ὤθησις, τὴν ὁποίαν ἔδωσεν εἰς τὴν τριγωνομετρίαν, ἕνα καὶ ἥμισυ αἰῶνα βραδύτερον, ὁ πέρσης Muhammed ibn Muhammed ibn al Hasan abu Gafur al Tusi, γνωστὸς περισσότερον μὲ τὸ παρωνύμιόν του Nasir ed Din, ποὺ σημαίνει «ὑπερασπιστὴς τῆς πίστεως». Γεννηθεὶς εἰς Tus (Korasan) τὸν Φεβρουάριον τοῦ 1201, ἐγκατεστάθη εἰς Βαγδάτην, ὅπου ἐπέρασε μέγα μέρος τῆς ζωῆς του, ἀποκτήσας ὑψηλὴν καὶ ἐπαξίαν φήμην ὡς φιλόσοφος, ἀστρονόμος καὶ μαθηματικός, χάρις εἰς τὰς πολυαρίθμους ἐργασίας του, ἐκ τῶν ὁποίων ἄλλαι ἔχουν χαρακτῆρα ἁπλῶν σχολίων, ἄλλαι ὅμως φέρουν τὴν σφραγῖδα ἀδιαφιλονικήτου πρωτοτυπίας.

Ὑπελόγισε περιφημοτάτους ἀστρονομικοὺς πίνακας καὶ ἤγειρε μέγα ἀστεροσκοπεῖον, τὸ ὁποῖον ἐφωδίασεν, ὡς λέγεται, μὲ μίαν τεραστίαν βιβλιοθήκην περιέχουσαν ἄνω τῶν 400.000 τόμων. Ἀπέθανεν εἰς Βαγδάτην τὸ 1274.

Ὁ Nasir ed Din ἔγινεν ἀρκετὰ γνωστὸς εἰς τὴν Εὐρώπην κατόπιν μιᾶς

* Μεταξὺ τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων περιλαμβάνεται καὶ ἐκείνη, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνάγεται τὸ ἀρχιμήδειον πρόβλημα τῆς διαιρέσεως σφαίρας ὑπὸ ἐπιπέδου εἰς δύο μέρη, τῶν ὁποίων οἱ ὄγκοι νὰ ἔχουν δοθέντα λόγον (§ 41, § 54). Ὁ Omar ἀναφέρει ἄραβας μαθηματικούς, ὡς καταστρώσαντας διὰ πρώτην φορὰν τὴν ἐξίσωσιν τοῦ προβλήματος τούτου.

ἐργασίας του, ἡ ὁποία ἀπέβλεπεν εἰς ἀναμόρφωσιν τῆς θεωρίας τῶν παραλλήλων κατὰ τρόπον ἱκανοποιητικώτερον τοῦ εὐκλειδείου καὶ τὴν ὁποίαν ἐδημοσίευσεν ὁ G. Wallis εἰς τὰ Ἔ ρ γ α του. Ἀλλ' ἡ μεγάλη ἀξία του κατέστη δυνατὸν νὰ ἐκτιμηθῇ μόλις πρὸ τεσσαρακονταετίας περίπου, ὅταν ἐδημοσιεύθη μία τριγωνομετρικὴ ἐργασία του, βρίθουσα ἀπὸ πρωτοτύπους ἀπόψεις καὶ σημαντικὰ ἐξαγόμενα (**A. Karatheodory**, Traité du quadrilatère attribué à Nassir ed Din el - Toussy, Konstantinople, 1892). Ὁ ἐκλεγεὶς τίτλος της Π ε ρ ὶ τ ῶ ν σ χ η μ ά τ ω ν τ ῶ ν δ ι α τ ε μ ν ο υ σ ῶ ν ὀφείλεται εἰς τὸ γεγονὸς ὅτι τὴν σπονδυλικὴν στήλην τοῦ ὅλου ἔργου ἀποτελεῖ, ὅπως θὰ ἴδωμεν εἰς τὴν ἀκόλουθον βραχεῖαν ἀνάλυσιν, τὸ θεώρημα τοῦ Μενελάου.

Χωρὶς νὰ σταματήσωμεν εἰς τὸ Βιβλίον I, τοῦ ὁποίου τὸ περιεχόμενον ἀναφέρεται εἰς ὑπολογισμοὺς μέσῳ λόγων, θὰ ἐξάρωμεν ἀπὸ τὸ Βιβλίον II μίαν λεπτομερῆ μελέτην τοῦ πλήρους τετραπλεύρου, ἀναλυομένου εἰς 48 διακεκριμένας περιπτώσεις. Ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς δὲν εἶναι βέβαια εὐκαταφρόνητος, καταντᾷ ὅμως ἀσήμαντος, ἂν συγκριθῇ μὲ τὸν ἀριθμὸν 497664, εἰς τὸν ὁποῖον ὁ Nasir ἀναβιβάζει τὸ πλῆθος ὅλων τῶν σχημάτων, ποὺ λαμβάνονται ἀπὸ ἕνα τρίγωνον τοῦ ἐπιπέδου καὶ μίαν διατέμνουσαν, εἰς ὅλας τὰς δυνατὰς θέσεις.

Τὸ ἑπόμενον Βιβλίον III περιέχει κατὰ κύριον λόγον μερικὰς γενικότητας ἐπὶ τοῦ πλήρους σφαιρικοῦ τετραπλεύρου, κατόπιν δὲ τὰς θεμελιώδεις σχέσεις, ποὺ ὑπάρχουν μεταξὺ τῶν στοιχείων ἑνὸς σφαιρικοῦ τριγώνου ὀρθογωνίου ἢ μή, τῶν ὁποίων δίδει τὰς ἐκφωνήσεις πρῶτα μὲ τὴν χρῆσιν χ ο ρ δ ῶ ν (ἀκολουθῶν τὴν πτολεμαϊκὴν παράδοσιν) καὶ κατόπιν μὲ τὴν χρῆσιν ἡ μ ι τ ό ν ω ν.

Τὸ Βιβλίον IV διδάσκει τὸ θεώρημα τοῦ Μενελάου εἰς τὴν σφαιρικὴν τριγωνομετρίαν, πρῶτα μὲ τὴν ἀποδεικτικὴν διαδικασίαν τοῦ Πτολεμαίου καὶ ἔπειτα μὲ ἄλλον πρωτότυπον τρόπον.

Εἰς τὸ Βιβλίον V εὑρίσκομεν τοὺς τρόπους ἐπιλύσεως — διὰ νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὴν σύγχρονόν μας ὁρολογίαν — τῶν σφαιρικῶν τριγώνων, εἰς τὰς συνήθεις θεμελιώδεις περιπτώσεις. Ὁ Nasir ed Din ἐφαρμόζει πρὸς τοῦτο τὸ θεώρημα τῶν ἡμιτόνων διὰ τρίγωνα πλαγιογώνια, ἀποδεικνύων αὐτὸ προηγουμένως κατὰ 8 τοὐλάχιστον διαφορετικοὺς τρόπους, ἐκ τῶν ὁποίων μερικοὶ εἶναι ἰδικῆς του ἐμπνεύσεως, ἄλλοι δὲ ὀφείλονται εἰς τοὺς Abu'l Wafa, Anaritio, Al Biruni καὶ ἄλλους.

Κατὰ τὴν διαδρομὴν τῶν σημαντικῶν τούτων ἀναπτύξεων, ὁ συγγραφεὺς ἀποκαθιστᾷ ὅλας τὰς σχέσεις, αἱ ὁποῖαι ὑπάρχουν μεταξὺ τῶν στοιχείων ἑνὸς σφαιρικοῦ τριγώνου ABC, ὀρθογωνίου εἰς C. Ἀναφέρομεν ἐδῶ τὰς σπουδαιοτέρας :

$$\text{συν}\, c = \text{συν}\, a \cdot \text{συν}\, b = \text{σφ}\, A \cdot \text{σφ}\, B$$

$$\text{συν } A = \text{συν } \alpha \cdot \text{ημ } B, \qquad \text{εφ } b = \text{ημ } \alpha \cdot \text{εφ } B$$

$$\text{συν } A = \frac{\text{σφ } c}{\text{σφ } b}, \qquad \frac{\text{σφ } A}{\text{εφ } b} = \frac{\text{συν } c}{\text{ημ } a}.$$

Σημειοῦται ἀκόμη πρὸς τιμὴν τοῦ Nasir ed Din, ὅτι τὸ ἔργον του τὸν ἀναδεικνύει γνώστην τῆς ἐννοίας τοῦ συμπληρωματικοῦ ἢ πολικοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου καὶ ἐπιδέξιον ἐκμεταλλευτὴν τῶν ἰδιοτήτων του.

Ἐξ ὅλων τῶν ἀνωτέρω συνάγεται, ὅτι εἶναι ἴσως ὁ πρῶτος συγγραφεύς, ὁ ὁποῖος ἐθεώρησε καὶ ἐπραγματεύθη τὴν σφαιρικὴν τριγωνομετρίαν ὡς αὐτόνομον κλάδον καὶ ὄχι ὡς ἕνα ἁπλοῦν κεφάλαιον τῆς μαθηματικῆς ἀστρονομίας. Ἐπὶ πλέον ἠρεύνησε παραλλήλως πρὸς τὴν σφαιρικὴν καὶ τὴν εὐθύγραμμον τριγωνομετρίαν χρησιμοποιῶν σταθερῶς τὰς κυκλικὰς συναρτήσεις καὶ ἐπιφέρων ἐπίσης οὐσιώδεις τελειοποιήσεις καὶ προόδους, αἱ ὁποῖαι εὗρον εἰς τὴν Εὐρώπην συνεχιστὰς μόνον ἔπειτα ἀπὸ μερικοὺς αἰῶνας.

Μολονότι ὁ Nasir ed Din, διὰ λόγους γενικωτέρους καὶ μὴ ἐξαρτωμένους ἀπὸ αὐτόν, δὲν ἤσκησεν ἐπὶ τῆς προόδου τῶν ἀκριβῶν ἐπιστημῶν τὴν εὐεργετικὴν ἐκείνην ἐπίδρασιν διὰ τὴν ὁποίαν ἦτο προωρισμένος ἐκ φύσεως, ἡ καθ' ὅλας τὰς ἐνδείξεις ἀξία του ὡς πρωτοτύπου ἐπιστήμονος δὲν δύναται νὰ μειωθῇ ἐπ' ἐλάχιστον, ἀλλ' ἀντιθέτως δύναται νὰ διακηρυχθῇ χωρὶς δισταγμοὺς καὶ ἐπιφυλάξεις.

Ἄλλοι ἄραβες μαθηματικοί

153. Ἡ ἀραβικὴ μαθηματικὴ γραμματεία εἶναι σήμερον ἀτελῶς γνωστή. Ἀρκεῖ νὰ σημειωθῇ ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἔργων, ποὺ εὑρίσκονται εἰς τὴν διάθεσιν τῶν μὴ εἰδικῶν ἀνατολιστῶν, εἶναι πενιχρότατος ἐν συγκρίσει πρὸς τὸ πλῆθος τῶν χειρογράφων, τὰ ὁποῖα ἀναμένουν ἀκόμη τὴν τιμητικὴν χειρονομίαν τῆς μεταφράσεως καὶ τοῦ σχολιασμοῦ των. Ἀλλὰ καὶ ἡ ἐκλογὴ ἐκείνων, τὰ ὁποῖα ἔτυχον αὐτῆς τῆς τιμῆς, ἔγινε μὲ κριτήρια τυχαῖα, στηριχθέντα περισσότερον εἰς τὰς ὀρέξεις τῶν ἐρευνητῶν καὶ ἐξαρτηθέντα, ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον, ἀπὸ τὴν δυνατότητα προσπελάσεως τῶν χειρογράφων. Κατὰ συνέπειαν τὸ πλαίσιον, τὸ ὁποῖον ἐπεξειργάσθημεν εἰς τὰς προηγουμένας σελίδας, δὲν δύναται παρὰ νὰ παρουσιάζῃ σοβαρὰς ἀτελείας καὶ κενά. Παρὰ ταῦτα ὑπάρχει δυνατότης νὰ συμπληρώσωμεν ἀκόμη μερικὰ ἐξ αὐτῶν. Ἀκριβῶς εἰς τὸν σκοπὸν αὐτὸν ἀποβλέπουν αἱ τελευταῖαι σελίδες τοῦ κεφαλαίου τούτου, αἱ ὁποῖαι ἀφιερώνονται εἰς μερικοὺς μαθηματικοὺς μικροτέρας δράσεως.

Ὁ Muhammed ibn Muhammed al Bagdadi — ἀβεβαίας ἐποχῆς, πιθανῶς τοῦ X αἰῶνος—εἶναι συγγραφεὺς ἑνὸς ἔργου Περὶ διαιρέσεως τῶν

$$\text{συν}\,A = \text{συν}\,\alpha \cdot \text{ημ}\,B, \qquad \text{εφ}\,b = \text{ημ}\,\alpha \cdot \text{εφ}\,B$$

$$\text{συν}\,A = \frac{\text{σφ}\,c}{\text{σφ}\,b}, \qquad \frac{\text{σφ}\,A}{\text{εφ}\,b} = \frac{\text{συν}\,c}{\text{ημ}\,a}.$$

Σημειοῦται ἀκόμη πρὸς τιμὴν τοῦ Nasir ed Din, ὅτι τὸ ἔργον του τὸν ἀναδεικνύει γνώστην τῆς ἐννοίας τοῦ συμπληρωματικοῦ ἢ πολικοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου καὶ ἐπιδέξιον ἐκμεταλλευτὴν τῶν ἰδιοτήτων του.

Ἐξ ὅλων τῶν ἀνωτέρω συνάγεται, ὅτι εἶναι ἴσως ὁ πρῶτος συγγραφεύς, ὁ ὁποῖος ἐθεώρησε καὶ ἐπραγματεύθη τὴν σφαιρικὴν τριγωνομετρίαν ὡς αὐτόνομον κλάδον καὶ ὄχι ὡς ἕνα ἁπλοῦν κεφάλαιον τῆς μαθηματικῆς ἀστρονομίας. Ἐπὶ πλέον ἠρεύνησε παραλλήλως πρὸς τὴν σφαιρικὴν καὶ τὴν εὐθύγραμμον τριγωνομετρίαν χρησιμοποιῶν σταθερῶς τὰς κυκλικὰς συναρτήσεις καὶ ἐπιφέρων ἐπίσης οὐσιώδεις τελειοποιήσεις καὶ προόδους, αἱ ὁποῖαι εὗρον εἰς τὴν Εὐρώπην συνεχιστὰς μόνον ἔπειτα ἀπὸ μερικοὺς αἰῶνας.

Μολονότι ὁ Nasir ed Din, διὰ λόγους γενικωτέρους καὶ μὴ ἐξαρτωμένους ἀπὸ αὐτόν, δὲν ἤσκησεν ἐπὶ τῆς προόδου τῶν ἀκριβῶν ἐπιστημῶν τὴν εὐεργετικὴν ἐκείνην ἐπίδρασιν διὰ τὴν ὁποίαν ἦτο προωρισμένος ἐκ φύσεως, ἡ καθ' ὅλας τὰς ἐνδείξεις ἀξία του ὡς πρωτοτύπου ἐπιστήμονος δὲν δύναται νὰ μειωθῇ ἐπ' ἐλάχιστον, ἀλλ' ἀντιθέτως δύναται νὰ διακηρυχθῇ χωρὶς δισταγμοὺς καὶ ἐπιφυλάξεις.

Ἄλλοι ἄραβες μαθηματικοὶ

153. Ἡ ἀραβικὴ μαθηματικὴ γραμματεία εἶναι σήμερον ἀτελῶς γνωστή. Ἀρκεῖ νὰ σημειωθῇ ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἔργων, ποὺ εὑρίσκονται εἰς τὴν διάθεσιν τῶν μὴ εἰδικῶν ἀνατολιστῶν, εἶναι πενιχρότατος ἐν συγκρίσει πρὸς τὸ πλῆθος τῶν χειρογράφων, τὰ ὁποῖα ἀναμένουν ἀκόμη τὴν τιμητικὴν χειρονομίαν τῆς μεταφράσεως καὶ τοῦ σχολιασμοῦ των. Ἀλλὰ καὶ ἡ ἐκλογὴ ἐκείνων, τὰ ὁποῖα ἔτυχον αὐτῆς τῆς τιμῆς, ἔγινε μὲ κριτήρια τυχαῖα, στηριχθέντα περισσότερον εἰς τὰς ὀρέξεις τῶν ἐρευνητῶν καὶ ἐξαρτηθέντα, ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον, ἀπὸ τὴν δυνατότητα προσπελάσεως τῶν χειρογράφων. Κατὰ συνέπειαν τὸ πλαίσιον, τὸ ὁποῖον ἐπεξειργάσθημεν εἰς τὰς προηγουμένας σελίδας, δὲν δύναται παρὰ νὰ παρουσιάζῃ σοβαρὰς ἀτελείας καὶ κενά. Παρὰ ταῦτα ὑπάρχει δυνατότης νὰ συμπληρώσωμεν ἀκόμη μερικὰ ἐξ αὐτῶν. Ἀκριβῶς εἰς τὸν σκοπὸν αὐτὸν ἀποβλέπουν αἱ τελευταῖαι σελίδες τοῦ κεφαλαίου τούτου, αἱ ὁποῖαι ἀφιερώνονται εἰς μερικοὺς μαθηματικοὺς μικροτέρας δράσεως.

Ὁ Muhammed ibn Muhammed al Bagdadi — ἀβεβαίας ἐποχῆς, πιθανῶς τοῦ X αἰῶνος — εἶναι συγγραφεὺς ἑνὸς ἔργου Π ε ρ ὶ δ ι α ι ρ έ σ ε ω ς τ ῶ ν

σχημάτων, ἀπὸ μακροῦ χρόνου μεταφρασθέντος εἰς τὴν λατινικὴν καὶ τιμηθέντος μὲ δημοσίευσιν (De superficierum divisionibus Liber Machometo Bagdedino adscriptus nunc primum **Joannis Dee et Federici Commandini Urbinate** opera in lucem editus, Pisauri, 1570). Ἡ σπουδαιότης τοῦ κειμένου τούτου συνίσταται εἰς τὸ γεγονός, ὅτι ἀποτελεῖ ἀνακατασκευὴν τοῦ ὁμωνύμου ἔργου τοῦ Εὐκλείδου (§ 38) καὶ μάλιστα, ὅτι εἶναι τὸ μοναδικόν, ἐκ τοῦ ὁποίου δυνάμεθα ν' ἀντλήσωμεν πληροφορίας γύρω ἀπὸ τὸ ἔργον ἐκεῖνο τοῦ κορυφαίου ἀλεξανδρινοῦ.

Εἰς τὸν Abu Mahmud ibn al Khidr al Khujandi, ἀποθανόντα περὶ τὸ ἔτος 1000, ἀποδίδεται ἡ πρώτη προσπάθεια πρὸς ἀπόδειξιν τοῦ ἀδυνάτου τῆς λύσεως, εἰς ἀκεραίους ἀριθμούς, τῆς περιφήμου ἐξισώσεως :

$$x^3 + y^3 = z^3.$$

Ὁ Muhammed ibn al Hosein (§ 149), κατὰ τὴν ἰδίαν ἔνδοξον ἐποχήν, παρουσίασε κάποιαν συμβολήν, εἰς συμπλήρωσιν τῆς λύσεως τοῦ Δηλίου προβλήματος, στηριζομένην ἐπὶ τῆς χρησιμοποιήσεως τῆς κογχοειδοῦς τοῦ Νικομήδους. Εἶναι ἐπίσης γνωστὴ μία ἐργασία του ἐπὶ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων μὲ ἀριθμούς· ἐνδιαφέρουσα θεωρία μετ' ἐπιτυχίας καλλιεργηθεῖσα καὶ ἀπὸ ἄλλους μαθηματικούς, ἀνήκοντας εἰς τὴν ἰδίαν φυλήν. Ἀπόδειξιν τούτου παρέχει ἕνα χειρόγραφον, τοῦ 972 περίπου, ἀντίγραφον παλαιοτέρου κειμένου ἀγνώστου συγγραφέως, σκοπὸς τοῦ ὁποίου ἦτο ν' ἀποκαταστήσῃ μίαν σειρὰν θεωρημάτων ἐπὶ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων μὲ ἀριθμούς, τὰ ὁποῖα ὁδηγοῦν τελικῶς εἰς μεθόδους κατασκευῆς μιᾶς κατηγορίας τοιούτων τριγώνων, τὰ ὁποῖα θὰ ἠδυνάμεθα νὰ καλέσωμεν «ἀρχικὰ» ἢ «ἀνάγωγα», ὡς ἔχοντα πλευρὰς ἀριθμοὺς πρώτους πρὸς ἀλλήλους. Ἀντιθέτως πρὸς ὅ,τι συμβαίνει γενικῶς μὲ τὰ ἀραβικὰ μαθηματικὰ κείμενα, ἐλλείπουν αἱ ἀποδείξεις, ἀλλὰ τίποτε δὲν ἀποκλείει νὰ παρελείφθησαν ὑπὸ τοῦ ἀντιγραφέως, ὁ ὁποῖος ἐνδεχομένως ἐχρειάζετο μόνον τ' ἀποτελέσματα.

Ἀπὸ τὰς πρώτας σελίδας τοῦ ἔργου μανθάνομεν, ὅτι ἡ ὑποτείνουσα ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου εἰς ἀριθμοὺς ἔχει πάντοτε μίαν τῶν μορφῶν :

$$12m + 1, \qquad 12m + 5.$$

χωρὶς ὅμως νὰ ἰσχύῃ καὶ τὸ ἀντίστροφον : ὅτι δηλαδὴ ἂν μία πλευρὰ τριγώνου ἐκφράζεται μὲ μίαν τῶν μορφῶν τούτων, τὸ τρίγωνον εἶναι κατ' ἀνάγκην ὀρθογώνιον. Κατὰ τὴν διαδρομὴν τῆς ἐκθέσεως ἀπαντῶνται καὶ οἱ γνωστοὶ κανόνες μορφώσεως ὀρθογωνίων τριγώνων κατὰ Πυθαγόραν καὶ Πλάτωνα.

Ὁ ἄγνωστος μαθηματικὸς παρατηρεῖ ὅτι ἐὰν x, y, z εἶναι πλευραὶ ὀρθογωνίου τριγώνου θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν :

$$z^2 \pm 2xy = (x \pm y)^2 .$$

ἡ ὁποία ἀποκαλύπτει τὸν στενὸν σύνδεσμον μεταξὺ τῆς κατασκευῆς τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων εἰς ἀριθμοὺς καὶ τῆς ἀναζητήσεως «ἰσοδυνάμων ἀριθμῶν» (congruent), τουτέστι ἀριθμῶν k τοιούτων, ὥστε νὰ ἱκανοποιοῦν δύο ἐξισώσεις τῆς μορφῆς:

$$x^2 \pm k = \square ,$$

ὅπου μὲ τὸ σύμβολον τοῦ τετραγώνου δηλοῦται, ὅτι τὸ δεύτερον μέλος πρέπει νὰ εἶναι τετράγωνον ἑνὸς ἀκεραίου ἀριθμοῦ. Τοιοῦτον ζήτημα ἀπαντᾶται ἤδη εἰς τὸν Διόφαντον, τῆς προσοχῆς τοῦ ὁποίου δὲν εἶχε διαφύγει ὅτι κάθε ὀρθογώνιον τρίγωνον εἰς ἀριθμοὺς ὁδηγεῖ εἰς μίαν λύσιν τοῦ προβλήματος. Ἐπὶ πλέον οἱ Ἄραβες ἔφθασαν εἰς τὴν ἀκόλουθον γενικὴν ἔκφρασιν τῶν ἰσοδυνάμων ἀριθμῶν:

$$4ab\,(a+b)\,(a-b)\,\frac{p^2}{q^2}\,.$$

Θὰ ἴδωμεν περαιτέρω, ὅτι μὲ τὸ ἴδιον ζήτημα ἠσχολήθησαν ἀργότερα ἐξέχοντες εὐρωπαῖοι μαθηματικοί. Ἐδῶ σημειοῦμεν ὅτι ὁ πίναξ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων εἰς ἀριθμούς, μὲ τὸν ὁποῖον τελειώνει τὸ ἐν λόγῳ βιβλίον, ἐμφανίζεται ἀκριβῶς ὡς βοηθητικὸν μέσον διὰ τὴν εὕρεσιν τῶν ἰσοδυνάμων ἀριθμῶν. Ἀποκαλύπτει δὲ μίαν ἰδιάζουσαν νοοτροπίαν τοῦ ἀραβικοῦ λαοῦ, περὶ τῆς ὁποίας ὑπάρχουν πολυάριθμοι ἐπιβεβαιώσεις, ἀλλὰ τῆς ὁποίας ἡ ἀνωτέρω περίπτωσις ἀποτελεῖ τὴν πρώτην ἐκδήλωσιν.

Ἡ ἀνάμιξις τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων, εἰς ἀριθμούς, μὲ τὴν ἔρευναν τῶν ἰσοδυνάμων ἀριθμῶν εἶναι ἀκριβῶς τὸ κίνητρον, τὸ ὁποῖον ὤθησε, περίπου κατὰ τὴν ἰδίαν ἐποχήν, τὸν Muhammed ibn al Hosein νὰ γράψῃ μίαν ἀνάπτυξιν τῆς θεωρίας τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων, ἡ ὁποία, παραβλεπομένων μερικῶν σφαλμάτων, δὲν στερεῖται ἀξίας. Ἀπαντῶνται κυρίως θεωρίαι χρήσιμοι εἰς τὴν κατασκευὴν ἀριθμητικοῦ πίνακος, ἕκαστος τῶν ὁποίων εἶναι ἄθροισμα δύο τετραγώνων. Ἕνας πίναξ αὐτοῦ τοῦ εἴδους δύναται νὰ χρησιμεύσῃ εἰς τὴν κατασκευὴν ὀρθογωνίων τριγώνων, δυνάμει τῆς ταυτότητος:

$$(a^2+b^2) = (a^2-b^2)^2 + (2ab)^2.$$

Τὸν σκοπὸν αὐτὸν δύνανται νὰ ἐξυπηρετήσουν καὶ ἄλλαι μέθοδοι· μερικαὶ στηρίζονται ἐπὶ τῆς θεωρήσεως δύο διαδοχικῶν ἀριθμῶν, ἄλλαι τριῶν καὶ ἄλλαι τυχόντος πλήθους n. Δύνανται δὲ νὰ παρασταθοῦν ὡς ἑξῆς:

$$\{\, m+(m+1),\ \ 2m\,(m+1),\ \ m^2+(m+1)^2 \,\}$$
$$\{\, m\,(m+2),\ \ 2\,(m+1),\ \ (m+1)^2+1 \,\}$$
$$\{\, (m+n)+(m+n+1),\ 2\,(m+n)\,(m+n+1),\ (m+n)^2+(m+n+1) \,\}.$$

Διὰ τὰ τρίγωνα τὰ λαμβανόμενα μὲ τοὺς δύο πρώτους τρόπους, ὁ συγ-

γραφεὺς εὑρίσκει, ὅτι ὁ λόγος τοῦ ἐμβαδοῦ πρὸς τὴν περίμετρον εἶναι m/2, ἐνῷ διὰ τὰ τρίγωνα τὰ λαμβανόμενα μὲ τὸν τρίτον τρόπον, ὁ ἴδιος λόγος ἰσοῦται πρὸς (m + n)/2, πρᾶγμα διόλου παράδοξον, ἀφοῦ ὁ τρίτος τρόπος γεννᾶται ἀπὸ τὸν πρῶτον μὲ τὴν ἁπλῆν μεταβολὴν τοῦ m εἰς m + n. Ὁ συγγραφεὺς ἀποδεικνύει κατόπιν, μὲ γεωμετρικὰς θεωρίας, ὅτι ἐὰν

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

θὰ εἶναι καὶ

$$z^2 \pm 2xy = (x \pm y)^2.$$

Τοιουτοτρόπως ἄγεται εἰς τὴν θεώρησιν τῶν ἰσοδυνάμων ἀριθμῶν καὶ διὰ νὰ διευκολύνῃ τὸν προσδιορισμόν των ἐκθέτει, ἐν κατακλεῖδι, ἕνα πίνακα ἐκ 34 ὀρθογωνίων τριγώνων εἰς ἀριθμούς.

Κλείομεν τὰς πληροφορίας αὐτὰς μὲ τὰς ἀκολούθους παρατηρήσεις: 1ον. Οἱ γεωμετρικοὶ συλλογισμοί, τοὺς ὁποίους ἐκθέτει ὁ Hosein εἶναι τοῦ τύπου ἐκείνου ποὺ ἐφαρμόζουν κατὰ προτίμησιν οἱ Ἰνδοί. 2ον. Οὗτοι ἀφιερώθησαν ἐπιμελῶς εἰς τὴν ἔρευναν σχημάτων, τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ εἶχον ὡς μέτρα ἀκεραίους ἀριθμούς. 3ον. Οὐδὲν ἀποδεικνύει, ὅτι οἱ Ἄραβες ἐγνώριζον τὸν Διόφαντον, προτοῦ ὁ Abu'l Wafa δώσῃ τὴν μετάφρασιν τοῦ ἔργου του, λήγοντος τοῦ X αἰῶνος. 4ον. Αἱ ἐπικοινωνίαι μεταξὺ Ἀράβων καὶ Ἰνδῶν χρονολογοῦνται ἀπὸ τοῦ δευτέρου ἡμίσεως τοῦ VIII αἰῶνος. Κατόπιν τούτων, δύναται νὰ θεωρήσῃ κανεὶς ὡς πιθανὴν τὴν ἄποψιν, ὅτι οἱ Ἄραβες ὡδηγήθησαν εἰς τὴν ἔρευναν τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων μὲ ἀριθμοὺς καὶ τὴν ἀναζήτησιν τῶν ἰσοδυνάμων ἀριθμῶν, οὐχὶ κατ' ἐπίδρασιν ἄμεσον τοῦ Διοφάντου, ἀλλὰ κατ' ἐπίδρασιν τῶν ἰνδικῶν ἐπιτευγμάτων.

154. Ὁ Abu Zakarija al Hasser, μαθηματικὸς τοῦ XII αἰῶνος, εἶναι συγγραφεὺς ἑνὸς ἐγχειριδίου ἀριθμητικῆς, τοῦ ὁποίου ὑφίσταται, πλὴν τοῦ πρωτοτύπου καὶ μία μετάφρασις εἰς τὴν ἑβραϊκήν. Μία περίληψις τούτου, δημοσιευθεῖσα ὑπὸ τοῦ H. Suter (Das Rechenbuch des Abu Zakarija al Hassan, Bibl. matheim., τόμος II, 1901) ἀποδεικνύει ὅτι ἐκ τοῦ βιβλίου τούτου ἤντλησεν ἀφθόνως ὁ Ibn Benna, μαθηματικὸς περὶ τοῦ ὁποίου θὰ ὁμιλήσωμεν μετ' ὀλίγον.

Ὁ Kemal ed Din ibn Yunis (γεννηθεὶς εἰς Mosul τὴν 30ην Μαρτίου 1156) ἔχει ἀφήσει εἰς τοὺς συμπατριώτας του ἀρίστας ἀναμνήσεις, διότι εἰς αὐτὸν κατέφυγεν ὁ αὐτοκράτωρ Φρειδερῖκος II διὰ νὰ μάθῃ τὰς λύσεις μερικῶν ἀριθμητικῶν καὶ γεωμετρικῶν προβλημάτων. Τοῦ ἀποδίδουν μίαν μέθοδον, ἀσφαλῶς προσεγγιστικήν, διὰ τῆς ὁποίας λαμβάνει τὴν πλευρὰν τετραγώνου ἰσοδυνάμου πρὸς ἕνα κυκλικὸν τμῆμα, ὡς καὶ μίαν ἐργασίαν ἐπὶ τῶν μαγικῶν τετραγώνων. Δὲν εὑρέθησαν ὅμως μέχρι σήμερον κείμενα ἰδικά του ἐπὶ τοῦ θέματος.

Ὁ Ahmed ibn Muhammed ibn Otman al Azdi Abu'l Abbas, κοινῶς γνωστὸς μὲ τὸ παρωνύμιον Ibn al Benna, ποὺ σημαίνει «υἱὸς τοῦ ἀρχιτέκτονος», ἔζησε περίπου κατὰ τὰ ἔτη 1258 - 1340 καὶ ἔγραψεν ἕνα ἀξιόλογον ἐγχειρίδιον ἀριθμητικῆς, εἰς τὸ ὁποῖον ἀπαντᾶται ἀνάλυσις ἑνὸς ἀριθμοῦ τῆς μορφῆς $10^{v} - 1$ εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων, ὡς ἐπίσης ἐνδιαφέρουσαι θεωρίαι, ἄγουσαι εἰς τὴν κατασκευὴν πίνακος πρώτων ἀριθμῶν, καὶ βελτιώσεις εἰς τὴν μέθοδον τῆς διπλῆς αὐθαιρέτου ἀφετηρίας [81].

Ὁ Gemsid ibn Mesud ibn Mehud Gijat ed Din al - Kasi (ἀποθανὼν τὸ 1436), μὲ τὰ κείμενα, ποὺ ἔχουν διαδοθῆ μέχρι σήμερον, διαδηλώνει τὴν ἐμμονὴν τῶν Ἀράβων εἰς τὴν προκατάληψιν, ὅτι αἱ ἔγγράμματοι ἐξισώσεις τοῦ τρίτου βαθμοῦ δὲν ἐπιδέχονται ἐπίλυσιν, εἰ μὴ δι' ἀναγωγῆς εἰς γεωμετρικὰς κατασκευάς. Εἶναι ὅμως δι' αὐτὸν τίτλος τιμῆς, ὅτι κατέστησε γνωστὴν (ἐὰν δὲν τὴν ἐπενόησεν) μίαν μέθοδον προσεγγιστικοῦ ὑπολογισμοῦ τῶν ριζῶν μιᾶς τριτοβαθμίου ἐξισώσεως τῆς μορφῆς :

$$Px = Q + x^3,$$

μέθοδος ἡ ὁποία θὰ ἦτο ἄριστα δυνατὸν καὶ ἐπωφελὲς νὰ περιγράφεται εἰς σύγχρονα ἐγχειρίδια ἀλγέβρας.

Ὁ Musa ibn Muhammed ibn Mahmud, κοινῶς ἀποκαλούμενος Quadiradeh al Rumi, δηλαδὴ «υἱὸς τοῦ κριτοῦ τῆς Μικρᾶς Ἀσίας», εἶναι ἕνας ἀστρονόμος ζήσας περίπου μεταξὺ τῶν ἐτῶν 1390 καὶ 1450. Εἶναι ἄξιος ἰδιαιτέρας μνείας, ὄχι διὰ πρωτοτύπους ἐργασίας του, ἀλλὰ διὰ τὴν συγγραφὴν μιᾶς Βιογραφίας τοῦ Εὐκλείδου, «στηριζομένης ἐπὶ ἑλληνικῶν πηγῶν», ἡ ὁποία ὑφίσταται ἀνέκδοτος μέχρι σήμερον καὶ θὰ ἦτο εὐχῆς ἔργον νὰ δοθῇ μίαν ἡμέραν εἰς τὸ φῶς τῆς δημοσιότητος, ἵνα καταστῇ δυνατὴ ἡ μόρφωσις ἀκριβεστέρας εἰκόνος διὰ τὴν προσωπικότητα τοῦ ἐνδόξου συγγραφέως τῶν Στοιχείων.

155. Ὁ Ali ibn Muhammed ibn Muhammed ibn Ali al Qeresi al Basti al Qalasadi (δηλαδὴ ὁ «εὐσεβής»), ἔζησεν κατὰ τὰ ἔτη 1423 - 1494 (ἢ 1495) καὶ θεωρεῖται ὡς ὁ τελευταῖος μαθηματικὸς κάποιας ἀξίας, τὸν ὁποῖον παρήγαγεν ἡ ἀραβικὴ φυλή.

Τοῦ ἄραβος τούτου γνωρίζομεν ἕνα βιβλίον ἀριθμητικῆς, γραφέν, ὅπως λέγει ὁ συγγραφεύς, εἰς ὕφος «ἴσον ἀπέχον ἀπὸ τὴν ἔλλειψιν καὶ τὴν ἀσάφειαν». Τὸ ἔργον ἀποτελεῖ μέρος ἄλλου μεγαλυτέρου, φέροντος τίτλον καθαρῶς ἀνατολικοῦ τύπου: Ἀνύψωσις τῆς ἐσθῆτος τῆς ἐπιστήμης τοῦ λογισμοῦ. Ἀποτελεῖται ἀπὸ μίαν εἰσαγωγὴν εἰς 4 μέρη καὶ ἕνα ἐπίλογον. Τὸ Μέρος I πραγματεύεται τὰς πράξεις τῶν ἀκεραίων (Κεφ. I - IV)· εἰς τὸ Κεφ. V διδάσκεται ἡ διαιρετότης διὰ 3, 6 ἢ 9,

εἰς δὲ τὸ ἑπόμενον ἡ ἀνάλυσις ἑνὸς κοινοῦ κλάσματος M/N, εἰς ἕνα ἀκέραιον (δυνάμενον νὰ λείπῃ) καὶ κλάσματα κατὰ τὴν μορφήν:

$$\frac{M}{N} = n + \frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\alpha\beta} + \frac{c}{\alpha\beta\gamma} + \cdots$$

Εἰς τὸ Κεφάλαιον VII διδάσκεται ὁ τρόπος τῆς ἀναλύσεως ἑνὸς ἀκεραίου εἰς μέρη ἀνάλογα δοθέντων ἀριθμῶν καὶ εἰς τὸ ἑπόμενον ἡ «δοκιμὴ διὰ 7».

Εἰς τὸ Μέρος II ἐκτίθεται κατὰ τρόπον ἀνάλογον ἡ θεωρία τῶν κλασμάτων καὶ οἱ κανόνες τῶν πράξεων ἐπ' αὐτῶν. Μὲ ἀνάλογα κριτήρια ἐκτίθεται εἰς τὸ Μέρος III ἡ θεωρία τῶν τετραγωνικῶν ἀσυμμέτρων. Μετὰ τὴν διδασκαλίαν ἐξαγωγῆς τῆς τετραγωνικῆς ρίζης ἀκεραίων τελείων τετραγώνων, εἰσέρχεται εἰς τὴν θεωρίαν ἐξαγωγῆς τῶν τετραγωνικῶν ριζῶν κατὰ προσέγγισιν πρῶτα ἀκεραίων καὶ ἐν συνεχείᾳ κλασμάτων. Κατόπιν πραγματεύεται τὰς πράξεις μὲ ριζικά. Εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο ὁ συγγραφεύς, ἂν καὶ δὲν τὸ δηλώνει, φαίνεται νὰ ἐμπνέεται ἀπὸ τὸ Βιβλίον X τῶν Σ τ ο ι χ ε ί ω ν τοῦ Εὐκλείδου, διότι ἐφαρμόζει τύπους μετασχηματισμοῦ, ὅπως ὁ ἑξῆς:

$$\sqrt{A+\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A}{2} + \sqrt{\frac{A^2-B}{4}}} + \sqrt{\frac{A}{2} - \sqrt{\frac{A^2-B}{4}}} \ .$$

Τὸ Μέρος IV, ὑπὸ τὸν τίτλον «περὶ προσδιορισμοῦ τοῦ ἀγνώστου», ἐκθέτει τὰ στοιχεῖα τῆς ἀλγέβρας. Ἀρχίζει μὲ ἕνα κεφάλαιον σχετικὸν μὲ τὰς ἀναλογίας, τὸ ὁποῖον ἀκολουθεῖται ἀπὸ ἄλλο σχετικὸν μὲ τὴν λύσιν πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων διὰ τῆς μεθόδου τῆς διπλῆς αὐθαιρέτου ἀφετηρίας (regula falsi) [31]. Εἰς τὸ ἑπόμενον κεφάλαιον ὁ συγγραφεὺς εἰσέρχεται εἰς τὴν οὐσίαν τῆς ἀλγέβρας (μεταφορὰ ὅρου ἀπὸ ἑνὸς μέλους εἰς τὸ ἄλλο, ἀναγωγὴ ὁμοίων ὅρων), περιορίζων τὰς θεωρίας του εἰς ἐξισώσεις πρώτου καὶ δευτέρου βαθμοῦ. Σημειωθήτω, ὅτι τῶν τελευταίων τούτων ὁ συγγραφεὺς δὲν ἐξετάζει παρὰ μίαν μόνον ρίζαν.

Εἰς τὸν ἐπίλογον εὑρίσκομεν ἐφαρμογὰς ἐνδιαφερόντων τύπων· ἄθροισμα τῶν n πρώτων φυσικῶν ἀριθμῶν, τῶν τετραγώνων καὶ τῶν κύβων των, ὡς καὶ τὰ ἀνάλογα μόνον διὰ περιττοὺς ἢ μόνον δι' ἀρτίους ἀριθμούς.

Ἐν ὀλίγοις τὸ ἔργον ἀνταποκρίνεται πλήρως εἰς ὅσα ὁ συγγραφεὺς ἀνέλαβε τὴν ὑποχρέωσιν νὰ προσφέρῃ εἰς τοὺς ἀναγνώστας του. Ἐὰν δὲ ἐκάμαμεν μίαν συνοπτικὴν ἀπαρίθμησιν τοῦ περιεχομένου, τοῦτο ἔγινε διὰ νὰ δώσωμεν εἰς ἐκεῖνον, ὁ ὁποῖος μᾶς παρακολουθεῖ, μίαν ἰδέαν τοῦ ὕψους, εἰς τὸ ὁποῖον ἔφθασεν ἡ ἐπιστήμη τοῦ Λογισμοῦ, εἰς χεῖρας τῶν Ἀράβων.

156. Τελευταῖος ἐμφανίζεται ἐπὶ τῆς σκηνῆς ὁ Muhammed ibn al-Hosein Beha Eddin al-Amili· εἶναι ἕνας Πέρσης ζήσας κατὰ τὴν περίοδον

1547 - 1622, εἰς τὸν ὁποῖον ἀποδίδεται ἡ πρώτη πειστικὴ ἀπόδειξις περὶ τοῦ ἀδυνάτου τῆς λύσεως εἰς ἀκεραίους ἀριθμοὺς τῆς ἐξισώσεως :

$$x^3 + y^3 = z^3.$$

Ἔγραψεν ἐπίσης ἕνα ἐγχειρίδιον ἀριθμητικῆς, τὸ ὁποῖον μία γερμανικὴ μετάφρασις ἔθεσεν εἰς τὴν διάθεσιν τῶν μὴ εἰδικῶν ἀνατολιστῶν. (**G. H. L. Nesselman,** Essenz der Rechenkunst von Mohammed Beha - eddin ben Alhosain aus Amul, arabisch und deutsch, Berlin, 1843).

Θὰ ἠδυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν κατάλογον καὶ κάποιον Abenbeder, ἄραβα τῆς Ἱσπανίας, συγγραφέα ἑνὸς μετρίου ἐγχειριδίου ἀλγέβρας, τὸ ὁποῖον ἐδημοσιεύθη ἐν περιλήψει ὑπὸ τοῦ **J. Sanchez Perez** (Compendio de algebra de Abenbeder, Μαδρίτη, 1916). Ἀλλὰ ἡ πλήρης ἄγνοια τῆς ἐποχῆς, εἰς τὴν ὁποίαν ἔζησεν, καθιστᾷ ἀδύνατον ν' ἀποσαφηνίσωμεν τὴν θέσιν, ἡ ὁποία τοῦ ἁρμόζει εἰς τὴν ἱστορίαν τῆς μαθηματικῆς σκέψεως μεταξὺ τῶν πιστῶν τοῦ Κορανίου. Πιθανῶς ἀνήκει εἰς τὴν ἐποχήν, κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ Εὐρώπη, ἀνανήψασα τελικῶς ἀπὸ τὸν μακρὸν μεσαιωνικὸν λήθαργον, ἤρχισε ν' ἀπαλλάσσεται ἀπὸ τὴν κατάστασιν μαθητρίας τῶν ἀνατολικῶν λαῶν καὶ ν' ἀποβαίνῃ βαθμηδὸν διδάσκαλος, ἐμπνέων τὴν προσοχὴν καὶ τὸν σεβασμόν. Ἡ ἐποχή, κατὰ τὴν ὁποίαν ἀνέμενε νὰ διδαχθῇ ἀπὸ εὐρυμαθεῖς μεταφραστάς, ὅπως ὁ Γεράρδος τῆς Κρεμώνης, ὁ Πλάτων Τιμπουρτῖνος, ὁ Ροβέρτος Τσέστερ, ἔσβησε πλέον διὰ παντός.

Ἐὰν τώρα, προτοῦ ἐγκαταλείψωμεν τοὺς ἄραβας μαθηματικοὺς τοῦ Μεσαίωνος, ρίψωμεν ἕνα βλέμμα εἰς τὸ ἔργον, τὸ ὁποῖον ἐπετέλεσαν, εἴμεθα ἐκ τῶν πραγμάτων ὑποχρεωμένοι ν' ἀναγνωρίσωμεν τὴν ὑψηλὴν καὶ ἀναμφισβήτητον ἀξίαν του. Δὲν ἔδειξαν ἁπλῶς οἱ Ἄραβες, ὅτι ἦσαν εἰς θέσιν νὰ ἐκτιμήσουν καὶ ν' ἀφομοιώσουν τὰς ἀνακαλύψεις τῶν Ἑλλήνων καὶ τῶν Ἰνδῶν, ἀλλ' ἀπέδειξαν ἐμπράκτως, ὅτι εἶχον καὶ τὴν δύναμιν νὰ ἐπιφέρουν σημαντικὰς προόδους εἰς τὴν τριγωνομετρίαν, εἰς τὴν θεωρίαν τῶν ἀριθμῶν καὶ εἰς τὴν ἀρχαίαν ἀπειροστικὴν γεωμετρίαν. Καὶ εἶναι πράγματι λυπηρὸν τὸ γεγονός, ὅτι ὅλη αὐτὴ ἡ ἀνθοφορία ἔγινεν ἀτελῶς γνωστὴ εἰς τὴν Εὐρώπην καὶ μόνον ὅταν εἶχε πλέον χάσει τὸ ἄρωμα τῆς δροσερότητος καὶ τὴν δύναμιν τῆς γονιμότητος. Καὶ ἂν ἀκόμη ἡ ἀραβικὴ ἐπιστήμη δὲν δύναται νὰ παραβληθῇ, ὅπως ἡ ἐπιστήμη τῶν Ἑλλήνων, πρὸς ἕνα ἥλιον ἀνεξαντλήτου γονιμότητος, δὲν διαφέρει πολὺ ἀπὸ τὸν ρόλον τοῦ σιωπηλοῦ δορυφόρου τῆς γῆς, ἀφοῦ καὶ ἐκείνη, ἡ ἀραβικὴ δηλαδὴ ἐπιστήμη, συλλέγουσα, ἀνακλῶσα καὶ ἀναμεταδίδουσα τὸ λαμβανόμενον φῶς, ὑπῆρξε διὰ τὴν σκεπτομένην ἀνθρωπότητα ὄργανον τῆς Θείας Προνοίας, τὸ ὁποῖον διέλυσε βαθμηδὸν τὰ μεσαιωνικὰ σκότη καὶ ἐπανέφερε τὰ βήματα τῆς ἀνθρωπότητος ἐπὶ τῆς λεωφόρου τῶν μεγάλων κατακτήσεων, ποὺ εἶχον χαράξει οἱ Ἕλληνες.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XII

Η ΑΝΑΓΕΝΝΗΣΙΣ ΕΙΣ ΤΗΝ ΙΤΑΛΙΑΝ LEONARDO FIBONACCI

Βιογραφία

157. Βαθὺς λήθαργος εἶχε κυριεύσει τοὺς εὐρωπαϊκοὺς λαοὺς ὑπὸ τὸ μεσαιωνικὸν σκότος, ποὺ ἐκάλυπτε τὴν Δύσιν. Τὰ ἀραιὰ συμπτώματα ἀφυπνίσεως ἐχρησίμευον μόνον εἰς ἀγόνους καὶ ἀτέρμονας σχολιασμοὺς ἀρχαίων φιλοσόφων ἢ εἰς ἐπιμόνους ἐκστρατείας πρὸς ἀπελευθέρωσιν τῶν Ἁγίων Τόπων ἀπὸ τὴν κατοχὴν τῶν ἀπίστων. Αἴφνης, ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς ἰταλικῆς χερσονήσου, ἐξαπελύθησαν ἐκθαμβωτικοὶ σπινθῆρες, οἱ ὁποῖοι μετουσιώθησαν μὲ τὸν καιρὸν εἰς τὸ φῶς, τὸ πλημμυρίζον σήμερον τὴν ἀνθρωπότητα. Βλέπομεν εἰς τὴν Πίζαν νὰ ἐγείρωνται μνημειώδη ἔργα τέχνης, ὡς εἶναι ἡ μαρμαρίνη Μητρόπολις (XI αἰών), ὁ κεκλιμένος Πύργος (XII αἰών), τὸ Βαπτιστήριον (XII αἰών), τὰ ὁποῖα κατέστησαν τὴν πρωτεύουσαν τῆς Τοσκάνης κοιτίδα τῆς ἀρχιτεκτονικῆς καὶ ὅλης τῆς ἰταλικῆς τέχνης. Ἐκεῖ εἶδε τὸ φῶς ὁ ἄνθρωπος, ὁ προωρισμένος νὰ ἐπαναφέρῃ τοὺς εὐρωπαίους διανοουμένους εἰς τοὺς πλουσίους λειμῶνας τῶν ἀριθμῶν καὶ τῶν σχημάτων καὶ νὰ καταστήσῃ τὴν πατρίδα του ἔνδοξον καὶ εἰς τὸ ἐπιστημονικὸν πεδίον.

Ὀλίγαι καὶ ἐπισφαλεῖς εἶναι αἱ βιογραφικαὶ πληροφορίαι γύρω ἀπὸ τὸν ἄνθρωπον αὐτόν, ὁ ὁποῖος ἐκέρδισε τὴν δόξαν συνδέσας τὸ ὄνομά του μὲ τὴν ἀναγέννησιν τῶν ἐπιστημῶν εἰς τὴν Εὐρώπην, περίπου ἕνα αἰῶνα προτοῦ ὁ Δάντης καθορίσῃ μονίμως τὰ πλαίσια τῆς δημοτικῆς ἰταλικῆς γλώσσης. Βέβαιον εἶναι ὅτι ἡ οἰκογένεια, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνῆκεν, ὑφίστατο εἰς τὴν Πίζαν ἀπὸ τοῦ XI αἰῶνος, εἶναι ὅμως σημεῖον ἀντιλεγόμενον τὸ ζήτημα κατὰ πόσον ὁ Bonaccio— ἐκ τοῦ ὁποίου ἔλαβε τὸ ὄνομά της ἡ οἰκογένεια — ἦτο ἢ δὲν ἦτο ὁ πατὴρ τοῦ Leonardo, τοῦ μαθηματικοῦ δηλαδή, μὲ τὸν ὁποῖον πρόκειται τώρα ν' ἀσχοληθῶμεν. Αἱ φράσεις «filio Bonacj» ἢ « de filijs Bonacij», τὰς ὁποίας φέρουν ὡς ἐπικεφαλίδας τὰ χειρόγραφα

τῶν ἔργων του, ὡδήγησαν τὴν ὁλότητα σχεδὸν τῶν ἱστορικῶν εἰς τὸ συμπέρασμα, ὅτι ἦτο πράγματι υἱὸς κάποιου Bonaccio (ἐκ τοῦ ὁποίου παρήχθη τὸ οἰκογενειακὸν ὄνομα Fibonacci). Ὁ Boncompagni ὅμως, ἔπειτα ἀπὸ βαθείας μελέτας γύρω ἀπὸ τὰ μεσαιωνικὰ χειρόγραφα, διεπίστωσεν ὅτι εἶναι συχναὶ αἱ περιπτώσεις οἰκογενειῶν, αἱ ὁποῖαι ἐλάμβανον τὸ ὄνομα τοῦ ἐνδοξοτέρου ἐκ τῶν μελῶν των καὶ συνεπέρανεν ἐξ αὐτοῦ, ὅτι ἐνδέχεται ὁ Λεονάρδος Πιζᾶνο (Leonardo Pisano) νὰ εἶναι ἁπλούστατα κατιὼν συγγενὴς τοῦ Bonaccio καὶ ὄχι ἀναγκαίως υἱός του. Ὑπόθεσις εὑρίσκουσα ἐπιβεβαίωσιν εἰς ἄλλα τεκμήρια, ἐκ τῶν ὁποίων φαίνεται νὰ προκύπτῃ τὸ συμπέρασμα, ὅτι ὁ πατὴρ τοῦ Λεονάρδου ὠνομάζετο Γουλιέλμος (Guglielmo).

Νέα δεδομένα, ὡς πρὸς τὰ ὁποῖα δὲν ἠγέρθη ἀμφιβολία, καθ' ὅσον προήρχοντο ἀπὸ τὸν ἴδιον, εἶναι ὅτι ἐγεννήθη κατὰ τὸ 1170 καὶ ὅτι ὁ πατήρ του ἐξετέλη χρέη γραμματέως εἰς τὴν Δημοκρατίαν τῆς Πίζης. Ὑπὸ τὴν ἰδιότητά του αὐτὴν ἀπεστάλη κατὰ τὸ 1192 εἰς ἐκπλήρωσιν ὡρισμένης ὑπηρεσίας εἰς τὸ τελωνεῖον τῆς Bugia (πόλις τῆς Βερβερίας, κειμένη ἐπὶ τῆς ἀφρικανικῆς ἀκτῆς, πλησίον τοῦ Ἀλγερίου). Ἀπὸ ἐκεῖ ἐκάλεσε τὸν υἱόν του νὰ ἔλθῃ, διὰ νὰ ἐκμάθῃ τὴν χρῆσιν τῶν ἀριθμητικῶν μεθόδων, τὰς ὁποίας πιθανῶς εἶχον διδαχθῆ οἱ Ἄραβες ἀπὸ τοὺς Ἰνδοὺς καὶ τὰς ὁποίας διέδιδον εἰς ὅλας τὰς χώρας, ὅπου ἐκυριάρχει ἡ ἡμισέληνος.

Εἶναι ἐν τούτοις βέβαιον, ὅτι ὁ νεαρὸς Λεονάρδος, ὑπερακοντίζων τὰς προθέσεις τοῦ πατρός του, ἐπροχώρησε τὰς μελέτας του μέχρι τῶν ὑψηλοτέρων περιοχῶν τῆς ἐπιστήμης τοῦ λογισμοῦ, ὑφιστάμενος τὴν γοητευτικὴν ἐπίδρασιν τῶν μαθηματικῶν ἔργων τῶν Muhammed ibn Musa, Tabit ibn Quorra, Abu Kamil, Albategno, Ibn Haitham, Al - Biruni, Al - Nasawi, Al- Karchi, Omar al Chaijami, οἱ ὁποῖοι ἀπὸ τοῦ IX μέχρι τοῦ XI αἰῶνος ἐκραταίωσαν ἀνὰ τὸν κόσμον τὴν φήμην τῆς ἀραβικῆς φυλῆς. Ὠθούμενος περισσότερον ἀπὸ τὴν δίψαν τῆς γνώσεως παρὰ ἀπὸ τὸν πόθον τοῦ πλουτισμοῦ, ἐγκατέλειψε τὴν Bugia καὶ διέτρεξεν ὅλην τὴν λεκάνην τῆς Μεσογείου, φθάνων μέχρι τῆς Κωνσταντινουπόλεως καὶ ἐναλλάσσων τὴν ἄσκησιν τοῦ ἐμπορίου μὲ τὰς μαθηματικάς του σπουδάς. Ὅτι δὲ ἐφεγγοβόλει τὸ πνεῦμα του εἰς τοὺς τόπους τῆς μεταβάσεώς του, προκύπτει ἀπὸ τὰ προβλήματα, τὰ ὁποῖα τοῦ ἐπροτείνοντο καὶ τὰ ὁποῖα κατέγραφεν ἔπειτα μὲ τὰς λύσεις των εἰς τὰ ἔργα του.

Περὶ τὸ τέλος τοῦ XII αἰῶνος ἐπέστρεψεν εἰς τὴν πατρίδα καὶ κατὰ τὰς ἀρχὰς τοῦ ἑπομένου (1202) ἐξέδωσε τὸ θεμελιῶδες ἔργον του Liber Abbaci (Βιβλίον ἄβακος, ἤτοι ἐγχειρίδιον ἀριθμητικῆς), τὸ ὁποῖον εἶχε τοιαύτην ἐπιτυχίαν, ὥστε πολὺ γρήγορα ἐχρειάσθη μία βελτιωμένη ἐπανέκδοσις. Εἰς τὴν ἀνασύνταξιν αὐτήν, ἡ ὁποία πράγματι ἐγένετο τὸ 1228, τὸν παρώτρυνεν ἰδίως ὁ φίλος του

«Μιχάλης Σκῶτος, ποὺ ἔμαθε στ' ἀλήθεια
τῆς μαγικῆς ἀπάτης τὸ παιχνίδι»
(Κόλασις, XX, 116-117).

Τὸ ἔργον αὐτὸ ἔχει ἀρετάς, αἱ ὁποῖαι δυσκόλως καθιστοῦν πιστευτόν, ὅτι ἐγράφη ἀπὸ ἕνα ἔμπορον πρὸς χρῆσιν τῶν συναδέλφων του. Τόσον τὸ περιεχόμενον καὶ ἡ μορφή, ὅσον καὶ ἡ αὐστηρότης καὶ ἡ διαύγεια τοῦ ὕφους μαρτυροῦν, ὅτι πρόκειται μᾶλλον περὶ ἑνὸς ἔργου, εἰς τὸ ὁποῖον κατοπτρίζεται ἕνα πλῆρες σύστημα διδασκαλίας τοῦ ἀριθμητικοῦ λογισμοῦ. Μία τοιαύτη διαπίστωσις ἀποτελεῖ συμφυὲς ἐπιχείρημα πρώτης τάξεως πρὸς ὑποστήριξιν τῆς θέσεως, ὅτι ὁ Λεονάρδος κατεῖχε μίαν καθηγητικὴν ἕδραν εἰς τὴν πατρίδα του*.

Τὸ 1223, ἐνδίδων εἰς τὰς παρακλήσεις καὶ προτροπὰς ἄλλου φίλου του, ἔδωσεν εἰς τὴν δημοσιότητα ἕνα δεύτερον ἔργον του, διδακτικοῦ χαρακτῆρος, ὑπὸ τὸν τίτλον Practica Geometriae (Ἐφαρμογαὶ τῆς Γεωμετρίας). Δύο ἄλλα σωζόμενα ἔργα τοῦ Λεονάρδου, περὶ τῶν ὁποίων θὰ ὁμιλήσωμεν**, φέρουν χρονολογίαν 1225.

Ἡ ἐξαιρετικὴ ἐπιτυχία, τὴν ὁποίαν εἶχον τὰ ἔργα του, ὡς καὶ ἡ εὔνοια, μὲ τὴν ὁποίαν τὸν περιέβαλλεν ὁ αὐτοκράτωρ Φρειδερῖκος II, ἐπὶ παρουσίᾳ τοῦ ὁποίου ἔλυσε κάποτε μερικὰ σπουδαῖα ζητήματα, ποὺ θὰ ἴδωμεν καταχωρημένα εἰς τὰ ἔργα του, ἀποδεικνύουν ἀσφαλῶς τὴν πρὸς αὐτὸν μεγάλην ἐκτίμησιν τῶν συμπολιτῶν του.

Παρὰ ταῦτα οἱ ἱστορικοὶ τῶν μαθηματικῶν, ἀποδίδοντες περιφρονητικὴν σημασίαν εἰς τὸ ἐπίθετον «bigollo», (θεωρούμενον ὡς συνώνυμον τοῦ «bighellone», δηλαδὴ «ἀργόσχολος») μὲ τὸ ὁποῖον τὸν ἀπεκάλουν, τὸν παρέστησαν ὡς πνεῦμα ἀκατάληπτον εἰς τοὺς συμπολίτας του, οἱ ὁποῖοι μάλιστα τὸν ἐχλεύαζον διὰ τὴν ἀφειδῆ σπατάλην τοῦ χρόνου του εἰς καθαρῶς ἐπιστημονικὰς ἀσχολίας.

Ἀλλ' ἕνα διάταγμα, ἐκδοθὲν τὸ 1240 ὑπὸ τοῦ Δήμου τῆς Πίζης καὶ ἐγγεγραμμένον ἐπὶ μαρμάρου ὑφισταμένου μέχρι σήμερον, ἀποδεικνύει, ἀντιθέτως, ποίας ἐξαιρετικῆς ὑπολήψεως ἔχαιρεν ὁ Λεονάρδος εἰς τὴν πα-

* Εἰς ἐνίσχυσιν τῆς εἰκασίας αὐτῆς ἔρχεται τὸ γεγονός, ὅτι εἰς τὴν Γερμανίαν καὶ τὴν Ὀλλανδίαν ὁ «Rechenmeister» ἦτο δημόσιος ὑπάλληλος, ἀντίστοιχος πρὸς τοὺς ἰδικούς μας λογιστάς, ἔχων τὸ μονοπώλιον τῆς ἐμπορικῆς ἐκπαιδεύσεως. Βλ. L. C. Karpinski, The History of Arithmetic (Chicago, 1925, σελ. 271).

** Εἶναι σκόπιμον νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι ὡς πρὸς τὰς χρονολογίας τὰς σχετικὰς μὲ τὴν λεοναρδικὴν περίοδον δὲν ὑπάρχει ἀπόλυτος ὁμοφωνία μεταξὺ τῶν ἱστορικῶν. Αἱ ἀποκλίσεις ὀφείλονται εἰς τὸ γεγονὸς ὅτι μέχρι τῆς 1ης Ἰανουαρίου 1750, τὸ ἔτος ἤρχιζεν εἰς τὴν Πίζαν εἰς τὰς 25 Μαρτίου καὶ ὑστέρει κατὰ ἕνα ἔτος μὲ τὴν σύγχρονον μέτρησιν. Ἀλλὰ σπανίως ἐλαμβάνετο ὑπ' ὄψιν ἡ ἐπελθοῦσα καθυστέρησις 1 ἔτους, 2 μηνῶν καὶ 25 ἡμερῶν.

τρίδα του καὶ ἀποκλείει τελείως τὴν ἰδέαν, ὅτι τὸ ἐπίθετον ἐκεῖνο εἶχε τάχα ὑβριστικὴν σημασίαν. Διότι πῶς νὰ δεχθῶμεν, ὅτι ὁ μαθηματικός μας ἠδύνατο νὰ θεωρηθῇ ὀκνηρὸς καὶ φυγόπονος, ὅταν ἡ ἀνωτάτη διοικητικὴ ἀρχὴ τῆς Πίζης, διὰ νὰ μὴ στερηθῇ τῶν ὑπηρεσιῶν του, τοῦ ἐξεχώρισε χρηματικὴν ἀνταμοιβὴν διὰ τὴν θέσιν τοῦ κυβερνητικοῦ λογιστοῦ, τὴν ὁποίαν μέχρι τότε κατεῖχεν ἀμισθί;

Αὐτὴ εἶναι ἡ τελευταία ἀξιόπιστος μαρτυρία, τὴν ὁποίαν ἔχομεν διὰ τὸν Fibonacci, ἐνῷ ὅλαι αἱ ἄλλαι διαβεβαιώσεις δὲν εἶναι τίποτε ἄλλο παρὰ ἀτελῆ ἐπαγωγικὰ συμπεράσματα ἱστορικῶν, οἱ ὁποῖοι κατέφυγον εἰς τὴν φαντασίαν των πρὸς κάλυψιν ἀντιαισθητικῶν χασμάτων εἰς τὰς ἀφηγήσεις των.

Τὸ πλῆθος τῶν κυκλοφορούντων τότε χειρογράφων, ἀντιτύπων τῶν ἔργων τοῦ Fibonacci, ἀποδεικνύει πόσον τὰ ἔργα αὐτὰ ἐξετιμῶντο καὶ ἐμελετῶντο ἀπὸ τοὺς συγχρόνους του καὶ τοὺς ἀμέσους διαδόχους των, οἱ ὁποῖοι δὲν ἐμνημόνευον πάντοτε τὰς πηγάς, ἐκ τῶν ὁποίων ἤντλουν. Ἀργότερα ὅμως παρημελήθησαν τόσον, ὥστε ὁ N. Tartaglia τὸν XVI αἰῶνα καὶ ὁ P. Cossali τὸν XVIII ἐγνώριζον περὶ αὐτῶν τόσα μόνον ὅσα ἀνεφέροντο ὑπὸ ἑνὸς συγγραφέως τοῦ XV αἰῶνος, τοῦ Luca Pacioli. Τὸ γεγονὸς τοῦτο ἐξηγεῖ ἐπαρκῶς πῶς ὁ Heilbronner, εἰς τὸ ἔργον του Historia Matheseos Universae (1742), περιέπεσεν εἰς ἀμφιβολίαν, ἡ ὁποία ἔφθασε μέχρι συγχύσεως τοῦ Λεονάρδου μὲ τὸν Ἰωάννην Πιζᾶνο (Giovanni Pisano), συγγραφέα ἑνὸς ἔργου ἔχοντος τίτλον Perspectiva commumis (Στοιχεῖα προοπτικῆς).

Ἐκεῖνοι οἱ ὁποῖοι, πρὸς τιμήν των, ἐπανέφερον εἰς τὸ προσκήνιον τῆς προσοχῆς καὶ τοῦ ἐνδιαφέροντος τὸν Λεονάρδον καὶ τὰ ἔργα του, εἶναι κυρίως μερικοὶ εὐρυμαθεῖς Ἰταλοὶ τοῦ XVIII καὶ XIX αἰῶνος, μεταξὺ τῶν ὁποίων ὁ G. Libri (1802-1869) καὶ πρὸ πάντων ὁ B. Boncompagni (1821-1894), ὁ ὁποῖος μὲ τὴν διακρίνουσαν αὐτὸν ἐπιμέλειαν ἐπεξειργάσθη μίαν πράγματι σπουδαίαν ἔκδοσιν τῶν Ἁ π ά ν τ ω ν του. Χάρις εἰς αὐτὴν ὁ μεγάλος, περὶ τοῦ ὁποίου ἀσχολούμεθα, κατέλαβεν εἰς τὴν ἱστορίαν τῶν μαθηματικῶν τὴν προσήκουσαν θέσιν.-

«Liber Abbaci»

158. Ὁ τίτλος, τὸν ὁποῖον ἔδωσεν ὁ Λεονάρδος Πιζᾶνο εἰς τὸ κύριον ἔργον του, φαίνεται ν' ἀποδεικνύῃ, ὅτι ἀπὸ τοῦ XII αἰῶνος ἡ λέξις «ἄβαξ» εἶχε χάσει τὴν ἀρχικήν της σημασίαν, δηλαδὴ «ὄργανον βοηθητικὸν πρὸς ἐκτέλεσιν ἀριθμητικῶν πράξεων», διὰ νὰ προσλάβῃ τὴν ἔννοιαν τῆς «ἀριθμητικῆς» καὶ συχνὰ τὴν ἀκόμη εἰδικωτέραν ἔννοιαν ἀριθμητικῆς βασιζομένης εἰς τὴν χρῆσιν τῶν ἰνδο-αραβικῶν ψηφίων.

τρίδα του καὶ ἀποκλείει τελείως τὴν ἰδέαν, ὅτι τὸ ἐπίθετον ἐκεῖνο εἶχε τάχα ὑβριστικὴν σημασίαν. Διότι πῶς νὰ δεχθῶμεν, ὅτι ὁ μαθηματικός μας ἠδύνατο νὰ θεωρηθῇ ὀκνηρὸς καὶ φυγόπονος, ὅταν ἡ ἀνωτάτη διοικητικὴ ἀρχὴ τῆς Πίζης, διὰ νὰ μὴ στερηθῇ τῶν ὑπηρεσιῶν του, τοῦ ἐξεχώρισε χρηματικὴν ἀνταμοιβὴν διὰ τὴν θέσιν τοῦ κυβερνητικοῦ λογιστοῦ, τὴν ὁποίαν μέχρι τότε κατεῖχεν ἀμισθί ;

Αὐτὴ εἶναι ἡ τελευταία ἀξιόπιστος μαρτυρία, τὴν ὁποίαν ἔχομεν διὰ τὸν Fibonacci, ἐνῷ ὅλαι αἱ ἄλλαι διαβεβαιώσεις δὲν εἶναι τίποτε ἄλλο παρὰ ἀτελῆ ἐπαγωγικὰ συμπεράσματα ἱστορικῶν, οἱ ὁποῖοι κατέφυγον εἰς τὴν φαντασίαν των πρὸς κάλυψιν ἀντιαισθητικῶν χασμάτων εἰς τὰς ἀφηγήσεις των.

Τὸ πλῆθος τῶν κυκλοφορούντων τότε χειρογράφων, ἀντιτύπων τῶν ἔργων τοῦ Fibonacci, ἀποδεικνύει πόσον τὰ ἔργα αὐτὰ ἐξετιμῶντο καὶ ἐμελετῶντο ἀπὸ τοὺς συγχρόνους του καὶ τοὺς ἀμέσους διαδόχους των, οἱ ὁποῖοι δὲν ἐμνημόνευον πάντοτε τὰς πηγάς, ἐκ τῶν ὁποίων ἤντλουν. Ἀργότερα ὅμως παρημελήθησαν τόσον, ὥστε ὁ N. Tartaglia τὸν XVI αἰῶνα καὶ ὁ P. Cossali τὸν XVIII ἐγνώριζον περὶ αὐτῶν τόσα μόνον ὅσα ἀνεφέροντο ὑπὸ ἑνὸς συγγραφέως τοῦ XV αἰῶνος, τοῦ Luca Pacioli. Τὸ γεγονὸς τοῦτο ἐξηγεῖ ἐπαρκῶς πῶς ὁ Heilbronner, εἰς τὸ ἔργον του Historia Matheseos Universae (1742), περιέπεσεν εἰς ἀμφιβολίαν, ἡ ὁποία ἔφθασε μέχρι συγχύσεως τοῦ Λεονάρδου μὲ τὸν Ἰωάννην Πιζᾶνο (Giovanni Pisano), συγγραφέα ἑνὸς ἔργου ἔχοντος τίτλον Perspectiva communis (Στοιχεῖα προοπτικῆς).

Ἐκεῖνοι οἱ ὁποῖοι, πρὸς τιμήν των, ἐπανέφερον εἰς τὸ προσκήνιον τῆς προσοχῆς καὶ τοῦ ἐνδιαφέροντος τὸν Λεονάρδον καὶ τὰ ἔργα του, εἶναι κυρίως μερικοὶ εὐρυμαθεῖς Ἰταλοὶ τοῦ XVIII καὶ XIX αἰῶνος, μεταξὺ τῶν ὁποίων ὁ G. Libri (1802-1869) καὶ πρὸ πάντων ὁ B. Boncompagni (1821-1894), ὁ ὁποῖος μὲ τὴν διακρίνουσαν αὐτὸν ἐπιμέλειαν ἐπεξειργάσθη μίαν πράγματι σπουδαίαν ἔκδοσιν τῶν Ἁ π ά ν τ ω ν του. Χάρις εἰς αὐτὴν ὁ μεγάλος, περὶ τοῦ ὁποίου ἀσχολούμεθα, κατέλαβεν εἰς τὴν ἱστορίαν τῶν μαθηματικῶν τὴν προσήκουσαν θέσιν.-

«Liber Abbaci»

158. Ὁ τίτλος, τὸν ὁποῖον ἔδωσεν ὁ Λεονάρδος Πιζᾶνο εἰς τὸ κύριον ἔργον του, φαίνεται ν' ἀποδεικνύῃ, ὅτι ἀπὸ τοῦ XII αἰῶνος ἡ λέξις «ἄβαξ» εἶχε χάσει τὴν ἀρχικήν της σημασίαν, δηλαδὴ «ὄργανον βοηθητικὸν πρὸς ἐκτέλεσιν ἀριθμητικῶν πράξεων», διὰ νὰ προσλάβῃ τὴν ἔννοιαν τῆς «ἀριθμητικῆς» καὶ συχνὰ τὴν ἀκόμη εἰδικωτέραν ἔννοιαν ἀριθμητικῆς βασιζομένης εἰς τὴν χρῆσιν τῶν ἰνδο-αραβικῶν ψηφίων.

Τὸ ἔργον ἀρχίζει μὲ ἕνα ἐνδιαφέροντα πρόλογον αὐτοβιογραφικοῦ χαρακτῆρος, ἀπὸ τὸν ὁποῖον ἀξίζει νὰ ἐξάρωμεν τὴν δήλωσιν τοῦ συγγραφέως, ὅτι παρεκινήθη εἰς τὴν συγγραφὴν τοῦ βιβλίου ἀπὸ τὴν ἐπιθυμίαν του νὰ καταστήσῃ γνωστὰς τὰς ἰδιότητας καὶ τὴν χρῆσιν τῶν ψηφίων τούτων. Ὄχι διότι ἦσαν τότε ἐντελῶς ἄγνωστα εἰς τὴν Εὐρώπην, ἀλλὰ διότι δὲν εἶχεν ἐμπεδωθῆ ἀκόμη ἡ πίστις, ὅτι ἐκ τῶν περιέργων ἐκείνων συμβόλων ἀπορρέει μία λογιστικὴ ἀνωτέρα τῆς στηριζομένης ἐπὶ τῆς ρωμαϊκῆς ἀριθμογραφίας.

Τί ἀκριβῶς ἔμαθεν ἀπὸ τοὺς συγγραφεῖς, ποὺ ἐγνώρισε κατὰ τὴν διάρκειαν τῶν ταξιδίων του καὶ τί προσέθεσεν εἰς αὐτὰς τὰς γνώσεις ὁ ἴδιος, δὲν μᾶς πληροφορεῖ. Ἐν τούτοις, ἀρκετὰ ἐφωτίσθη τὸ ζήτημα τοῦτο ἐκ προσφάτων ἐξερευνήσεων τῆς ἀνατολικῆς φιλολογίας, ἐκ τῶν ὁποίων διεπιστώθη, ὅτι δὲν τοῦ ἦσαν ἄγνωστοι οἱ Mohammed ibn Musa, Abu Kamil, Al-Karchi, Al-Biruni. Οὔτε ἀπεκλείσθη ἡ ἄποψις, ὅτι ἐχρησιμοποίησε καὶ ἄλλο ἔργον ἀρχαιότερον, ἄγνωστον εἰς ἡμᾶς, ἀλλὰ γνωστὸν εἰς τοὺς προαναφερθέντας Ἄραβας. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ εἴπωμεν, ὅτι ὁ προσδιορισμὸς τῶν πηγῶν τοῦ Liber Abbaci ἀποτελεῖ ἱστορικὸν πρόβλημα, τὸ ὁποῖον ἀναμένει τὴν πλήρη λύσιν του.

Κατ' ἐπανάληψιν ἐγράφη, ὅτι ὁ Fibonacci εἶναι ὁ πρῶτος εὐρωπαῖος ἀλγεβριστής. Ἐὰν εἰς τὸ συμπέρασμα τοῦτο ὡδήγησεν ἡ παρατήρησις, ὅτι χρησιμοποιεῖ γράμματα ὑπὸ τὴν ἔννοιαν γενικῶν ἀριθμῶν, δὲν εἶναι δύσκολον ν' ἀντιπροβάλωμεν τὸ ἐπιχείρημα, ὅτι ἡ μέθοδος αὕτη ἦτο ἤδη οἰκεία εἰς τοὺς ἀρχαίους ἕλληνας διανοουμένους, προεξάρχοντος τοῦ Ἀριστοτέλους. Ἐὰν πάλιν θεωρεῖται ὀρθῶς ὡς ἀλγεβρικὸν τεκμήριον ἡ χρῆσις ἑνὸς συστήματος συμβολισμοῦ κανονικοῦ καὶ σταθεροῦ, στηριζομένου ἐπὶ τῆς χρήσεως εἰδικῶν συμβόλων πρὸς παράστασιν τῶν θεωρουμένων ποσοτήτων καὶ τῶν ἐπ' αὐτῶν ἐκτελεστέων πράξεων, καθῆκον μας εἶναι νὰ βεβαιώσωμεν, ὅτι ματαίως θ' ἀναζητήσωμεν τὸ τεκμήριον τοῦτο εἰς τὸ Liber Abbaci.

Καὶ ἂν ἀκόμη θεωρήσωμεν τὴν ἀνωτέρω γνώμην, ὡς ἀπορρέουσαν ἀπὸ τὸ γεγονός, ὅτι ὁ Λεονάρδος ἐπιλύει μὲ διάφορα τεχνάσματα, προβλήματα λυόμενα σήμερον μὲ ἐξισώσεις α' καὶ β' βαθμοῦ, πάλιν δυνάμεθα ν' ἀντιπροβάλωμεν τὸ ἐπιχείρημα ὅτι καὶ ὡς πρὸς τὸ σημεῖον τοῦτο ἔχει προηγηθῆ ὁ Διόφαντος, ὁ ὁποῖος μάλιστα εἶναι ἁπλῶς ὁ ἐξοχώτερος μιᾶς σειρᾶς διανοουμένων, ἐκ τῶν ὁποίων οἱ πρῶτοι εἰς ἡμᾶς γνωστοὶ εἶναι ἐκεῖνοι, ποὺ διεμόρφωσαν τὸ περιεχόμενον τοῦ παπύρου τοῦ Rhind. Διὰ τοὺς λόγους αὐτούς, ἀναφερόμενοι εἰς μίαν διασάφησην, τὴν ὁποίαν ἐξεθέσαμεν εἰς τὴν § 89, δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν, ὅτι, ἂν θέλωμεν νὰ ὁμιλῶμεν περὶ ἀλγέβρας εἰς τὸ κείμενον τοῦ Liber Abbaci, εἶναι ἀνάγκη διὰ τὴν ἱστορικὴν

ἀκρίβειαν νὰ τονίζεται, ὅτι τοῦτο εὑρίσκεται ἀκόμη εἰς τὸ στάδιον ἐξελίξεως, ποὺ ὠνομάσαμεν «ρητορικὴν ἄλγεβραν».

159. Ἀπὸ τὰ δεκαπέντε ἐκτεταμένα Κεφάλαια, ποὺ ἀποτελοῦν τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος ἔργον, τὸ I πραγματεύεται τὰ ἐννέα ψηφία, τὰ καλούμενα ὑπὸ τοῦ Fibonacci «ἰνδικά». Εἰς τὴν πραγματικότητα τὰ ψηφία γίνονται δέκα μὲ τὴν προσθήκην τοῦ μηδενός, «τὸ ὁποῖον ἀραβικὰ ὀνομάζεται zephirum». Διὰ νὰ καταδείξῃ ὁ Λεονάρδος ἐποπτικὰ (ad oculum) τὴν ἀνωτερότητα τοῦ νέου συστήματος, θέτει πρὸ τῶν ὀφθαλμῶν τοῦ ἀναγνώστου τὸν ἀκόλουθον συγκριτικὸν πίνακα ἀριθμῶν, γεγραμμένων ἀντιστοίχως εἰς τὰ δύο συστήματα, ρωμαϊκὸν καὶ ἰνδικόν :

MI 1001	MMMXX 3020	MCXI 1111
MMXXIII 2023	MMMMMDC 5600	MCCXXXIII 1234
MMMXXII 3022	MMM 3000	MMMMCCCXXI 4321

Διὰ νὰ διευκολύνῃ ἀποτελεσματικῶς τὴν ἐκτέλεσιν τῶν ἁπλουστέρων πράξεων τῆς ἀριθμητικῆς ὁ Λεονάρδος, ἐκτὸς τοῦ ὅτι προτείνει ἐπαρκεῖς γνώσεις ἐπὶ τοῦ λογισμοῦ διὰ τῶν δακτύλων, θέτει εἰς τὴν διάθεσιν τῶν ἀναγνωστῶν του μερικοὺς πίνακας προσθέσεως καὶ πολλαπλασιασμοῦ καὶ ἀποδεικνύει πῶς δύνανται νὰ χρησιμοποιηθοῦν ἐπωφελῶς διὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν τεσσάρων πράξεων ἐπὶ ἀριθμῶν, ἀκόμη καὶ σημαντικοῦ μεγέθους (τὸ ἀποδεικνύει διὰ παραδείγματος γινομένου δύο ἀριθμῶν ἀμφοτέρων ὀκταψηφίων). Παρατηρητέον ὅτι αἱ ὡς ἄνω πράξεις ἐκτίθενται κατὰ τὴν ἀκόλουθον σειράν : πολλαπλασιαμός, πρόσθεσις, ἀφαίρεσις, διαίρεσις καὶ ὅτι τὰ ἐξαγόμενα ἐλέγχονται μὲ τὴν βάσανον τοῦ 9, τοῦ 7, ἢ τοῦ 11.

Εἰς τὸ θεμελιῶδες πρόβλημα τῆς ἀναλύσεως ἑνὸς ἀριθμοῦ εἰς πρώτους παράγοντας ὁ Λεονάρδος δίδει τὴν δέουσαν προσοχήν, διδάσκων τὰ κριτήρια τῆς διαιρετότητος διὰ 2, 3,...,13 καὶ συγκεντρώνων καταλλήλως εἰς πίνακα τὰ ἐξαγόμενα τῆς διαιρέσεως διὰ 2,3,...,13 μερικῶν ἀριθμῶν μὴ ὑπερβαινόντων τὸν 200. Ἀξιοσημείωτοι εἶναι μερικοὶ λογαριασμοὶ μὲ τὰ ἐν χρήσει τὴν ἐποχὴν ἐκείνην νομίσματα (λίραι, σολδία, δηνάρια).

Ὅλα αὐτὰ διδάσκονται εἰς τὰ Κεφάλαια II—V τοῦ Liber Abbaci. Τὰ δύο ἑπόμενα πραγματεύονται τὰ κλάσματα· ἀπαντῶνται δὲ εἰς αὐτὰ ἡ ἐν-

νοια καὶ ἡ ἐφαρμογὴ τοῦ «ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου» δοθέντων ἀριθμῶν, ὡς καὶ ἄλλοι πίνακες ἑτοίμων ὑπολογισμῶν. Ἀξίζει ἰδιαιτέρας προσοχῆς ὁ «Πίναξ διαχωρισμοῦ» (Tabula disgregationis) ὁ ὁποῖος, περιέχων ἀναλελυμένα εἰς θεμελιώδη ἀρκετὰ κοινὰ κλάσματα, μαρτυρεῖ τὴν παρουσίαν ἰχνῶν τῆς αἰγυπτιακῆς λογιστικῆς παραδόσεως· ἀναφέρομεν π.χ. τὰς ἀκολούθους ἰσότητας:

$$\frac{13}{20} = \frac{1}{20} + \frac{1}{10} + \frac{1}{2},$$

$$\frac{9}{60} = \frac{1}{20} + \frac{1}{10},$$

$$\frac{98}{100} = \frac{1}{100} + \frac{1}{50} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}.$$

Κατὰ ποῖον τρόπον καὶ ποῖον μέτρον ἐφαρμόζονται αἱ ἐκτιθέμεναι διδασκαλίαι εἰς τὰς ἐμπορικὰς συναλλαγὰς μανθάνομεν εἰς τὰ Κεφάλαια VIII - IX, τῶν ὁποίων ἡ μελέτη συνιστᾶται ἀκόμη καὶ εἰς τοὺς εἰδικοὺς περὶ τὴν μετρολογίαν. Εὑρίσκει ὁ μαθηματικὸς εἰς τὰ Κεφάλαια αὐτά, ὑπὸ τὸ παράδοξον ὄνομα «figura cata» ἢ «chata» μίαν ἐφαρμογὴν τοῦ κανόνος τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν, ἐν συνδυασμῷ πρὸς τὸ θεώρημα τοῦ Μενελάου περὶ τριγώνου διατεμνομένου ὑπὸ εὐθείας. Εἶναι ἡ ἰδία ἀλγοριθμικὴ διαδικασία, ἡ ὁποία εἰς ἄλλα μεσαιωνικὰ ἔργα χαρακτηρίζεται μὲ τὸ ὄνομα «κανὼν τῶν ἓξ ποσῶν» (regula sex quantitatum).

Εἰς προβλήματα ἀφορῶντα τὸν καταμερισμὸν μεταξὺ δύο ἢ περισσοτέρων προσώπων τοῦ κέρδους, τὸ ὁποῖον ἀπέφερε δεδομένον κεφάλαιον, ἀνῆκον κατὰ διαφόρους μερίδας εἰς τοὺς ἑταίρους, ἀφιεροῦται τὸ Κεφάλαιον X. Εἰς τὰ σύγχρονα βιβλία ἀριθμητικῆς ἀπαντῶμεν παρόμοια θέματα ὑπὸ τὸν τίτλον «προβλήματα ἑταιρείας».

Μὲ ζητήματα ἐμπορικῆς ἀριθμητικῆς ἀσχολεῖται ἐπίσης τὸ Κεφάλαιον XI, ὅπου ὁ συγγραφεὺς λύει προβλήματα μετατροπῆς νομισμάτων τῆς ἐποχῆς ἐκείνης, ὡς καὶ ἄλλα ὁμοιάζοντα μὲ τὰ κινεζικὰ (§ 120) καὶ ἀραβικὰ (§ 145) προβλήματα, ποὺ ἐγνωρίσαμεν προηγουμένως καὶ τὰ ὁποῖα ἀπαντῶνται ἀπὸ τοῦδε καὶ ἑξῆς εἰς τὴν εὐρωπαϊκὴν μαθηματικὴν βιβλιογραφίαν. Τὸ πρῶτον πρόβλημα τοιούτου εἴδους, ποὺ ἀπαντᾶται εἰς τὸ Liber Abbaci, ἔχει τὴν ἀκόλουθον ἐκφώνησιν:

«Κάποιος ἀγοράζει μὲ 30 δηνάρια 30 ἐν ὅλῳ πτηνά, μεταξὺ τῶν ὁποίων ὑπάρχουν πέρδικες, περιστεραὶ καὶ στρουθία. Πόσα ἠγόρασεν ἐξ ἑκάστου εἴδους, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ τιμὴ τῆς πέρδικος εἶναι 3 δηνάρια, τῆς περιστερᾶς 2 καὶ τοῦ στρουθίου 1/2». Ἂν καὶ τὸ πρόβλημα εἶναι ἀπροσδιόριστον,

ἐπιδέχεται μοναδικὴν λύσιν εἰς ἀκεραίους θετικοὺς ἀριθμούς, τὴν ὁποίαν καὶ προσδιορίζει ὁ συγγραφεύς : 3 + 5 + 22 = 30. Ἑνὸς ἄλλου ἀναλόγου μορφῆς προβλήματος ὁ Λεονάρδος εὑρίσκει δύο ἐκ τῶν 17 λύσεων, τὰς ὁποίας τοῦτο ἐπιδέχεται. Σημειωτέον ὅτι προβλήματα τοῦ εἴδους τούτου ἀπαντῶνται καὶ εἰς ἄλλο ἔργον τοῦ Λεονάρδου, περὶ τοῦ ὁποίου θὰ κάμωμεν λόγον κατωτέρω (§ 165).

160. Εἰς τὸ Κεφάλαιον XII τοῦ Liber Abbaci εὑρίσκεται μία συλλογὴ προβλημάτων, αἱ ἐκφωνήσεις τῶν ὁποίων ἀποπνέουν ἐνίοτε ἀρώματα τῆς ἄπω Ἀνατολῆς. Μερικὰ εἶναι ὡρισμένα, ἄλλα ἀόριστα καὶ ἄλλα, ὅπως δηλώνει ὁ συγγραφεύς, ἀδύνατα. Σήμερον τὰ προβλήματα αὐτὰ θὰ ἐλύοντο διὰ γραμμικῶν ἐξισώσεων. Ὁ Λεονάρδος προβαίνει εἰς τὴν λύσιν των μὲ διάφορα τεχνάσματα, ὅπως ἐκεῖνα ποὺ ἐφήρμοζεν ὁ Διόφαντος. Τὸ Κεφάλαιον ἀρχίζει μὲ γενικότητας ἐπὶ τῶν ἀριθμητικῶν προόδων, αἱ ὁποῖαι παρέχουν τὰ μέσα διὰ τὴν λύσιν προβλημάτων τῆς ἀκολούθου μορφῆς : «Ἐκ δύο ὁδοιπόρων ὁ πρῶτος διατρέχει 20 μίλια ἡμερησίως, ὁ δεύτερος διατρέχει 1 μίλιον τὴν πρώτην ἡμέραν τοῦ ταξιδίου, 2 τὴν δευτέραν, 3 τὴν τρίτην κ.ο.κ. Ζητεῖται μετὰ πόσας ἡμέρας οἱ δύο ὁδοιπόροι θὰ ἔχουν διατρέξει τὴν ἰδίαν ἀπόστασιν». Ὁ Λεονάρδος εὑρίσκει ἀκριβῶς 39. Μία ἄλλη μεγάλη κατηγορία προβλημάτων ἀναφέρεται εἰς τὰς ἀναλογίας καὶ αἱ λύσεις ἀνάγονται εἰς τὴν μέθοδον τῶν τριῶν.

Ὀλιγώτερον γνωστὴ εἶναι μία κατηγορία προβλημάτων, διὰ τὸν χαρακτηρισμὸν τῶν ὁποίων δύναται νὰ χρησιμεύσῃ τὸ ἀκόλουθον παράδειγμα : «Ἑνὸς ἱστοῦ εἶναι ἐμπεπηγμένον ἐντὸς τοῦ ἐδάφους μέρος ἴσον πρὸς τὸ 1/4 + 1/3 τοῦ μήκους του, εἶναι δὲ τὸ μέρος τοῦτο ἴσον πρὸς 21 πόδας· νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τοῦ ἱστοῦ». Ἀκολουθεῖ μία σειρὰ προβλημάτων, τὰ ὁποῖα, κατὰ βάθος, δὲν διαφέρουν ἀπὸ τὸ γνωστότατον «πρόβλημα τῶν ταχυδρόμων». Ἰδοὺ ἕνα παράδειγμα : «Εἰς ἕνα πύργον ὕψους 100 ποδῶν κατοικοῦν δύο ἑρπετά. Τὸ εὑρισκόμενον εἰς τὴν βάσιν, ἀνέρχεται κάθε ἡμέραν 1/2 πόδα καὶ κατέρχεται 1/4, ἐνῷ τὸ εὑρισκόμενον εἰς τὴν ὀροφὴν κατέρχεται καθ' ἑκάστην 1/5 τοῦ ποδὸς καὶ ἀνέρχεται 1/6. Εἰς ποῖον σημεῖον τοῦ πύργου θὰ συναντηθοῦν ;» Ἡ ἀπάντησις λαμβάνεται μὲ τὴν μέθοδον τῆς αὐθαιρέτου ἀφετηρίας.

Κατὰ τρόπον ἀνάλογον ἐργάζεται ὁ συγγραφεύς, προκειμένου ν' ἀναλύσῃ ἕνα ἀριθμὸν εἰς μέρη ἀποτελοῦντα γεωμετρικὴν πρόοδον· πρόβλημα ἀόριστον, τοῦ ὁποίου περιορίζεται νὰ εὕρῃ μίαν λύσιν. Ἡ μέθοδος τῆς αὐθαιρέτου ἀφετηρίας τοῦ χρησιμεύει ἐπίσης πρὸς ἀνάλυσιν δοθέντος ἀριθμοῦ εἰς μέρη ἀνάλογα ἄλλων γνωστῶν· πρόβλημα ἀπαντώμενον ἐπίσης, ὅταν θέλωμεν νὰ ὑπολογίσωμεν τὸν χρόνον ἐκκενώσεως ἑνὸς βυτίου φέροντος διαφόρους ὀπάς, γνωρίζοντες τοὺς χρόνους ἐκκενώσεως τοὺς ἀντιστοι-

χοῦντας εἰς ἑκάστην ὀπήν. Μεγαλυτέραν δυσκολίαν παρουσιάζει τὸ ἀκόλουθον πρόβλημα :

«Τρεῖς ἄνθρωποι, ἕκαστος τῶν ὁποίων ἔφερεν ὡρισμένον ποσὸν χρημάτων, εὑρίσκουν τυχαίως βαλάντιον μὲ χρήματα. Λέγει ὁ πρῶτος : ἐὰν ἀφήσετε εἰς ἐμὲ τὸ βαλάντιον θὰ ἔχω τόσα χρήματα ὅσα τὰ διπλάσια τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ τρίτου, ὁμοῦ λαμβανόμενα. Ἀναλόγους δηλώσεις ἔκαμαν καὶ οἱ ἄλλοι δύο, μὲ τὴν μόνην διαφοράν, ὅτι ἀντὶ τοῦ διπλασίου εἶπον ἀντιστοίχως τὸ τριπλάσιον καὶ τετραπλάσιον. Νὰ εὑρεθοῦν πόσα χρήματα ἔφερεν ἕκαστος καὶ πόσα περιεῖχε τὸ βαλάντιον». Ὁ Λεονάρδος εὗρε τὴν λύσιν 7, 17, 23, 73, ἀλλὰ εἶναι φανερόν, ὅτι ἄπειρον πλῆθος λύσεων δύναται νὰ ληφθῇ, ἂν πολλαπλασιάσωμεν αὐτοὺς τοὺς ἀριθμοὺς ἐπὶ αὐθαίρετον παράγοντα. Εἰς τὸ Liber Abbaci ἀπαντῶνται πολλὰ ἄλλα προβλήματα, ἀνάλογα τοῦ προηγουμένου, μὲ τὴν διαφορὰν ὅτι τὰ πρόσωπα εἶναι περισσότερα τῶν τριῶν, τὰ δὲ βαλάντια περισσότερα τοῦ ἑνός.

Ἀναφέρομεν ἀκόμη τὸ ἀκόλουθον πρόβλημα, ἐπίσης ἀόριστον, τὸ ὁποῖον ἐνθυμίζει ἄλλο ἀρχαιότερον, εὑρισκόμενον εἰς τὴν Ἑλληνικὴν Ἀνθολογίαν ὑπὸ τὸ ὄνομα τοῦ Εὐκλείδου (§ 93) : «Ἐὰν εἰς τὰ χρήματα, ποὺ κατέχει ὁ A προστεθῇ τὸ τρίτον τῶν ὅσων κατέχει ὁ B, ἐὰν εἰς ἐκεῖνα τοῦ B προστεθῇ τὸ τέταρτον τῶν ὅσων κατέχει ὁ C, ἢ ἐάν, τέλος, εἰς τὰ τοῦ C προστεθῇ τὸ πέμπτον τῶν ὅσων κατέχει ὁ A, ἐπιτυγχάνονται ἀποτελέσματα ἴσα μεταξύ των. Πόσα χρήματα εἶχεν ἕκαστος τῶν A, B, C ;». Ὁ Λεονάρδος εὑρίσκει 45, 48, 52. Ἄλλα προβλήματα ἰσοδυναμοῦν πρὸς τὴν ἀναζήτησιν ἑνὸς πολλαπλασίου τοῦ 7 τοιούτου, ὥστε ἂν διαιρεθῇ διαδοχικῶς διὰ 2, 3, 4, 5, 6 νὰ δίδῃ πάντοτε ὑπόλοιπον τὴν μονάδα, ἢ διαδοχικῶς καὶ ἀντιστοίχως τοὺς ἀριθμοὺς 1, 2, 3, 4, 5. Ὁ ἀναγνώστης θὰ σημειώσῃ ἐδῶ ἕνα σημεῖον ἐπαφῆς μὲ τὰ προβλήματα, ποὺ ἔλυον οἱ Κινέζοι διὰ τοῦ κανόνος Ta - yen (§ 119).

161. Διαφόρου φύσεως εἶναι τὸ χωρίον τοῦ ἰδίου Κεφαλαίου, ὅπου ἐφαρμόζεται ἡ μέθοδος τοῦ Εὐκλείδου πρὸς εὕρεσιν τῶν τελείων ἀριθμῶν. Ὁ Ἕλλην γεωμέτρης δὲν ἀναφέρεται, ὁ δὲ Λεονάρδος παρασύρεται εἰς τὴν ἀσύνετον δήλωσιν «poteris in infinitum perfectos numeros reperire» (δηλαδή : θὰ ἠμπορέσῃς ν' ἀνεύρῃς ἐπ' ἄπειρον τελείους ἀριθμούς) (§ 86).

Εἰς ἕνα ἑπόμενον πρόβλημα ὁ Λεονάρδος ἐφαρμόζει τὴν ἀναδρομικὴν σειράν, τὴν ὁποίαν ὁρίζουν αἱ σχέσεις :

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \quad u_{n+2} = u_n + u_{n+1}.$$

Ὅπως εἶναι γνωστόν, ἡ σειρὰ αὐτὴ (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, . . .) ἐνεφανίσθη ἀργότερα εἰς πολλὰς περιπτώσεις, ὅπως π.χ. εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τῶν διαδοχικῶν ἀνηγμένων τοῦ συνεχοῦς κλάσματος :

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}}}$$

Ὁ δὲ γενικὸς ὅρος τῆς σειρᾶς δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν:

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

Σήμερον ἡ ἐν λόγῳ σειρὰ φέρει δικαίως τὸ ὄνομα τοῦ Fibonacci.

Πράξεις ἀνάλογοι πρὸς ἐκείνας, ποὺ ἀπαιτοῦνται διὰ τὸν ὑπολογισμὸν διαδοχικῶν τελείων ἀριθμῶν, εἶναι ἐφαρμόσιμοι καὶ διὰ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος, τὸ ὁποῖον συνδέεται συνήθως μὲ τὸ «σκάκι»: πόσοι κόκκοι σίτου ἀπαιτοῦνται διὰ νὰ καλύψωμεν τὰ 64 τετραγωνίδια, ἂν θέτωμεν εἰς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν ἀριθμὸν κόκκων διπλάσιον ἐκείνου, ποὺ ἐθέσαμεν εἰς τὸ προηγούμενον, ἀρχῆς γενομένης ἀπὸ τοῦ ἑνὸς κόκκου; Ἡ ἀπάντησις εἶναι ὡς γνωστὸν $2^{64}-1$. Εἶναι μόλις ἀνάγκη νὰ εἴπωμεν, ὅτι ὁ Λεονάρδος ἀκόμη καὶ ὅταν ἔχῃ νὰ κάμῃ μὲ τόσον μεγάλους ἀριθμοὺς ἐργάζεται μὲ θαυμαστὴν ἀσφάλειαν καὶ ἄνεσιν.

Πολλὰ προβλήματα ἐκ τῶν περιεχομένων εἰς τὸ ἑπόμενον Κεφάλαιον XIII ὁδηγοῦν εἰς ἐφαρμογὴν τῆς μεθόδου, τὴν ὁποίαν οἱ Ἄραβες ὀνομάζουν «el chatajm» καὶ τὴν ὁποίαν ὁ Λεονάρδος ἀποκαλεῖ δικαίως «duarum falsarum positionum regula» (δηλαδή: «κανὼν τοῦ διπλοῦ σφάλματος», ἤτοι ἡ μέθοδος τῆς διπλῆς αὐθαιρέτου ἀφετηρίας [51]). Εἰς ποίου εἴδους προβλήματα ἐφαρμόζει τὴν μέθοδον αὐτὴν γίνεται γνωστὸν ἀπὸ τὰς ἑπομένας δύο ἐκφωνήσεις:

«Ἕνας ἐργάτης συνεφώνησε μὲ τὸν ἐργοδότην του νὰ λαμβάνῃ 7 λίρας διὰ κάθε ἡμέραν ἐργασίας καὶ νὰ ἐπιστρέφῃ 4 διὰ κάθε ἡμέραν ἀπουσίας. Εἰς τὸ τέλος τοῦ μηνὸς (τῶν 30 ἡμερῶν) εἰσέπραξε μίαν λίραν. Πόσας ἡμέρας εἰργάσθη;»

«Ἐὰν ὁ A λάβῃ τὸ ἥμισυ τῶν ὅσων κατέχει ὁ B, τὸ τρίτον ἐκ τοῦ C καὶ τὸ τέταρτον ἐκ τοῦ D ἢ ἐὰν ὁ B ζητήσῃ ἀπὸ τὸν C τὸ 1/4, ἀπὸ τὸν D τὸ 1/5 καὶ ἀπὸ τὸν A τὸ 1/6 ἢ ἐὰν ὁ C λάβῃ ἐκ τοῦ D τὸ 1/6 ἐκ τοῦ A τὸ 1/7 καὶ ἐκ τοῦ B τὸ 1/8 ἢ ἐάν, τέλος, ὁ B λάβῃ ἐκ τοῦ A τὸ 1/8, ἐκ τοῦ B τὸ 1/9 καὶ ἐκ τοῦ C τὸ 1/10, τὰ τελικὰ ποσὰ ποὺ προκύπτουν ἑκάστοτε εἶναι ἴσα μεταξύ των. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἡ κοινὴ αὐτὴ τιμή». Εἶναι ἄξιον σημειώσεως ὅτι ὁ Λεονάρδος εὑρίσκει ὡς ἀπάντησιν τὸν τεράστιον ἀριθμὸν 35 839 901.

Εἰς τὸ Κεφάλαιον XIV τοῦ Liber Abbaci διδάσκονται οἱ κανόνες ὑπολογισμοῦ τετραγωνικῶν καὶ κυβικῶν ριζῶν μέσῳ ριζικῶν· σημεῖα ἐπαφῆς μὲ τὸ X Βιβλίον τοῦ Εὐκλείδου εἶναι προφανῆ, δὲν ὁμολογοῦνται ὅμως ὑπὸ τοῦ συγγραφέως, ὁ ὁποῖος εἶναι ἐκ συστήματος φειδωλότατος εἰς ἀναφορὰς τῶν πηγῶν.

Μεγαλυτέρα ποικιλία σημειοῦται εἰς τὰ προβλήματα τοῦ τελευταίου Κεφαλαίου. Μερικὰ ἐξ αὐτῶν λύονται κατ' ἐφαρμογὴν τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος, ὅπως π.χ. εἶναι τὸ ἀκόλουθον : «ἐπὶ ἑνὸς πύργου ἐμπήγεται ἱστὸς ὕψους 20 ποδῶν. Ἐὰν ὁ ἱστὸς ἀνατραπῇ, (διὰ στροφῆς περὶ τὴν βάσιν του) τὸ ἄκρον του πίπτει εἰς ἀπόστασιν 12 ποδῶν ἀπὸ τὴν βάσιν τοῦ πύργου. Ποῖον τὸ ὕψος τούτου ;» Ἄς σημειωθῇ, ὅτι τὰ δεδομένα ἔχουν ἐκλεγῆ οὕτως, ὥστε νὰ προκύπτῃ ὀρθογώνιον τρίγωνον μὲ πλευρὰς ἀναλόγους πρὸς τοὺς γνωστοὺς ἀριθμοὺς 3, 4, 5 τοῦ αἰγυπτιακοῦ τριγώνου. Ἡ συγγένεια τοῦ προβλήματος τούτου πρὸς ἄλλο, ἀπαντώμενον εἰς τὴν κινεζικὴν καὶ ἰνδικὴν βιβλιογραφίαν καὶ ἀναφερόμενον εἰς τὴν θραῦσιν ἑνὸς δένδρου (§ 118), εἶναι προφανής.

Μεγαλυτέραν δυσκολίαν παρουσιάζει τὸ πρόβλημα τοῦ προσδιορισμοῦ τῆς θέσεως μιᾶς πηγῆς μεταξὺ τῶν βάσεων δύο πύργων οὕτως, ὥστε ἡ πηγὴ νὰ εὑρίσκεται εἰς ἴσας ἀποστάσεις ἀπὸ τὰς κορυφὰς τῶν δύο πύργων, τῶν ὁποίων δίδονται τὰ ὕψη καὶ ἡ ὁριζοντία ἀπόστασις. Τὸ πρόβλημα ἀνάγεται σήμερον εἰς τὴν λύσιν μιᾶς πρωτοβαθμίου ἐξισώσεως.

Μὲ τὸ θεώρημα τοῦ Πυθαγόρου συνδέεται ἡ λύσις εἰς ρητοὺς ἀριθμοὺς τῆς ἐξισώσεως:

$$x^2 + \psi^2 = z^2.$$

Ὁ Fibonacci ἐκκινῶν ἀπὸ μίαν γνωστὴν λύσιν a, b, c (π.χ. 3, 4, 5), παράγει ἀπείρους τοιαύτας διὰ τῶν ἀκολούθων σχέσεων :

$$x = \frac{al}{c}, \quad y = \frac{bl}{c}, \quad z = l$$

ὅπου l τυχοῦσα παράμετρος. Δίδει περαιτέρω τεκμήρια ὑψηλοτέρων γεωμετρικῶν γνώσεων, ὑπολογίζων τὴν ἀνύψωσιν τῆς στάθμης τοῦ ὕδατος εἰς μίαν δεξαμενὴν σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, ἀνύψωσις ἡ ὁποία θὰ λάβῃ χώραν, ὅταν ριφθῇ εἰς τὴν δεξαμενὴν λίθος δεδομένου ὄγκου καὶ σχήματος κυβικοῦ ἢ διπλῆς πυραμίδος ἢ σφαιρικοῦ.

Εἰς τὸ περιθώριον μιᾶς τῶν τελευταίων σελίδων τοῦ Liber Abbaci ἀναγράφεται ἡ λέξις «Mahumet» εἰς ὁμολογίαν προσφυγῆς τοῦ συγγραφέως εἰς τὰ φῶτα τοῦ Muhammed ibn Musa (§ 143). Καὶ πράγματι ὑπὸ τὸν τίτλον «De Resolutionae quarundam quaestionum secundum modum algebrae et almucabalae, scilicet ad oppositionem et restaurationem» (λύσεις ὡρισμένων προβλημάτων κατὰ τὴν μέθοδον τῆς ἀλγέβρας καὶ ἀλμουκα-

βάλας, δηλαδὴ μὲ ἀναγωγὴν καὶ μεταφορὰν) ἐξετάζεται ἐκεῖ ἡ λύσις τῶν δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων εἰς τὰς ἀκολούθους ἓξ γνωστὰς μορφάς :

$$ax^2 = bx \qquad ax^2 = c \qquad bx = c$$
$$ax^2 + bx = c, \qquad bx + c = ax^2 \qquad ax^2 + c = bx,$$

ἔνθα a, b, c ἀριθμοὶ θετικοί. Ὡς παράδειγμα ἀπαντᾶται ἡ ἐξίσωσις $x^2+10x = 30$, τὴν ὁποίαν ἀκριβῶς εἶχεν ἐκλέξει πρὸς τὸν αὐτὸν σκοπὸν καὶ ὁ ἄραψ μαθηματικὸς (§ 143). Διὰ τὴν λύσιν τῶν ἐξισώσεων τούτων ἐφαρμόζει ὁ Λεονάρδος γεωμετρικοὺς συλλογισμοὺς τοῦ εἴδους ἐκείνου, ποὺ μεταχειρίζεται ὁ Εὐκλείδης εἰς τὸ Βιβλίον II τῶν Στοιχείων, διὰ τοῦτο καὶ παριστᾷ συχνὰ τὰ θεωρούμενα μεγέθη μὲ εὐθύγραμμα τμήματα. Ὁ ἄγνωστος ὀνομάζεται «radix» (δηλαδὴ «ρίζα», ἐνῷ εἰς τὸ Κεφάλαιον XII χρησιμοποιεῖ πρὸς τὸν αὐτὸν σκοπὸν τὴν λέξιν «res», δηλαδὴ «πρᾶγμα»), τὸ τετράγωνον τοῦ ἀγνώστου «census», ἡ δὲ σταθερὰ c «numerus».

Τὰ προβλήματα ἔχουν ἐν γένει ἐκφωνήσεις ἀφῃρημένας, δὲν λείπουν ὅμως μεταξὺ αὐτῶν ἐμπορικὰ ζητήματα. Μεταξὺ τῶν πρώτων ἀναφέρομεν τὸ ἀκόλουθον, ὡς παράδειγμα : «Νὰ χωρισθῇ ὁ ἀριθμὸς 10 εἰς δύο μέρη τοιαῦτα, ὥστε ἂν διαιρεθῇ τὸ ἑξαπλάσιον τοῦ πρώτου διὰ τοῦ δευτέρου καὶ εἰς τὸ τέταρτον τοῦ ἐξαγομένου προστεθῇ τὸ ἑξαπλοῦν τοῦ πρώτου μέρους, νὰ προκύπτῃ 39». Τὰ ἐπιτάγματα τοῦ προβλήματος ἄγουν εἰς τὴν ἐξίσωσιν:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{6x}{10-x} + 6x = 39 \ ,$$

ἡ ὁποία, γραφομένη ὑπὸ τὴν μορφήν :

$$6x^2 + 390 = 101x,$$

ὑπάγεται εἰς ἕνα ἀπὸ τοὺς ἀνωτέρω τύπους τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως. Παρατηρητέον, ὅτι τὰ δεδομένα ἐξελέγησαν οὕτως, ὥστε νὰ προκύπτουν ἀριθμητικαὶ ἐκφράσεις ρηταί.

Πολλὰ ἄλλα ἐνδιαφέροντα πράγματα ἀπαντῶνται εἰς τὸ Liber Abbaci, ἀλλὰ δὲν εἶναι φυσικὰ δυνατὸν νὰ ἐκταθῶμεν περισσότερον, χάριν τῆς συμμετρίας τοῦ ἔργου μας. Πρέπει μάλιστα νὰ ζητήσωμεν συγγνώμην ἀπὸ τοὺς ἀναγνώστας διὰ τὸ ἀσύνηθες μῆκος τῆς προηγηθείσης ἀναλύσεως, ἡ ὁποία φαίνεται ὡς ἀσυμβίβαστος πρὸς τὴν διατυπωθεῖσαν κρίσιν, ὅτι δηλαδὴ τὸ Liber Abbaci δὲν ἀποτελεῖ τὸ ὑπ' ἀριθμὸν 1 κείμενον εἰς τὸν μακρὸν κατάλογον τῆς ἀλγεβρικῆς φιλολογίας.* Ἂς προσθέσωμεν ἐν

* Ὁ Boncompagni ἐχρησιμοποίησε διὰ τὴν δημοσίευσιν τοῦ Liber Abbaci τὸν Κώδικα τοῦ Magliabecchi, ἐνῷ διὰ τὴν δημοσίευσιν τοῦ Practica Geometriae ἕνα Κώδικα τοῦ Βατικανοῦ. Διατυπώνομεν αὐτὴν τὴν παρατήρησιν, διότι φαίνεται νὰ μὴ ὑπάρχῃ ἀπόλυτος ὁμοφωνία μεταξὺ τῶν διαφόρων χειρογράφων τῶν ἔργων τοῦ Fibonacci. Τὸ ἀποδεικνύει

τούτοις, ὅτι μὲ τὸ βιβλίον αὐτὸ ὁ Fibonacci ἀποδεικνύεται πολὺ προγενέστερος τοῦ Bachet de Méziriac εἰς τὴν διδασκαλίαν τῆς λύσεως εἰς ἀκεραίους ἀριθμοὺς μιᾶς ἐξισώσεως πρώτου βαθμοῦ μὲ δύο ἀγνώστους.

«Practica geometriae»

162. Ἐνῷ κατὰ τὴν συγγραφὴν τοῦ Liber Abbaci ὁ Λεονάρδος ἤντλησε τὰς ἐμπνεύσεις του ἀπὸ τοὺς μαθηματικοὺς τῆς Ἀνατολῆς, κατὰ τὴν σύνταξιν τοῦ ἔργου του Practica Geometriae (ἀφιερωμένου εἰς τὸν φίλον του ἐκεῖνον, ὁ ὁποῖος τὸν παρώτρυνε νὰ προβῇ εἰς τὴν συγγραφήν του) ἤντλησεν ἀφθόνως ἀπὸ τοὺς Ἕλληνας, εἴτε ἀμέσως, εἴτε ἐμμέσως, τουτέστι διὰ μέσου ἐκείνων, οἱ ὁποῖοι, πρὸ αὐτοῦ, εἶχον λουσθῆ εἰς τὰς πηγὰς πάσης γεωμετρικῆς μας γνώσεως.* Πράγματι, ὁλόκληρον τὸ ἔργον ἔχει διαποτισθῆ ἀπὸ τὸ πνεῦμα καὶ διαμορφωθῆ κατὰ τὸ ὑπόδειγμα τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου. Ἐπειδὴ ἐν τούτοις σκοπὸς τοῦ ἔργου εἶναι νὰ διδάξῃ μεθόδους πρὸς ὑπολογισμὸν ἐμβαδῶν καὶ ὄγκων ἢ μερισμὸν σχημάτων εἰς μέρη ὑποκείμενα εἰς ὡρισμένας συνθήκας, παραβάλλεται μᾶλλον πρὸς τὰ Μετρικὰ τοῦ Ἥρωνος καὶ τὸ Περὶ διαιρέσεως τῶν σχημάτων τοῦ Εὐκλείδου, τὸ ὁποῖον οἱ Ἄραβες ἐγνώριζον τοὐλάχιστον εἰς τὰς γενικάς του γραμμάς.

Ἀκολουθῶν λοιπὸν ὁ Λεονάρδος τὸ παράδειγμα τῶν ἑλλήνων διδασκάλων του, ἀρχίζει μὲ τὴν καταγραφὴν τῶν ὁρισμῶν τῶν ὑπ' αὐτοῦ χρησιμοποιουμένων τεχνικῶν ὅρων καὶ τὴν ἐκφώνησιν τῶν ἀρχῶν, τὰς ὁποίας θὰ ἐφαρμόσῃ ἐν συνεχείᾳ. Καὶ ἐπειδὴ συχνὰ εἰς τὰ ἐκτιθέμενα προβλήματα τὰ δεδομένα ἐκφράζονται μὲ ἀριθμοὺς (ἐν γένει συμμιγεῖς), προτάσσει ἕνα πίνακα τῶν μέτρων, τὰ ὁποῖα ἐχρησιμοποιοῦντο τότε εἰς τὴν Πίζαν (μονὰς μήκους ἡ «ὀργυιὰ» - pertica, ἔχουσα 6 πόδας τῶν 18 δακτύλων). Εἰσέρχεται κατόπιν εἰς τὴν οὐσίαν τοῦ σκοποῦ του (Distinctio I, Μέρος πρῶτον) διδάσκων πῶς ὑπολογίζονται τὰ ἐμβαδὰ τετραγώνων καὶ ὀρθογωνίων, χωρὶς

τὸ κατωτέρω χωρίον τοῦ Practica Geometriae, τὸ ὁποῖον ἐλλείπει ἀπὸ τὴν ἔκδοσιν Boncompagni ἐνῷ ἀναφέρεται ἀπὸ τὸν G.B. Guglielmini εἰς τὸ ἔργον του Elogio di Lionardo Pisano (δηλαδή: Ἐγκώμιον τοῦ Λ. Πιζᾶνο, Βολωνία, 1813, σελ. 174): «Finis embadum, vel embadorum a Savasorda Judeo in Ebraico composi et a Platone Tiburtino in latinum sermonem translat., anno Arabum DX, mense saphar, et die XV ejusdem mensis, hora tertia, sole in XX gradu et XV minuto leonis. Luna in XII gradu et XX minuto piscium. Saturno in VIII gradu et LVII minuto tauri. Jove in Arietis XXVI gradu et LII minuto. Marte in Libra XXVII, XV.Venere in Libra XXI, XVIII.Mercurio in Leone XIV, LV».

* Ἐκφραζόμεθα κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον, λόγῳ τῶν πολυαρίθμων σημείων ἐπαφῆς, τὰ ὁποῖα διαπιστοῦνται μεταξὺ τοῦ ἔργου τοῦ Fibonacci καὶ τοῦ Liber Embadorum (§ 113) τοῦ Savasorda, ὅπου ἀκόμη καὶ ἡ ἑλληνικὴ λέξις «ἐμβαδὸν» διετηρήθη αὐτουσία ὑπὸ τοῦ ἰσραηλίτου συγγραφέως καὶ τοῦ μεταφραστοῦ του εἰς τὴν λατινικὴν (embadus).

τούτοις, ὅτι μὲ τὸ βιβλίον αὐτὸ ὁ Fibonacci ἀποδεικνύεται πολὺ προγενέστερος τοῦ Bachet de Méziriac εἰς τὴν διδασκαλίαν τῆς λύσεως εἰς ἀκεραίους ἀριθμοὺς μιᾶς ἐξισώσεως πρώτου βαθμοῦ μὲ δύο ἀγνώστους.

«Practica geometriae»

162. Ἐνῷ κατὰ τὴν συγγραφὴν τοῦ Liber Abbaci ὁ Λεονάρδος ἤντλησε τὰς ἐμπνεύσεις του ἀπὸ τοὺς μαθηματικοὺς τῆς Ἀνατολῆς, κατὰ τὴν σύνταξιν τοῦ ἔργου του Practica Geometriae (ἀφιερωμένου εἰς τὸν φίλον του ἐκεῖνον, ὁ ὁποῖος τὸν παρώτρυνε νὰ προβῇ εἰς τὴν συγγραφήν του) ἤντλησεν ἀφθόνως ἀπὸ τοὺς Ἕλληνας, εἴτε ἀμέσως, εἴτε ἐμμέσως, τουτέστι διὰ μέσου ἐκείνων, οἱ ὁποῖοι, πρὸ αὐτοῦ, εἶχον λουσθῆ εἰς τὰς πηγὰς πάσης γεωμετρικῆς μας γνώσεως.* Πράγματι, ὁλόκληρον τὸ ἔργον ἔχει διαποτισθῆ ἀπὸ τὸ πνεῦμα καὶ διαμορφωθῆ κατὰ τὸ ὑπόδειγμα τῶν Σ τ ο ι χ ε ί ω ν τοῦ Εὐκλείδου. Ἐπειδὴ ἐν τούτοις σκοπὸς τοῦ ἔργου εἶναι νὰ διδάξῃ μεθόδους πρὸς ὑπολογισμὸν ἐμβαδῶν καὶ ὄγκων ἢ μερισμὸν σχημάτων εἰς μέρη ὑποκείμενα εἰς ὡρισμένας συνθήκας, παραβάλλεται μᾶλλον πρὸς τὰ Μ ε τ ρ ι κ ὰ τοῦ Ἥρωνος καὶ τὸ Π ε ρ ὶ δ ι α ι ρ έ σ ε ω ς τ ῶ ν σ χ η μ ά τ ω ν τοῦ Εὐκλείδου, τὸ ὁποῖον οἱ Ἄραβες ἐγνώριζον τοὐλάχιστον εἰς τὰς γενικάς του γραμμάς.

Ἀκολουθῶν λοιπὸν ὁ Λεονάρδος τὸ παράδειγμα τῶν ἑλλήνων διδασκάλων του, ἀρχίζει μὲ τὴν καταγραφὴν τῶν ὁρισμῶν τῶν ὑπ' αὐτοῦ χρησιμοποιουμένων τεχνικῶν ὅρων καὶ τὴν ἐκφώνησιν τῶν ἀρχῶν, τὰς ὁποίας θὰ ἐφαρμόσῃ ἐν συνεχείᾳ. Καὶ ἐπειδὴ συχνὰ εἰς τὰ ἐκτιθέμενα προβλήματα τὰ δεδομένα ἐκφράζονται μὲ ἀριθμοὺς (ἐν γένει συμμιγεῖς), προτάσσει ἕνα πίνακα τῶν μέτρων, τὰ ὁποῖα ἐχρησιμοποιοῦντο τότε εἰς τὴν Πίζαν (μονὰς μήκους ἡ «ὀργυιὰ» - pertica, ἔχουσα 6 πόδας τῶν 18 δακτύλων). Εἰσέρχεται κατόπιν εἰς τὴν οὐσίαν τοῦ σκοποῦ του (Distinctio I, Μέρος πρῶτον) διδάσκων πῶς ὑπολογίζονται τὰ ἐμβαδὰ τετραγώνων καὶ ὀρθογωνίων, χωρὶς

τὸ κατωτέρω χωρίον τοῦ Practica Geometriae, τὸ ὁποῖον ἐλλείπει ἀπὸ τὴν ἔκδοσιν Boncompagni ἐνῷ ἀναφέρεται ἀπὸ τὸν G.B. Guglielmini εἰς τὸ ἔργον του Elogio di Lionardo Pisano (δηλαδή: Ἐ γ κ ώ μ ι ο ν τ ο ῦ Λ. Π ι ζ ά ν ο, Βολωνία, 1813, σελ. 174): «Finis embadum, vel embadorum a Savasorda Judeo in Ebraico composi et a Platone Tiburtino in latinum sermonem translat., anno Arabum DX, mense saphar, et die XV ejusdem mensis, hora tertia, sole in XX gradu et XV minuto leonis. Luna in XII gradu et XX minuto piscium. Saturno in VIII gradu et LVII minuto tauri. Jove in Arietis XXVI gradu et LII minuto. Marte in Libra XXVII, XV.Venere in Libra XXI, XVIII.Mercurio in Leone XIV, LV».

* Ἐκφραζόμεθα κατ'αὐτὸν τὸν τρόπον, λόγῳ τῶν πολυαρίθμων σημείων ἐπαφῆς, τὰ ὁποῖα διαπιστοῦνται μεταξὺ τοῦ ἔργου τοῦ Fibonacci καὶ τοῦ Liber Embadorum (§ 113) τοῦ Savasorda, ὅπου ἀκόμη καὶ ἡ ἑλληνικὴ λέξις «ἐμβαδὸν» διετηρήθη αὐτουσία ὑπὸ τοῦ ἰσραηλίτου συγγραφέως καὶ τοῦ μεταφραστοῦ του εἰς τὴν λατινικὴν (embadus).

νὰ παραλείπῃ ὑπολογιστικὰς λεπτομερείας, χρησίμους εἰδικῶς εἰς τὰς πράξεις μὲ συμμιγεῖς.

Τὸ ἀντίστροφον πρόβλημα (ὑπολογισμὸς τῆς πλευρᾶς τετραγώνου δοθέντος τοῦ ἐμβαδοῦ του) ἀπαιτεῖ, διὰ νὰ λυθῇ, τὴν ἐξαγωγὴν τετραγωνικῆς ρίζης, εἰς τὴν πρᾶξιν δὲ αὐτὴν ἀφιεροῦται τὸ ἑπόμενον Μέρος (Distinctio II). Σημειοῦμεν ἐδῶ τὴν κατασκευὴν τῆς τετραγωνικῆς ρίζης ἑνὸς ἀριθμοῦ n, ἢ τῆς μέσης ἀναλόγου τῶν 1 καὶ n, ὡς ἐφαρμογὴν τῶν ἰδιοτήτων τῶν διατεμνουσῶν κύκλου, ὡς ἐπίσης τὴν ἀπόδειξιν τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος μέσῳ τῆς ὁμοιότητος τῶν δύο ὀρθογωνίων τριγώνων, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται τὸ ἀρχικὸν ὑπὸ τοῦ ὕψους τῆς ὀρθῆς γωνίας (γεγονὸς ἐνισχῦον τὴν ὑπόθεσιν, ὅτι ὁ συλλογισμὸς αὐτὸς ὡδήγησεν εἰς τὴν ἀνακάλυψιν τοῦ θεωρήματος).

Εἰς τὸν ὑπολογισμὸν ἐμβαδῶν ἄλλων σχημάτων ἀσχολεῖται τὸ ἑπόμενον Μέρος (Distinctio III). Ὁ Λεονάρδος πραγματεύεται κυρίως τρίγωνα, τῶν ὁποίων δίδονται αἱ πλευραί. Ἐπειδὴ τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου εἶναι γενικῶς ἴσον πρὸς τὸ ἡμιγινόμενον μιᾶς πλευρᾶς ἐπὶ τὸ ἀντίστοιχον ὕψος, ὁ ὑπολογισμὸς δὲν παρουσιάζει δυσκολίαν, ὅταν πρόκειται διὰ τρίγωνα ὀρθογώνια, ἰσόπλευρα ἢ ἰσοσκελῆ. Εἰς τὴν γενικὴν περίπτωσιν ὁ Fibonacci ὑπολογίζει ἕνα τῶν ὑψῶν, μέσῳ τῶν τμημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζει τὴν ἀντίστοιχον πλευράν. Περαιτέρω εἶναι εὔκολος ἡ μετάβασις εἰς τὴν ἔκφρασιν τοῦ ἐμβαδοῦ συναρτήσει τῶν πλευρῶν, ὁ Λεονάρδος ὅμως δὲν τὴν ἐκθέτει.

Ἀξιοσημείωτος εἶναι ἐξ ἄλλου ἡ παρουσία τοῦ κλασσικοῦ τριγώνου μὲ πλευρὰς 13, 14, 15 τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν ἐκφράζεται, ὡς γνωστόν, μὲ ρητὸν ἀριθμόν. Ἀκολουθοῦν μερικαὶ θεωρίαι ἐπὶ τῶν διατεμνουσῶν τριγώνου, κατόπιν τῶν ὁποίων ὁ γεωμέτρης τῆς Πίζης διδάσκει τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ἐμβαδοῦ μερικῶν εἰδικῶν τετραπλεύρων: ρόμβων, ρομβοειδῶν (πλαγίων παραλληλογράμμων), τραπεζίων (ἰσοσκελῶν, ὀρθογωνίων, σκαληνῶν), μὴ ἀποκλειομένων τετραπλεύρων μὴ κυρτῶν.

Εἰς τὰς ἑπομένας σελίδας πραγματεύεται πεντάγωνα καὶ τέλος τὸν κύκλον καὶ τὰ μέρη του. Ἀξιοσημείωτος εἶναι ὁ ἀκόλουθος περιορισμὸς τῆς τιμῆς τοῦ π:

$$\frac{1440}{458\frac{1}{9}} < \pi < \frac{1440}{458\frac{1}{5}},$$

ὁ ὁποῖος, μὲ κατάλληλον χειρισμόν, ἄγει εἰς τὴν παραδοχὴν τῆς ἀκολούθου τιμῆς: $\pi = 3{,}141818...$

Δὲν ἀμελεῖ ὁ Λεονάρδος τὸν ὑπολογισμὸν τῶν χορδῶν τοῦ κύκλου, ἂν καὶ ἀναφέρεται εἰς ὅσα ἔγραψε σχετικῶς ὁ Πτολεμαῖος εἰς τὴν Ἀλ-

μ α γ έ σ τ α ν, ἔργον τὸ ὁποῖον ἐγνώρισεν ἀσφαλῶς, χάρις εἰς τοὺς Ἄραβας.
Ἐπιθυμῶν, ὅπως εἶχε κάμει ὁ Ἥρων, νὰ προσαρμόσῃ τὰς μαθηματικὰς θεωρίας εἰς τὰς ἀπαιτήσεις τῆς πράξεως, ὁ Fibonacci ἐνέπεσεν εἰς τὸ πρόβλημα τοῦ ὑπολογισμοῦ τοῦ ἐμβαδοῦ μὴ ἐπιπέδων ἐπιφανειῶν, εἰς τὸ ὁποῖον ἔδωσε λύσιν ἀρκετὰ χονδροειδῆ καὶ διὰ τοῦτο ἀναξίαν νὰ μᾶς ἀπασχολήσῃ.

163. Μετὰ τὴν ἐξάντλησιν τῶν θεμάτων τῶν ἀφορώντων προσδιορισμοὺς ἐμβαδῶν, εἰσέρχεται (Distinctio IV) ὁ συγγραφεὺς εἰς προβλήματα μερισμοῦ γηπέδων εἰς τμήματα, μέσῳ εὐθειῶν, ὅταν δίδωνται ὡρισμέναι συνθῆκαι τὰς ὁποίας πρέπει νὰ πληροῦν τὰ διάφορα τμήματα καὶ εὐθεῖαι διαχωρισμοῦ. Πρόκειται περὶ μιᾶς περιοχῆς, τὴν ὁποίαν, ὡς εἴδομεν, μετὰ δεξιότητος ἐκαλλιέργησαν ὁ Εὐκλείδης καὶ ὁ Ἥρων, ὁ δὲ Λεονάρδος εἶχε πιθανώτατα πρὸ ὀφθαλμῶν τὴν γνωστήν μας ἀραβικὴν διασκευὴν (§ 153) τοῦ εὐκλειδείου ἔργου Π ε ρ ὶ δ ι α ι ρ έ σ ε ω ς τ ῶ ν σ χ η μ ά τ ω ν. Ἐκ τῶν λυομένων προβλημάτων 14 ἀναφέρονται εἰς τρίγωνα, 8 εἰς παραλληλόγραμμα, 13 εἰς τραπέζια, 6 εἰς τετράπλευρα ἄλλου εἴδους, 2 εἰς κανονικὰ πεντάγωνα, 12 εἰς κύκλους καὶ ἡμικύκλια καὶ τέλος 1 εἰς σχῆμα ἀποτελούμενον ἀπὸ κυκλικὸν τόξον καὶ δύο χορδάς.

Εἰς τὸ ἑπόμενον Μέρος (Distinctio V) ἀναπτύσσεται μία θεωρία κυβικῶν ριζικῶν παράλληλος πρὸς τὴν θεωρίαν τῶν τετραγωνικῶν ριζικῶν, ποὺ ἐκτίθεται εἰς τὸ Μέρος II, ὡς ἐπίσης μία μέθοδος ἐξαγωγῆς κυβικῆς ρίζης δοθέντος ἀριθμοῦ. Μὲ κάποιαν ἔκπληξιν θὰ συναντήσῃ κανεὶς ἐδῶ τὰς μεθόδους ποὺ ἐπενόησεν ὁ Ἀρχύτας, ὁ Πλάτων καὶ ὁ Ἥρων διὰ τὸν διπλασιασμὸν τοῦ κύβου. Ἀκολουθοῦν οἱ κανόνες λογισμοῦ μὲ κυβικὰς ρίζας.

Τὸ ἀριθμητικὸν αὐτὸ ἐνδιάμεσον ἀποτελεῖ μίαν χρησιμωτάτην προπαρασκευὴν διὰ τὸ ἑπόμενον Μέρος (Distinctio VI), τὸ ὁποῖον πραγματεύεται περὶ τοῦ ὑπολογισμοῦ ὄγκων. Προτοῦ εἰσέλθῃ εἰς τὸ θέμα ὁ Λεονάρδος ἐκθέτει ὅ,τι οὐσιῶδες ἦτο γνωστὸν ἐπὶ τῆς στερεομετρίας τὴν ἐποχὴν ἐκείνην, κατόπιν δὲ προτείνει μίαν διαίρεσιν τῶν στερεῶν σωμάτων εἰς τρεῖς κατηγορίας· εἰς τὴν πρώτην ὑπάγονται ὅλα τὰ πολύεδρα τὰ ἔχοντα παραλλήλους ἕδρας, εἰς τὴν δευτέραν αἱ πυραμίδες πλήρεις ἢ κόλουροι, εἰς τὴν τελευταίαν ἡ σφαῖρα καὶ τὰ κανονικὰ πολύεδρα. Ὡς ἐφαρμογὴν διδάσκει ὁ Λεονάρδος τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ὄγκου μιᾶς κολούρου πυραμίδος ἐκ τῶν βάσεων καὶ τοῦ ὕψους της, πρόβλημα λυθὲν ἤδη ὑπὸ τοῦ Ἥρωνος.

Στοιχειωδέστερον χαρακτῆρα καὶ ἀποκλειστικῶς πρακτικὸν ἔχει τὸ τελευταῖον Μέρος (Dinstinctio VII), ὅπου διδάσκεται ὁ προσδιορισμὸς ἀποστάσεων καὶ ὑψῶν, διὰ τῆς χρήσεως ὁμοίων τριγώνων καὶ ἑνὸς εἰδικοῦ ὀργάνου, τὸ ὁποῖον ἐκάλουν τότε «γεωμετρικὸν γνώμονα». Παρὰ ταῦτα εἰς τὰς τελευταίας σελίδας τοῦ βιβλίου καὶ ὑπὸ τὸν τίτλον «Γεωμετρικαὶ λεπτολογίαι» ἀπαντῶνται συγκεντρωμένα προβλήματα θεωρητικοῦ μᾶλλον χαρα-

κτῆρος. Μερικὰ ἐξ αὐτῶν ἀναφέρονται εἰς τὸ κανονικὸν πεντάγωνον καὶ δεκάγωνον, ἄλλα εἰς ὀρθογώνια ἐγγεγραμμένα εἰς τρίγωνον ὀρθογώνιον ὑπὸ τὸν ὅρον μία πλευρὰ τοῦ πρώτου νὰ κεῖται ἐπὶ μιᾶς πλευρᾶς τοῦ δευτέρου. Ἀπαντᾶται, τέλος, τὸ πρόβλημα τῆς εὑρέσεως τῶν ρητῶν λύσεων τῆς ἐξισώσεως :

$$x^2 + 5 = y^2,$$

ἡ ὁποία καὶ ἀποτελεῖ, τρόπον τινά, τὸν συνδετικὸν δακτύλιον μεταξὺ τοῦ ἔργου τούτου καὶ τῶν ἄλλων ἔργων τοῦ Λεονάρδου, μὲ τὰ ὁποῖα θ' ἀσχοληθῶμεν ἐν συνεχείᾳ.

Ἔργα μικρότερα

164. Δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ μακρηγορήσωμεν περισσότερον ἐπὶ τοῦ ἔργου Practica Geometriae, διότι ἡ σπουδαιότης καὶ ἡ ἀξία του κατεφάνη ἐπαρκῶς ἀπὸ ὅσα ἐξεθέσαμεν. Θ' ἀσχοληθῶμεν τώρα μὲ ἄλλα γραπτὰ τοῦ Fibonacci, τὰ ὁποῖα εἶναι μὲν μικρότερα εἰς ὄγκον, ἀλλὰ σημαντικώτερα ἴσως ὑπὸ ἔποψιν πρωτοτυπίας καὶ τὰ ὁποῖα, μὲ σύγχρονον ὁρολογίαν, θὰ ἠδυνάμεθα μᾶλλον νὰ ὀνομάσωμεν ἐπιστημονικὰ ὑπομνήματα.

Ἀπὸ τὰ πρῶτα ἔργα τοῦ εἴδους τούτου εἶναι τὸ φέρον τὸν τίτλον : Flos Leonardi Bigolli Pisani super solutionibus quarundam quaestionum ad numerum et geometriam vel ad utrumque pertinentium (Ἄνθος τοῦ Λεονάρδου Μπίγγολο Πιζᾶνο περιέχον λύσεις προβλημάτων τινῶν ἀριθμητικῆς καὶ γεωμετρίας). Ἀπὸ τὰ προβλήματα, ποὺ λύονται ἐδῶ, δύο ἐπροτάθησαν ἀπὸ τὸν διδάσκαλον Ἰωάννην τὸν ἐκ Παλέρμου (Giovanni Palermitano), φιλόσοφον τοῦ αὐτοκράτορος Φρειδερίκου τοῦ II. Τὸ ἕνα μάλιστα ἀφορᾷ τὴν λύσιν τῆς ἐξισώσεως $x^2 + 5 = y^2$, τὴν ὁποίαν συνηντήσαμεν ἤδη ὡς κατακλεῖδα τοῦ Practica geometriae καὶ εἰς τὴν ὁποίαν θὰ ἐπανέλθωμεν μετ' ὀλίγον. Τὸ ἄλλο συνίσταται εἰς τὴν λύσιν τῆς ἐξισώσεως :

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20.$$

Ἐὰν δώσωμεν εἰς αὐτὴν τὴν μορφήν:

$$x[(x + 1)^2 + 9] = 20,$$

εἶναι εὔκολον νὰ συμπεράνωμεν, ὅτι δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἔχῃ ἀρνητικὰς ρίζας. Ὁ Λεονάρδος ἀποδεικνύει διὰ μακρῶν, ὅτι ἡ μοναδική της ρίζα δὲν ἀνήκει εἰς τὴν κατηγορίαν τῶν ἀσυμμέτρων, τῶν ὁποίων ἡ σπουδὴ γίνεται, εἰς τὸ Βιβλίον X τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, βεβαιώνει δὲ περαιτέρω, ὅτι γραφομένη ἡ ρίζα μὲ τὴν βοήθειαν ἑξηκονταδικῶν κλασμάτων, λαμβάνει τὴν ἀκόλουθον μορφήν :

$$1.\ 22^{I}\ .\ 7^{II}\ .\ 42^{III}\ .\ 33^{IV}\ .\ 4^{V}\ .\ 40^{VI}.$$

κτῆρος. Μερικὰ ἐξ αὐτῶν ἀναφέρονται εἰς τὸ κανονικὸν πεντάγωνον καὶ δεκάγωνον, ἄλλα εἰς ὀρθογώνια ἐγγεγραμμένα εἰς τρίγωνον ὀρθογώνιον ὑπὸ τὸν ὅρον μία πλευρὰ τοῦ πρώτου νὰ κεῖται ἐπὶ μιᾶς πλευρᾶς τοῦ δευτέρου. Ἀπαντᾶται, τέλος, τὸ πρόβλημα τῆς εὑρέσεως τῶν ρητῶν λύσεων τῆς ἐξισώσεως :

$$x^2 + 5 = y^2,$$

ἡ ὁποία καὶ ἀποτελεῖ, τρόπον τινά, τὸν συνδετικὸν δακτύλιον μεταξὺ τοῦ ἔργου τούτου καὶ τῶν ἄλλων ἔργων τοῦ Λεονάρδου, μὲ τὰ ὁποῖα θ' ἀσχοληθῶμεν ἐν συνεχείᾳ.

Ἔργα μικρότερα

164. Δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ μακρηγορήσωμεν περισσότερον ἐπὶ τοῦ ἔργου Practica Geometriae, διότι ἡ σπουδαιότης καὶ ἡ ἀξία του κατεφάνη ἐπαρκῶς ἀπὸ ὅσα ἐξεθέσαμεν. Θ' ἀσχοληθῶμεν τώρα μὲ ἄλλα γραπτὰ τοῦ Fibonacci, τὰ ὁποῖα εἶναι μὲν μικρότερα εἰς ὄγκον, ἀλλὰ σημαντικώτερα ἴσως ὑπὸ ἔποψιν πρωτοτυπίας καὶ τὰ ὁποῖα, μὲ σύγχρονον ὁρολογίαν, θὰ ἠδυνάμεθα μᾶλλον νὰ ὀνομάσωμεν ἐπιστημονικὰ ὑπομνήματα.

Ἀπὸ τὰ πρῶτα ἔργα τοῦ εἴδους τούτου εἶναι τὸ φέρον τὸν τίτλον : Flos Leonardi Bigolli Pisani super solutionibus quarundam quaestionum ad numerum et geometriam vel ad utrumque pertinentium (Ἄνθος τοῦ Λεονάρδου Μπίγγολο Πιζᾶνο περιέχον λύσεις προβλημάτων τινῶν ἀριθμητικῆς καὶ γεωμετρίας). Ἀπὸ τὰ προβλήματα, ποὺ λύονται ἐδῶ, δύο ἐπροτάθησαν ἀπὸ τὸν διδάσκαλον Ἰωάννην τὸν ἐκ Παλέρμου (Giovanni Palermitano), φιλόσοφον τοῦ αὐτοκράτορος Φρειδερίκου τοῦ II. Τὸ ἕνα μάλιστα ἀφορᾷ τὴν λύσιν τῆς ἐξισώσεως $x^2 + 5 = y^2$, τὴν ὁποίαν συνηντήσαμεν ἤδη ὡς κατακλεῖδα τοῦ Practica geometriae καὶ εἰς τὴν ὁποίαν θὰ ἐπανέλθωμεν μετ' ὀλίγον. Τὸ ἄλλο συνίσταται εἰς τὴν λύσιν τῆς ἐξισώσεως :

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20.$$

Ἐὰν δώσωμεν εἰς αὐτὴν τὴν μορφήν:

$$x\,[(x + 1)^2 + 9] = 20,$$

εἶναι εὔκολον νὰ συμπεράνωμεν, ὅτι δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἔχῃ ἀρνητικὰς ρίζας. Ὁ Λεονάρδος ἀποδεικνύει διὰ μακρῶν, ὅτι ἡ μοναδική της ρίζα δὲν ἀνήκει εἰς τὴν κατηγορίαν τῶν ἀσυμμέτρων, τῶν ὁποίων ἡ σπουδὴ γίνεται, εἰς τὸ Βιβλίον X τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, βεβαιώνει δὲ περαιτέρω, ὅτι γραφομένη ἡ ρίζα μὲ τὴν βοήθειαν ἑξηκονταδικῶν κλασμάτων, λαμβάνει τὴν ἀκόλουθον μορφήν :

$$1.\ 22^{I}\ .\ 7^{II}\ .\ 42^{III}\ .\ 33^{IV}\ .\ 4^{V}\ .\ 40^{VI}.$$

Τὸ γεγονὸς ὅτι οὐδεμίαν ἔνδειξιν παρέχει περὶ τοῦ δρόμου, τὸν ὁποῖον ἠκολούθησε διὰ νὰ φθάσῃ εἰς αὐτὸ τὸ ἀποτέλεσμα, δίδει λαβὴν νὰ πιστεύσωμεν, ὅτι πρόκειται περὶ μεθόδου κοινῶς γνωστῆς εἰς τὴν ἐποχήν του, πιθανώτατα αὐτῆς τῆς ἰδίας ποὺ ἐφήρμοζεν, ἐπίσης σιωπηρῶς, ὁ Al - Biruni (§ 148), διὰ τὴν εὕρεσιν μιᾶς ρίζης τριτοβαθμίου ἐξισώσεως. Ἀλλ' αὐτὸ δὲν μεταβάλλει τὴν διαπίστωσιν, ὅτι εὑρισκόμεθα ἐνώπιον νέου ἀλύτου ζητήματος τῆς ἱστορίας τῶν μαθηματικῶν.

Τὰ λοιπὰ προβλήματα ποὺ περιέχονται εἰς τὸ Flos εἶναι πρώτου βαθμοῦ, μερικὰ ὡρισμένα, ἄλλα ἀόριστα. Καὶ τὰ μὲν καὶ τὰ δὲ ἔχουν τὰ ὅμοιά των εἰς τὸ Liber Abbaci. Διὰ νὰ τὰ χαρακτηρίσωμεν καλύτερα, ἐκλέγομεν τὸ φέρον τὸν τίτλον: «De quatuor hominibus et bursa ab eis reperta» (Περὶ τεσσάρων ἀνθρώπων καὶ βαλαντίου ὑπ' αὐτῶν εὑρεθέντος), τὸ ὁποῖον σήμερον ἀνάγεται εἰς τὸ σύστημα :

$$\begin{aligned} t + x &= 2(y + z) \\ t + y &= 3(z + u) \\ t + z &= 4(u + x) \\ t + u &= 5(x + y). \end{aligned}$$

Τοῦτο ἐπιδέχεται ἀπείρους λύσεις, ἐκ τῶν ὁποίων ὅμως καμμία δὲν ἔχει ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς θετικούς. Ἐνώπιον τοιαύτης δυσκολίας ὁ Λεονάρδος, θεωρῶν ὅτι οἱ ἄγνωστοι ἔχουν σημασίαν χρηματικῶν ποσῶν κατεχομένων ὑπὸ τῶν 4 προσώπων, παρακάμπτει τὸν σκόπελον λέγων : «concedatur primum hominem habere debitum» (συγχωρεῖται εἰς τὸν πρῶτον ἄνθρωπον νὰ ἔχῃ χρέος). Τοιουτοτρόπως ἀπαντῶμεν ἐδῶ, διὰ πρώτην φοράν, τὴν ἑρμηνείαν τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν ὡς χρεῶν, τὴν ὁποίαν ἀργότερα ὁ Luca Pacioli μετέβαλεν εἰς συνήθειαν, υἱοθετηθεῖσαν ἀπὸ πολλοὺς συγγραφεῖς ἐντεῦθεν καὶ πέραν τῶν Ἄλπεων καὶ ὑφισταμένην ἀκόμη σήμερον εἰς τὴν μαθηματικὴν φιλολογίαν.

165. Ἀνάλογον πρὸς τ' ἀνωτέρω εἶναι ἕνα πρόβλημα, τὸ ὁποῖον, ἴσως ἀπὸ λάθος κάποιου ἀδεξίου ἀντιγραφέως, εὑρίσκεται εἰς τὸ τέλος ἄλλου κειμένου, φέροντος τίτλον Epistola Leonardi ad magistrum Theodorum Phylosophum domini Imperatoris (Ἐπιστολὴ Λεονάρδου πρὸς τὸν μάγιστρον Θεόδωρον, φιλόσοφον τοῦ Αὐτοκράτορος). Τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς σύστημα ἐξισώσεων τῆς ἀκολούθου μορφῆς :

$$x_1 + \frac{a}{\alpha} x_2 = A,$$

$$x_2 + \frac{b}{\beta} x_3 = B,$$

$$x_3 + \frac{c}{\gamma} x_4 = C,$$

$$x_4 + \frac{d}{\delta} x_5 = D,$$

$$x_5 + \frac{e}{\varepsilon} x_6 = E,$$

ὅπου τὰ γράμματα παριστοῦν ἀκεραίους ἀριθμούς. Ἡ μέθοδος, τὴν ὁποίαν ἐφαρμόζει ὁ Λεονάρδος διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὴν λύσιν, εἶναι ἐφαρμόσιμος ἀκόμη καὶ εἰς ἄλλας ἀναλόγους περιπτώσεις, ὅπου οἱ ἄγνωστοι εἶναι περισσότεροι τῶν 6.

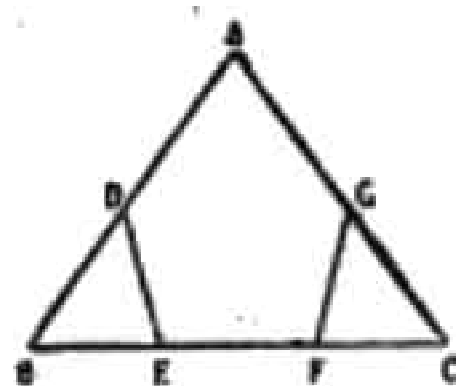
Εἰς τὴν ἰδίαν Ἐπιστολὴν εὑρίσκονται προβλήματα ὅμοια πρὸς τὸ τῶν «ἑκατὸ πτηνῶν» ποὺ συνηντήσαμεν εἰς τοὺς Κινέζους (§ 120) καὶ εἰς τὸ Liber Abbaci (§ 159). Πρόκειται πάντοτε διὰ τὴν ἀγορὰν στρουθίων, τρυγόνων καὶ περιστερῶν, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι στοιχίζει ἕκαστον ἀντιστοίχως 1/3, 1/2 καὶ 2 δηνάρια, ὁ δὲ ἀριθμὸς τῶν καταβαλλομένων χρημάτων, ἄλλοτε διαφέρει καὶ ἄλλοτε εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ὁλικὸν ἀριθμὸν τῶν ἀγοραζομένων πτηνῶν. Ἐὰν π.χ. καὶ οἱ δύο ἀριθμοὶ εἶναι 30, ὁ Λεονάρδος εὑρίσκει τὴν λύσιν 9, 10, 11. Ἐὰν μὲ 30 δηνάρια ἀγοράζωνται 29 πτηνά, προκύπτουν δύο λύσεις. Ἐὰν μὲ τὸ ἴδιο ποσὸν χρημάτων ἐπιζητεῖται ἡ ἀγορὰ 15 πτηνῶν, τὸ πρόβλημα εἶναι ἄλυτον εἰς ἀκεραίους καὶ θετικοὺς ἀριθμούς.

Πολυπλοκώτερον εἶναι ἕνα παρόμοιον πρόβλημα, ἀναγόμενον εἰς τὸ σύστημα :

$$x + y + z + t = 24,$$

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{3} + 2z + 3t = 24.$$

Ὁ Λεονάρδος προβαίνει εἰς τὴν λύσιν, μὲ καλῶς ρυθμιζομένας δοκιμάς, καὶ εὑρίσκει τὰς δύο λύσεις: 10, 6, 4, 4 καὶ 5, 12, 2, 5.



Σχ. 29

Εἰς τὴν ἰδίαν Ἐπιστολὴν ἀπαντᾶται ἕνα πρόβλημα ἐντελῶς ἄλλου εἴδους, ἀνῆκον εἰς τὴν γεωμετρίαν. Ζητεῖται, πράγματι, νὰ ἐγγραφῇ εἰς δοθὲν ἰσοσκελὲς τρίγωνον ABC (σχ. 29) ἕνα ἰσόπλευρον πεντάγωνον ADEFG, μὲ τὴν μίαν πλευρὰν EF κειμένην ἐπὶ τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου, τὰς δὲ δύο ἄλλας AD, AG ἐπὶ τῶν πλευρῶν AB, AC.

Ἐφαρμόζων τὴν θεωρίαν τῶν ὁμοίων τριγώνων καὶ τὸ Πυθαγόρειον θεώρημα, ὁ Λεονάρδος εὑρίσκει, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν $AB = 10$ καὶ $BC = 12$, τὴν ἀκόλουθον ἐξίσωσιν :

$$x^2 + 36\frac{4}{7}x = 182\frac{6}{7},$$

ἔνθα x τὸ μῆκος τῆς BD. «Καὶ οὕτω», γράφει, «τὸ πρόβλημα ἀνήχθη εἰς ἕνα τῶν κανόνων τῆς ἀλγέβρας». Ἡ ἐν λόγῳ ἐξίσωσις δὲν ἔχει ρητὰς ρίζας, ἔχει ὅμως μίαν καὶ μόνον θετικήν, τῆς ὁποίας ἀναγράφει τὴν τιμὴν (εἰς ἑξηκονταδικὰ κλάσματα ἐκπεφρασμένην) :

$$x = 4 \cdot 27^{I} \cdot 24^{II} \cdot 40^{III} \cdot 50^{IV}.$$

Δὲν ἀναφέρει πάντως, ἐὰν διὰ τὴν εὕρεσιν αὐτῆς περιωρίσθη εἰς τὴν ἐφαρμογὴν τῶν γνωστῶν κανόνων ἐξαγωγῆς τετραγωνικῆς ρίζης ἢ κατέφυγεν εἰς κάποιαν ἄλλην μέθοδον.

166. Ὁ ἐκ Παλέρμου Ἰωάννης (§ 164) προέτεινεν εἰς τὸν Λεονάρδον νὰ καταστήσῃ τέλεια τετράγωνα τὰς συζυγεῖς ἐκφράσεις $x^2 \pm 5$. Ὁ Λεονάρδος, ἀφοῦ ἔδωσε μίαν λύσιν, ἐξηκολούθησε νὰ μελετᾷ τὸ ζήτημα, τὰ δὲ ἀποτελέσματα τῆς μελέτης του περιέλαβεν εἰς ἕνα ὑπόμνημα ὑπὸ τὸν τίτλον Liber Quadratorun. Ἀναφέρει ἐν προοιμίῳ τὴν γνωστὴν πρότασιν, ἡ ὁποία σήμερον ἐκφράζεται διὰ τοῦ τύπου :

$$1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = n^2,$$

καὶ ἀρύεται ἐξ αὐτῆς δύο μεθόδους πρὸς λύσιν τῶν πυθαγορείων ἐξισώσεων ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, πρὸς εὕρεσιν ζευγῶν τετραγώνων ἐχόντων ὡς ἄθροισμα πάλιν τετράγωνον. Ἀξίζει τὸν κόπον νὰ τὰς ἀναφέρωμεν.

I. Ἔστω a ἀριθμὸς περιττὸς καὶ ἂς ληφθοῦν τὰ ἀθροίσματα :

$$1 + 3 + \ldots + (a^2 - 2)$$
$$1 + 3 + \ldots + (a^2 - 2) + a^2.$$

Τὸ πρῶτον εἶναι ἕνα τετράγωνον b^2, τὸ δεύτερον ἕνα ἄλλο τετράγωνον c^2 καὶ ἐπειδὴ $c^2 - b^2 = a^2$ ἢ $c^2 = a^2 + b^2$, τὸ πρόβλημα ἐλύθη.

II. Ἔστω τώρα a ἀριθμὸς ἄρτιος. Οἱ ἀριθμοὶ $\frac{a^2}{2} \pm 1$ θὰ εἶναι προφανῶς ἀριθμοὶ περιττοί, συνεπῶς τὰ ἀθροίσματα :

$$1 + 3 + \cdots + \left(\frac{a^2}{2} - 3\right),$$

$$1 + 3 + \cdots + \left(\frac{a^2}{2} - 3\right) + \left(\frac{a^2}{2} - 1\right) + \left(\frac{a^2}{2} + 1\right),$$

θὰ εἶναι δύο τετράγωνα b^2 καὶ c^2 ἀντιστοίχως καὶ ἐπειδὴ ἰσχύει πάλιν $c^2 = a^2 + b^2$, τὸ πρόβλημα ἐλύθη.

Μία τρίτη λύσις ἐλήφθη ἀπὸ τὴν ἑξῆς παρατήρησιν τοῦ Λεονάρδου: ἐὰν a εἶναι ἀριθμὸς περιττὸς καὶ τεθῇ :

$$b^2 = 1 + 3 + \ldots + (3a^2 - 4),$$
$$c^2 = 1 + 3 + \ldots + (3a^2 + 2),$$

θὰ ἔχωμεν καὶ $c^2 - b^2 = (3a)^2$. Ἀκόμη γενικώτερα, ἐὰν m, p, q εἶναι τρεῖς ἀριθμοὶ ἀκέραιοι, ἂς τεθῇ

$$a = 2mpq, \qquad r = 2mp^2, \qquad s = 2mq^2,$$

ὁπότε $a^2 = rs$ καὶ ἂς ληφθοῦν αἱ δύο ἑπόμεναι ἀκολουθίαι διαδοχικῶν περιττῶν ἀριθμῶν :

$$r+1, r+3, \ldots, r+s-1,$$
$$r-1, r-3, \ldots, r-s+1.$$

Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα δύο ὁμοταγῶν ὅρων τῶν δύο σειρῶν εἶναι 2r καὶ κάθε ἀκολουθία περιλαμβάνει s/2 ὅρους, ἕπεται ὅτι τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν ὅρων τῶν δύο ἀκολουθιῶν θὰ εἶναι rs ἤτοι a^2. Διὰ τοῦτο προσαρτῶντες καὶ τὸ ἄθροισμα :

$$1 + 3 + \ldots + (r - s - 1),$$

τὸ ὁποῖον εἶναι τέλειον τετράγωνον b^2, λαμβάνομεν νέον τετράγωνον c^2· ἤτοι $b^2 + a^2 = c^2$, ὅπως ἀκριβῶς ἐζητεῖτο. Σημειωθήτω ὅτι, ἐκ τῶν τεθεισῶν σχέσεων : $r = 2mp^2$ καὶ $s = 2mq^2$, προκύπτουν αἱ ἐκφράσεις :

$$\frac{r-s}{2} = mp^2 - mq^2,$$

$$\frac{r+s}{2} = mp^2 + mq^2.$$

Τὸ ληφθὲν ἐξαγόμενον εἶναι λοιπὸν ἰσοδύναμον πρὸς τὸ θεώρημα, τὸ ἐκφραζόμενον ὑπὸ τῆς ταυτότητος :

$$(2mpq)^2 + (mp^2 - mq^2)^2 = (mp^2 + mq^2)^2,$$

τὸ ὁποῖον παρέχει ὅλας τὰς λύσεις τῆς πυθαγορείου ἐξισώσεως, ὅπως ἦτο ἤδη γνωστὸν εἰς τὸν Εὐκλείδη.

Μὴ ἱκανοποιημένος πλήρως ὁ Λεονάρδος ἀπὸ αὐτὰς τὰς συμβολάς, ποὺ ἔδωσεν εἰς τὸ πρόβλημα τῆς διασπάσεως ἑνὸς τετραγώνου εἰς ἄθροισμα δύο ἄλλων, ἀπέδειξεν ἐν συνεχείᾳ ὅτι ἐκ δύο λύσεων τοῦ προβλήματος ἀπορρέουν «ἄλλαι ρηταὶ» ἄπειροι τὸ πλῆθος μὲ τὴν ἀκόλουθον διαδικασίαν: Ἔστωσαν a, m, n, p, q, r ἓξ ἀριθμοὶ τοιοῦτοι, ὥστε νὰ ἔχωμεν $m^2 + n^2 = a^2$, $p^2 + q^2 = r^2$. Ὑποτιθεμένου $r \neq a$, προσδιορίζονται δύο ἀριθμοὶ m′, n′ τοιοῦτοι, ὥστε νὰ εἶναι $r/a = p/m' = q/n'$ καὶ ἑπομένως :

$$m' = \frac{ap}{r}, \qquad n' = \frac{aq}{r},$$

καὶ

$$m'^2 + n'^2 = \frac{a^2(p^2+q^2)}{r^2} = a^2.$$

Ἐντεῦθεν συνάγεται, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ m′, n′ ἀποτελοῦν μίαν λύσιν (τῆς m, n διάφορον) τῆς ἐξισώσεως $x^2 + y^2 = a^2$.

Προσθέτομεν ἀκόμη ὅτι ὁ Λεονάρδος ἀποκαθιστᾷ τὴν διπλῆν ταυτότητα:

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (bc - ad)^2 = (ad + bc)^2 + (bd - ac)^2,$$

ἡ ὁποία ἐπανευρέθη ἀπὸ τὸν Bachet de Méziriac, ἐχρησιμοποιήθη ἀπὸ τοὺς Viète, Cauchy καὶ πολλοὺς ἄλλους, ἀλλὰ εἰς μνήμην ἐκείνου, ὁ ὁποῖος πρῶτος τὴν ἀνεκάλυψε, θὰ ἤξιζε καὶ πρέπει νὰ φέρῃ τὸ ὄνομα Θεώρημα τοῦ Fibonacci.

Ἀπὸ τὴν ταυτότητα αὐτὴν ὁ Λεονάρδος ἐπέτυχε μίαν διπλῆν διάσπασιν εἰς δύο τετράγωνα ἑνὸς ἀριθμοῦ ἴσου πρὸς τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν, ὧν ἕκαστος ἄθροισμα δύο τετραγώνων, $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$, ὅταν a, b, c, d δὲν ἀποτελοῦν ἀναλογίαν. Προσθέτει δὲ ὅτι μία τρίτη διάσπασις λαμβάνεται, ὅταν $a^2 + b^2$ εἶναι τετράγωνον καὶ μία τετάρτη, ὅταν εἶναι τετράγωνον τὸ $c^2 + d^2$. Ἐξ αὐτοῦ ἄγεται εἰς νέαν λύσιν τῆς πυθαγορείου ἐξισώσεως, $x^2 + y^2 = a^2$, τὴν ὁποίαν λύσιν, χάριν συντομίας, δὲν θ' ἀναφέρωμεν.

Ὑποδεικνύομεν, ἀντιθέτως, μίαν μέθοδον, τὴν ὁποίαν ἐνεπνεύσθη ὁ Λεονάρδος, ἵνα ἐκ μιᾶς λύσεως c, d τῆς ἐξισώσεως $x^2 + \psi^2 = k$ λαμβάνωμεν ὅσας ἄλλας θέλωμεν. Ἐκλέγονται πρὸς τοῦτο δύο τετράγωνα a^2, b^2, ἀκέραια ἢ κλασματικά, ἔχοντα ὡς ἄθροισμα ἕνα τετράγωνον f^2 καὶ ἐπὶ πλέον νὰ εἶναι $a/d = c/b$. Ἔστω δὲ ἀκόμη :

$$i = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = p^2 + q^2, \quad \text{ἢ} \quad i = kf^2.$$

Ἐντεῦθεν προκύπτει $f = \sqrt{i} : \sqrt{k}$ καὶ ἂν οἱ ἀριθμοὶ x, y ἐκλεγοῦν οὕτως, ὥστε νὰ πληροῦνται αἱ συνθῆκαι :

$$\frac{p}{x} = \frac{q}{y} = \frac{\sqrt{i}}{\sqrt{k}},$$

θὰ ἔχωμεν, ὡς ἔδει, $x^2 + y^2 = k$.

Διὰ νὰ λύσῃ ἄλλα προβλήματα σχετικὰ πρὸς τοὺς τετραγώνους ἀριθμούς, ὁ μαθηματικὸς τῆς Πίζης ὑπολογίζει τὸ ἄθροισμα :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2,$$

στηριζόμενος ἐπὶ τῆς ἀκολούθου ταυτότητος :

$$(m + 1)(m + 2)(2m + 3) = m(m + 1)(2m + 1) + 6(m + 1)^2.$$

Ἂν πράγματι τεθῇ εἰς αὐτὴν διαδοχικῶς $m = 1, 2, \ldots, n$ καὶ προστεθοῦν κατὰ μέλη αἱ προκύπτουσαι ἰσότητες, λαμβάνεται τὸ ἐξαγόμενον :

$$n(n + 1)(2n + 1) = 6(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2),$$

γνωστὸν ἤδη ἀπὸ τῆς ἐποχῆς τοῦ Ἀρχιμήδους. Ὁ Fibonacci συνάγει ἐξ αὐτοῦ τὴν τιμὴν τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν πρώτων n φυσικῶν ἀριθμῶν ἀρτίων ἢ περιττῶν.

167. Ἐὰν φαίνεται δύσκολον ν' ἀρνηθῇ κανεὶς τὴν ἐπίδρασιν τοῦ Muhammed ibn Hosein (§ 153) εἰς τὰς ἀνωτέρω ἐρεύνας τοῦ Πιζᾶνο, ἡ ἐξάρτησίς του ἀπὸ τὸν ἄραβα μαθηματικὸν ἐμφανίζεται πολὺ ὀλιγώτερον ἀμφίβολος εἰς τὸ ἑπόμενον μέρος τοῦ Liber Quadratorum, ὅπου ἐξετάζονται οἱ «ἰσοδύναμοι ἀριθμοὶ» (numeri congruentes). Τὸ ὄνομα αὐτὸ ἔδωσεν ὁ Fibonacci εἰς ἀριθμοὺς τῶν ἀκολούθων μορφῶν :

$$ab\,(a+b)(a-b), \quad \text{ἔνθα} \quad a+b \quad \text{ἄρτιον},$$

$$4ab\,(a+b)(a-b), \quad \text{ἔνθα} \quad a+b \quad \text{περιττόν},$$

καὶ ὁ ἀριθμὸς a ἀκέραιος μεγαλύτερος πάντοτε τοῦ b. Ἀποδεικνύει ἐν πρώτοις τὸ θεώρημα, ὅτι οἱ ἰσοδύναμοι ἀριθμοὶ εἶναι πάντοτε διαιρετοὶ διὰ τοῦ 24, καὶ ἔπειτα ὅτι ἡ κατηγορία αὐτὴ τῶν ἀριθμῶν προκύπτει ἐκ τῆς λύσεως τῆς διπλῆς ἐξισώσεως :

$$x^2 \pm m = \square, \qquad (1)$$

ἔνθα m δοθεὶς ἀριθμός, ἡ ὁποία διὰ $m = 5$ ταυτίζεται πρὸς τὴν ἐξίσωσιν, ποὺ εἴδομεν εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον. Ὁ Λεονάρδος ἀποδεικνύει ὅτι, ἵνα ἡ διπλῆ ἐξίσωσις εἶναι ἐπιλύσιμος εἰς ἀκεραίους ἀριθμούς, πρέπει ὁ m νὰ εἶναι ἀριθμὸς ἰσοδύναμος. Ἡ μικροτέρα τιμὴ τοῦ m εἶναι 24, συνεπῶς διὰ $m = 5$ ἡ ἐξίσωσις (1) οὐδεμίαν λύσιν εἰς ἀκεραίους ἀριθμοὺς ἐπιδέχεται. Εὑρίσκει ὅμως τὴν κλασματικὴν λύσιν $x = 41/12$. Ἀκολουθεῖ δὲ ἔπειτα εἰδικὴν διαδικασίαν διὰ νὰ ἐξαγάγῃ ἀπὸ ἕνα ἀριθμὸν ἰσοδύναμον ἀπείρους ἄλλους καὶ τὰ ἑξῆς θεωρήματα: «Οὐδεὶς ἰσοδύναμος ἀριθμὸς εἶναι τετράγωνον», «πολλαπλασιάζοντες ἕνα ἰσοδύναμον ἀριθμὸν ἐπὶ τετράγωνον προκύπτει νέος ἀριθμὸς ἰσοδύναμος».

Παρεμπιπτόντως ὁ Λεονάρδος ἀποκαθιστᾷ (ἂν καὶ κατὰ τρόπον οὐχὶ ἄρτιον) μίαν πρότασιν μεγίστης σπουδαιότητος, καθ' ὅσον ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὸ θεώρημα τοῦ Fermat, ὅτι «τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου τριγώνου μὲ πλευρὰς ἀκεραίους ἀριθμοὺς δὲν δύναται νὰ ἐκφρασθῇ μὲ ἀριθμὸν τετράγωνον». Ἀπαντῶνται ἀκόμη μερικὰ κριτήρια, διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τῶν ὁποίων δυνάμεθα ν' ἀναγνωρίσωμεν ἐὰν δοθεὶς ἀριθμὸς εἶναι ἢ δὲν εἶναι ἰσοδύναμος.

Ἐκτὸς ἀπὸ τὰς σελίδας αὐτὰς ποὺ ἔχουν θεωρητικὸν χαρακτῆρα, τὸ Liber Quadratorum περιέχει τὰς λύσεις διαφόρων δυσκόλων προβλημάτων ἀναγομένων εἰς ἀπροσδιόριστον ἀνάλυσιν δευτέρου βαθμοῦ. Περιοριζόμεθα ν' ἀναφέρωμεν τὰς ἐκφωνήσεις εἰς σύγχρονον ἀλγεβρικὴν διατύπωσιν :

$$x^2 \pm x = \square \qquad (1)$$

$$x^2 \pm mx = \square \qquad (2)$$

$$z^2 - y^2 = \frac{b}{a}(y^2 - x^2) \qquad (3)$$

$$x_1^2 + x_2^2 = \square$$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \square \qquad (4)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = \square$$

$$x + y + z + x^2 = \square$$
$$x + y + z + x^2 + y^2 = \square \qquad (5)$$
$$x + y + z + x^2 + y^2 + z^2 = \square$$

Τὸ τελευταῖον ἐπροτάθη εἰς τὸν Fibonacci ἀπὸ τὸν «μάγιστρον Θεόδωρον, φιλόσοφον τοῦ αὐτοκράτορος» (§ 165). Πιθανὸν θεωρεῖται, ὅτι εἰς τὸ ἀρχικὸν κείμενον ὑπῆρχον καὶ ἄλλα προβλήματα, ματαίως ἀναζητούμενα εἰς τοὺς ἀκρωτηριασμένους κώδικας, ποὺ ἔφθασαν μέχρις ἡμῶν.

Εἶναι ἄραγε ἀνάγκη νὰ ἐξάρωμεν ρητῶς ὅτι τὸ Liber Quadratorum ἐξασφαλίζει εἰς τὸν συγγραφέα του διακεκριμένην θέσιν μεταξὺ τῶν πρωτοπόρων τῆς σημερινῆς θεωρίας τῶν ἀριθμῶν ; Ἂν τὸ ἔργον τοῦ Fibonacci δὲν παρέμενεν ἐπὶ 6 αἰῶνας ἀδίκως εἰς τὸν τάφον τῆς λήθης, ὁ εὐγενὴς αὐτὸς κλάδος τῶν μαθηματικῶν δὲν θὰ ἐπερίμενε τὴν ἀποφασιστικὴν καὶ γενναίαν ὤθησιν τοῦ Fermat διὰ ν' ἀναπτυχθῇ.

Ἐπίγονοι τοῦ Λεονάρδου εἰς τὴν Ἰταλίαν

168. Ὁποία ὑπῆρξεν ἡ τύχη τὴν ὁποίαν εἶχον καὶ ἡ ἐπίδρασις, τὴν ὁποίαν ἤσκησαν τὰ ἔργα τοῦ Fibonacci εἰς τὴν Ἰταλίαν δὲν εἶναι πρᾶγμα εὔκολον νὰ προσδιορισθῇ. Διότι καὶ ἡ φήμη του δὲν φαίνεται νὰ εἶχε μεγάλην διάδοσιν ἐκτὸς τῶν τειχῶν τῆς Πίζης καὶ περίπου τρεῖς αἰῶνες ἐχρειάσθη νὰ παρέλθουν, διὰ νὰ ἐμφανισθῇ ἀντάξιος συνεχιστὴς τοῦ ἐξέχοντος ἐκείνου λογιστοῦ τῆς Τοσκάνης. Ἐπὶ πλέον πρέπει νὰ σημειωθῇ, ὅτι ἡ χρῆσις τῶν ψηφίων τοῦ νέου τύπου ἔτυχεν ἐκ μέρους τῶν ἰθυνόντων ἀποδοκιμασίας καὶ ἐχθρότητος, εἴτε διότι ἡ ἀποδοχὴ συστημάτων ἀνηκόντων εἰς τοὺς ἀπίστους ἐθεωρεῖτο ἰσοδύναμος πρὸς ὕβριν κατὰ τῆς κρατούσης θρησκείας, εἴτε διότι οἱ νέοι χαρακτῆρες, μὴ ἔχοντες τὴν σαφῶς καθωρισμένην μορφὴν τῶν ρωμαϊκῶν ψηφίων, ἐξυπηρέτουν τὴν ἀπάτην καὶ τὸν δόλον εἰς τὰς συναλλαγάς. Τοιαύτη ἀντιδραστικὴ διάθεσις πιστοποιεῖται πράγματι ἀπὸ ἕνα ἄρθρον τοῦ Καταστατικοῦ τῶν συναλλαγῶν, τὸ ὁποῖον ἐκυκλοφόρησεν εἰς τὴν Φλωρεντίαν τὸ 1299 καὶ ὑφίσταται μέχρι σήμερον εἰς τὸ Ἀρχεῖον τῶν Μεταρρυθμίσεων τῆς ἰδίας πόλεως. Τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος ἄρθρον ἀπαγορεύει εἰς τοὺς ἐμπόρους νὰ κρατοῦν τὰ βιβλία των «in abbaco» (δηλαδή, κατὰ τὸ ἰνδο-αραβικὸν σύστημα ἀριθμητικῆς) καὶ

$$
\begin{aligned}
&x_1^2 + x_2^2 = \square \\
&x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \square \\
&\dots\dots\dots\dots\dots \\
&x_1^2 + x_2^2 + \ \dots \ + x_n^2 = \square
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

$$
\begin{aligned}
&x + y + z + x^2 = \square \\
&x + y + z + x^2 + y^2 = \square \\
&x + y + z + x^2 + y^2 + z^2 = \square
\end{aligned}
\qquad (5)
$$

Τὸ τελευταῖον ἐπροτάθη εἰς τὸν Fibonacci ἀπὸ τὸν «μάγιστρον Θεόδωρον, φιλόσοφον τοῦ αὐτοκράτορος» (§ 165). Πιθανὸν θεωρεῖται, ὅτι εἰς τὸ ἀρχικὸν κείμενον ὑπῆρχον καὶ ἄλλα προβλήματα, ματαίως ἀναζητούμενα εἰς τοὺς ἀκρωτηριασμένους κώδικας, ποὺ ἔφθασαν μέχρις ἡμῶν.

Εἶναι ἄραγε ἀνάγκη νὰ ἐξάρωμεν ρητῶς ὅτι τὸ Liber Quadratorum ἐξασφαλίζει εἰς τὸν συγγραφέα του διακεκριμένην θέσιν μεταξὺ τῶν πρωτοπόρων τῆς σημερινῆς θεωρίας τῶν ἀριθμῶν ; Ἂν τὸ ἔργον τοῦ Fibonacci δὲν παρέμενεν ἐπὶ 6 αἰῶνας ἀδίκως εἰς τὸν τάφον τῆς λήθης, ὁ εὐγενὴς αὐτὸς κλάδος τῶν μαθηματικῶν δὲν θὰ ἐπερίμενε τὴν ἀποφασιστικὴν καὶ γενναίαν ὤθησιν τοῦ Fermat διὰ ν' ἀναπτυχθῇ.

Ἐπίγονοι τοῦ Λεονάρδου εἰς τὴν Ἰταλίαν

168. Ὁποία ὑπῆρξεν ἡ τύχη τὴν ὁποίαν εἶχον καὶ ἡ ἐπίδρασις, τὴν ὁποίαν ἤσκησαν τὰ ἔργα τοῦ Fibonacci εἰς τὴν Ἰταλίαν δὲν εἶναι πρᾶγμα εὔκολον νὰ προσδιορισθῇ. Διότι καὶ ἡ φήμη του δὲν φαίνεται νὰ εἶχε μεγάλην διάδοσιν ἐκτὸς τῶν τειχῶν τῆς Πίζης καὶ περίπου τρεῖς αἰῶνες ἐχρειάσθη νὰ παρέλθουν, διὰ νὰ ἐμφανισθῇ ἀντάξιος συνεχιστὴς τοῦ ἐξέχοντος ἐκείνου λογιστοῦ τῆς Τοσκάνης. Ἐπὶ πλέον πρέπει νὰ σημειωθῇ, ὅτι ἡ χρῆσις τῶν ψηφίων τοῦ νέου τύπου ἔτυχεν ἐκ μέρους τῶν ἰθυνόντων ἀποδοκιμασίας καὶ ἐχθρότητος, εἴτε διότι ἡ ἀποδοχὴ συστημάτων ἀνηκόντων εἰς τοὺς ἀπίστους ἐθεωρεῖτο ἰσοδύναμος πρὸς ὕβριν κατὰ τῆς κρατούσης θρησκείας, εἴτε διότι οἱ νέοι χαρακτῆρες, μὴ ἔχοντες τὴν σαφῶς καθωρισμένην μορφὴν τῶν ρωμαϊκῶν ψηφίων, ἐξυπηρέτουν τὴν ἀπάτην καὶ τὸν δόλον εἰς τὰς συναλλαγάς. Τοιαύτη ἀντιδραστικὴ διάθεσις πιστοποιεῖται πράγματι ἀπὸ ἕνα ἄρθρον τοῦ Καταστατικοῦ τῶν συναλλαγῶν, τὸ ὁποῖον ἐκυκλοφόρησεν εἰς τὴν Φλωρεντίαν τὸ 1299 καὶ ὑφίσταται μέχρι σήμερον εἰς τὸ Ἀρχεῖον τῶν Μεταρρυθμίσεων τῆς ἰδίας πόλεως. Τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος ἄρθρον ἀπαγορεύει εἰς τοὺς ἐμπόρους νὰ κρατοῦν τὰ βιβλία των «in abbaco» (δηλαδή, κατὰ τὸ ἰνδο-αραβικὸν σύστημα ἀριθμητικῆς) καὶ

ἐντέλλεται τὴν χρῆσιν τῶν ρωμαϊκῶν ψηφίων ἢ ἀκόμη τὴν πλήρη διὰ λέξεων κατονομασίαν καὶ καταγραφὴν τῶν ἀριθμῶν*.

Ἐν πάσῃ περιπτώσει κατὰ τὴν περίοδον αὐτὴν τῆς σκοτεινῆς ἐκφάσεως, ὑπῆρξαν μερικοὶ Ἰταλοί, τῶν ὁποίων τὸ ἀνάστημα δὲν συγκρίνεται βεβαίως μὲ ἐκεῖνο τοῦ Λεονάρδου, ἀξίζουν ὅμως κάποιας μνείας εἰς τὴν ἱστορίαν τῶν μαθηματικῶν, διότι συνέβαλον ἔν τινι μέτρῳ εἰς τὴν διάδοσιν, ἂν μὴ καὶ εἰς τὴν τελειοποίησιν, μερικῶν κεφαλαίων τῆς ἐπιστήμης τῶν ἀριθμῶν κατὰ τὸ πνεῦμα τῶν νέων ἀντιλήψεων.**

Τοιοῦτος εἶναι ἴσως ὁ Guglielmo de Lunis, ὁ ὁποῖος τρέχοντος τοῦ XIII αἰῶνος, ἔγραψεν εἰς τὴν λατινικὴν ἕνα βιβλίον ἀλγέβρας, χρησιμοποιῶν εἰς εὐρεῖαν κλίμακα ὕλην ἐξ ἀραβικῶν πηγῶν. Δὲν ἐδημοσιεύθη τὸ βιβλίον τοῦτο μέχρι σήμερον, ἀλλὰ ἐπωφελήθη τούτου ὁ Raffaele Canacci, ὁ ὁποῖος τὸν ἑπόμενον αἰῶνα ἔγραψεν εἰς τὴν ἰταλικὴν ἕνα βιβλίον ἀλγέβρας, ἀνέκδοτον μέχρι τῆς στιγμῆς, μολονότι ἁρμόδιος κριτὴς — ὁ Libri — ἀφοῦ τὸ ἐξήτασε, δὲν ἐδίστασε νὰ δηλώσῃ ὅτι εἶναι ἄξιον νὰ ἴδῃ τὸ φῶς τῆς δημοσιότητος.

Σημειοῦμεν ἐπ' εὐκαιρίᾳ ὅτι σύγχρονος τοῦ Λεονάρδου ὑπῆρξεν ὁ Giovanni Campano da Novara, παρεκκλησιάρχης τοῦ Οὐρβανοῦ IV (κατέχοντος τὴν ἕδραν τοῦ Ἁγίου Πέτρου κατὰ τὴν εἰκοσαετίαν 1261 - 1281), ὁ ὁποῖος μετέφρασεν ἐκ τῆς ἀραβικῆς εἰς τὴν λατινικὴν τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου (συμπεριλαμβανομένων καὶ τῶν οὕτω καλουμένων Βιβλίων XIV καὶ XV), προσθέσας μάλιστα σχόλια, ἀξιόλογα διὰ τὴν εἰς αὐτὰ παρουσίαν τοῦ ἀστεροειδοῦς πενταγώνου καὶ τῆς ἐννοίας τῶν γωνιῶν συνεπαφῆς, ἀλλὰ καὶ ἄξια τῆς ἀπορίας πῶς τοῦ ἦλθεν εἰς τὸν νοῦν νὰ προσθέσῃ εἰς τὰ αἰτήματα τοῦ Εὐκλείδου καὶ τὸ ἀκόλουθον : «κάθε σύνολον ἀριθμῶν περιέχει ἕνα ἐλάχιστον». Ἐνῷ λοιπὸν θὰ ἔπρεπε νὰ λογίζεται μεταξὺ τῶν ἐπιγόνων τοῦ Fibonacci, ὁ Campano συγκαταριθμεῖται μᾶλλον μεταξὺ τῶν ὀπαδῶν τοῦ οὑμανιστικοῦ κινήματος, τὸ ὁποῖον ἤρχιζε νὰ θριαμβεύῃ, χάρις εἰς τὰς προσπαθείας τοῦ Πετράρχου καὶ τοῦ Βοκκακίου.

169. Περισσότερον γνωστὸς ἀπὸ τοὺς προαναφερθέντας μαθηματικοὺς εἶναι ὁ Παῦλος τοῦ Ἄβακος (Paolo dell' Abbaco) — ἐπονομαζόμενος, κατά τινας, Dagomari — (γεννηθεὶς εἰς Prato κατὰ τὸ 1282, ἀποθανὼν εἰς Φλωρεντίαν τὸ 1374). Οὗτος εἶναι συγγραφεὺς μερικῶν Κανοναρίων (Regoluzze), τιμηθέντων μὲ ἐπανειλημμένας ἐκδόσεις. Ἡ φήμη

* Βλ. M. Tabarrini : Cenno illustrativo di alcune tavolette scritte in cera (Παράρτημα Ἱστορικοῦ Ἰταλικοῦ Ἀρχείου, τόμος III, Φλωρεντία, 1845, σελ. 528).

** Καὶ ἄλλοι θὰ ἔλθουν ἀσφαλῶς εἰς φῶς, ὅταν συμπληρωθοῦν αἱ ἔρευναι τῶν φλωρεντινῶν χειρογράφων, τὰ ὁποῖα, κατὰ τὸν G. Libri, οὐδεὶς ἠρεύνησε. Βλ. Histoire des sciences mathématiques en Italie, τόμος III, Nota XXXI, Paris, 1840.

του ὡς εἰδικωτάτου εἰς τὰ θέματα τοῦ ἀριθμητικοῦ λογισμοῦ, τῆς γεωμετρίας καὶ τῆς πορείας τῶν ἄστρων, ἀποδεικνύεται ἀπὸ τὰ διάφορα παρωνύμια, μὲ τὰ ὁποῖα τὸν ἀπεκάλουν οἱ σύγχρονοι καὶ οἱ ἄμεσοι διάδοχοί των: «ἀριθμέτρην», «γεωμέτρην», «ἀστρολόγον». Μεταξὺ αὐτῶν μᾶς εἶναι εὐχάριστον ν' ἀναφέρωμεν τὸν γνωστὸν μυθογράφον Franco Sacchetti, ὁ ὁποῖος εἰς ἕνα τραγούδι, ποὺ ἔγραψε πρὸς τιμὴν τοῦ Βοκκακίου, λέγει :

«Ὁ Παῦλος μόνος, ὁ ἀριθμέτρης κι ἀστρολόγος,
ποὺ ποτὲ δὲ χόρτασε νὰ βλέπει
τ' ἄστρα καὶ τοὺς πλανῆτες πῶς περνοῦν,
λιγάκι ἔλλειψε ψηλὰ νὰ βγεῖ στὸν πολικό».

Δὲν εἶναι δὲ αὐτοὶ οἱ μοναδικοὶ στίχοι, ποὺ ἐνέπνευσεν ὁ ἀγαθὸς Παῦλος. Εἰς ἕνα σονέττο, ποὺ ἐγράφη πρὸς τιμήν του καὶ εἶναι καταχωρημένον εἰς μερικοὺς χειρογράφους κώδικας, τίθεται εἰς τὸ στόμα τοῦ ἰδίου ἕνα αὐτοεγκώμιον μὲ τοὺς στίχους :

«Ἔγινα ὁ καθρέφτης στὴν ἀστρολογία,
μὲ τ' ὄνομα Παγκόλ· καὶ ταίρι μου ποτὲ δὲ βρῆκα,
γιατὶ δέκα χιλιάδες ἔχω βγάλει μαθητές,
ἄριστους καὶ γεροὺς στὴ γεωμετρία».

Ἀναφέρεται ἀκόμη, πρὸς τιμήν του, ὅτι ἀποθνήσκων ἄφησε διὰ διαθήκης του τὰ πολυάριθμα βιβλία καὶ ἀστρονομικὰ ἐργαλεῖα, ποὺ εἶχε περισυλλέξει, εἰς ἐκεῖνον τὸν φλωρεντινὸν φιλομαθῆ, τοῦ ὁποίου τὴν ἐπιστημονικὴν ἀξίαν θὰ ἀνεγνώριζον καὶ θὰ ἐπιστοποίουν τέσσαρες εἰδικοὶ καθηγηταί. Ἔπειτα ἀπὸ πολλὰς φιλονικίας περιῆλθε τὸ κληροδότημα εἰς τὸν Antonio de Mazzinghi da Peretola, ὁ ὁποῖος, ἂν καὶ ἀπέθανεν εἰς ἡλικίαν τριάκοντα μόλις ἐτῶν, ἀπέκτησε μεγάλην φήμην ὡς διδάσκαλος καὶ ὡς ἐπιστήμων, χάρις εἰς μερικὰ ἐπιτυχῆ βιβλία, παγκοίνως γνωστὰ εἰς τοὺς συγχρόνους του, εἰς ἡμᾶς ὅμως ἐντελῶς ἄγνωστα.

Δὲν ὑστερεῖ εἰς φήμην τοῦ προηγουμένου ὁ ἐκ Πάρμας καταγόμενος Biagio Pelacani, ὁ ὁποῖος ἀφοῦ ἔλαβε τὸ διδακτορικόν του δίπλωμα τὸ 1374 εἰς Pavia, ἐδίδαξεν εὐδοκίμως εἰς πολλὰ πανεπιστήμια, μὴ ἐξαιρουμένου, ὡς λέγεται, καὶ τοῦ πανεπιστημίου τῶν Παρισίων. Τὸν εὑρίσκομεν πράγματι εἰς Βολωνίαν κατὰ τὰ ἔτη 1378 - 84 ὡς κάτοχον πρῶτα τῆς ἕδρας τῆς ἀστρονομίας, κατόπιν δὲ τῆς φιλοσοφίας. Ἀπὸ ἐκεῖ μετέβη εἰς Padova, ὅπου ἦλθεν εἰς ρῆξιν μὲ τὸν φοιτητικὸν κόσμον, κατόπιν τῆς ὁποίας ἐπέστρεψεν εἰς Βολωνίαν (1388). Κατὰ τὰ ἔτη 1404, 1406, 1407 ἄφησεν ἴχνη διαβάσεώς του ἀπὸ τὴν Pavia, ὁπόθεν πάλιν μετέβη εἰς Padova (1408), ὅπου καὶ παρέμεινε μέχρι τῆς 15ης Ὀκτωβρίου 1411. Μετεφέρθη τότε εἰς Parma, τὴν γενέθλιόν του πόλιν, ὅπου καὶ ἀπέθανε τὴν 23ην Ἀπριλίου

1416. Ἠσχολήθη μὲ τὴν στατικὴν καὶ τὴν προοπτικήν, χωρὶς ν' ἀφήσῃ συγγράμματα ἐπικυροῦντα τὴν μεγάλην φήμην τῆς ὁποίας ἀπήλαυεν ἐν ζωῇ.*

Παραπλήσια ἐπιστημονικὰ χαρακτηριστικὰ παρουσιάζει ὁ Prosdocimo de' Beldomandi. Γεννηθεὶς εἰς Padova, κατὰ τὴν δεκαετίαν 1370 - 80, φοιτήσας εἰς τὸ πάτριον πανεπιστήμιον καὶ εἰς ἐκεῖνο τῆς Βολωνίας, διδάξας εἰς Padova ἀπὸ τῆς 20ης Νοεμβρίου 1422, ἀπέθανεν ἓξ ἔτη ἀργότερα εἰς τὴν γενέθλιον πόλιν. Τοῦ ἔργου του Algoritmus Demonstratus (θὰ ἐλέγαμεν σήμερον : θεωρητικὴ ἀριθμητική), ἂν καὶ παρουσιάζει μετρίαν πρωτοτυπίαν, γίνεται μνεία εἰς τὰ ἔργα τοῦ Pacioli, τοῦ Tartaglia καὶ τοῦ Wallis. Εἰς ἕνα ἄλλο ἔργον του Canon in quo docetur modus componendi et operandi tabulam quandam (Κανὼν διὰ τὴν κατασκευὴν καὶ χρῆσιν τυχόντος πίνακος), ἀπαντᾶται ἕνας πίναξ πολλαπλασιασμοῦ ἐκτεινόμενος μέχρι τοῦ γινομένου 22 × 22 (μόνον τὸ περιωρισμένον πλάτος τοῦ φύλλου δὲν ἐπέτρεψεν εἰς τὸν συγγραφέα νὰ τὸν ἐπεκτείνῃ περισσότερον). Κακῶς ἀπεδόθη εἰς αὐτὸν ἕνα ἐγχειρίδιον γεωμετρίας. Ἄφησεν ὅμως πολλὰ ἀστρονομικὰ συγγράμματα, στηριζόμενα ἐπὶ τῆς Σφαίρας τοῦ Sacrobosco, συγγραφέως μὲ τὸν ὁποῖον θ' ἀσχοληθῶμεν εἰς τὸ προσεχὲς κεφάλαιον.

Μεταξὺ τῶν ἐπιγόνων τοῦ Fibonacci δὲν συγκαταλέγεται ὁ Dante Alighieri (1265 - 1321). Φαίνεται ὅτι ὁ μέγας ποιητὴς εἶχεν ἀγνοήσει τὴν ὕπαρξιν τοῦ ταπεινοῦ λογιστοῦ τῆς Πίζης, ἐκτὸς ἐὰν ἡ σιωπή, τὴν ὁποίαν ἐπεφύλαξεν εἰς τὸν φίλον τοῦ Michele Scotto, ὀφείλεται εἰς ἐπιθυμίαν τοῦ ποιητοῦ νὰ μὴ συμβάλῃ κατ' οὐδένα τρόπον εἰς τὴν δόξαν μιᾶς πόλεως «αἴσχους τῶν ἀνθρώπων» (vituperio delle genti). Ἄλλωστε πρέπει νὰ σημειωθῇ ὅτι παρὰ τὰς ἀνεδαφικὰς διαβεβαιώσεις μερικῶν τυφλῶν θαυμαστῶν τοῦ συγγραφέως τῆς Θείας Κωμωδίας, ὅλα μαρτυροῦν, ὅτι αἱ μαθηματικαὶ γνώσεις τοῦ Dante θὰ ἔπρεπε νὰ ἀνάγωνται εἰς ὅσα ἤντλησεν ἀπὸ τὰ ἔργα τοῦ Ἀριστοτέλους καὶ τὰ γραπτὰ τοῦ Βοηθίου. Οἱ ἀριθμητικοὶ ὑπαινιγμοί, τοὺς ὁποίους παρουσιάζει, τὸν ἀποδεικνύουν ἕνα καθυστερήσαντα ὀπαδὸν τοῦ νεοπυθαγορικοῦ μυστικισμοῦ, πνευματικὸν γνώρισμα ἐκδηλούμενον ἀκόμη καὶ εἰς τὴν κατανομὴν τοῦ μεγάλου ποιήματος εἰς $1 + 33 + 33 + 33 = 100$ ᾠδάς. Ὅσον ἀφορᾷ δὲ τὰς γεωμετρικάς του γνώσεις, τὰ μόνα δείγματα τούτων ἀπαντῶνται εἰς τοὺς ἀκολούθους στίχους τοῦ Παραδείσου:

«...γιὰ ἂν τρίγωνο μπορεῖς σὲ μισοκύκλι
χωρὶς ὀρθὴ γωνιὰ ποτὲ νὰ μπάσεις»
(Ὠδὴ XIII, 101 - 2),

* Οἱ βιογράφοι τοῦ Vittorino da Feltre κατακρίνουν τὴν φιλαργυρίαν τοῦ Pelacani, ἡ ὁποία τοῦ ἀφήρεσε τὴν δόξαν νὰ συγκαταριθμήσῃ τὸν ἥρωά των μεταξὺ τῶν μαθητῶν του.

«...ποὺ ὡς τὰ θνητὰ μυαλὰ νογοῦν πὼς δύο
φαρδιὲς γωνιὲς σὲ τρίγωνα δὲν μπαίνουν»
(Ὠδὴ XVII, 15),

«Ὡς ὁ γεωμέτρης ποὺ ὅλος βυθισμένος
τὸν κύκλο νὰ μετρήσει, μὰ δὲ βρίσκει
στὸ νοῦ του τὸ θεμέλιο ποὺ'χει ἀνάγκη»
(Ὠδὴ XXXIII, 133 - 5).

Παρατηροῦμεν, τέλος, ὅτι ἴσως θὰ ἔπρεπε νὰ συγκαταριθμήσωμεν μεταξὺ τῶν ἐπιγόνων τοῦ Λεονάρδου Πιζᾶνο καὶ τὸν Leonardo Mainardi ἐκ Κρεμώνης, συγγραφέα τοῦ ἔργου Artis metrice practice. Ἀλλ' ἡ σκιὰ ἡ καλύπτουσα τὸν συγγραφέα καὶ ἡ μετριότης τοῦ ἔργου του μᾶς ἀποτρέπουν νὰ κάμωμεν λόγον περὶ αὐτοῦ καὶ ἐκείνου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XIII

Η ΑΝΑΓΕΝΝΗΣΙΣ ΠΕΡΑΝ ΤΩΝ ΑΛΠΕΩΝ

Κατὰ τὸν XIII αἰῶνα

170. Καθ' ὃν χρόνον οἱ συμπατριῶται τοῦ Fibonacci ἐδείκνυον ἐμπράκτως περισσότερον τὴν πρόθεσιν παρὰ τὴν δύναμιν νὰ καλλιεργήσουν τοὺς ἐνδόξους κλάδους τῆς ἐπιστήμης, εἰς τὴν λοιπὴν Εὐρώπην ἐκ παραλλήλου ἤρχισαν νὰ διαφαίνωνται συμπτώματα ἀραιώσεως τῆς ἐπικαθημένης αἰωνίας ὁμίχλης, χάρις εἰς τὴν δρᾶσιν προσώπων, τῶν ὁποίων ἡ ἀξία πρέπει νὰ κριθῇ, λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν τῆς ἀθλιότητος τῆς ἐποχῆς των.

Ἐκ τῶν πρώτων ἐμφανίζεται μία ἀπὸ τὰς αἰνιγματικὰς ἐκείνας προσωπικότητας, αἱ ὁποῖαι θέτουν εἰς σκληρὰν δοκιμασίαν τοὺς ἱστορικούς, ὅπως ἔγινε καὶ μὲ τὴν περίπτωσιν τοῦ Ἥρωνος τοῦ Ἀλεξανδρέως. Ὁμιλοῦμεν διὰ τὸν συγγραφέα τῶν ἔργων ἐκείνων, τῶν ὁποίων πλεῖστα ἀντίγραφα ἐπεσημάνθησαν εἰς τὰς κυριωτέρας βιβλιοθήκας τῆς Εὐρώπης, φερόμενα ὑπὸ τὸ λατινικὸν ὄνομα Jordanus Nemorarius (κάτοικος τῶν δασῶν ;). Πρέπει ἄραγε, νὰ ταυτισθῇ μὲ τὸν Jordanus Saxo, ὅστις διεδέχθη τὸ 1221 τὸν Domingo Saxo, ἱδρυτὴν καὶ πρῶτον ἡγούμενον τοῦ Τάγματος τῶν Δομινικανῶν καὶ ἀπέθανε τὸ 1236 ; Εἶναι ὁ ἴδιος συγγραφεὺς ἑνὸς ἔργου φέροντος τίτλον Algoritmus Demonstratus ; ἢ μήπως τὸ ἔργον τοῦτο ἐγράφη ἀπὸ ἕνα ἄλλο πρόσωπον, τὸν Magister Genardus ἢ Gernandus, τὸν ὁποῖον πολλοὶ τείνουν νὰ ταυτίσουν πρὸς τὸν Γεράρδον τῆς Κρεμώνης, τὸν σοφὸν μεταφραστὴν ποὺ ἐγνωρίσαμεν ἤδη (§ 114); Καὶ μία ἀκόμη ἀπορία· ἕνα ἀπόσπασμα, ποὺ φέρει τὸν τίτλον Demonstratio Jordani de Alogorismo, εἶναι, ἄραγε, μέρος ἑνὸς μεγαλυτέρου ἔργου, τοῦ Opus Numerorum, τὸ ὁποῖον τοῦ ἀποδίδεται ; Ἀρκεῖ ἡ ἀνωτέρω ἀπαρίθμησις, διὰ νὰ δείξωμεν τὰ ἱστορικὰ προβλήματα, ποὺ ἀναμένουν ἀκόμη ἱκανοποιητικὴν ἀπάντησιν, ἀπὸ νέας ἀναδιφήσεις τῶν ἀρχείων.

Ὅσον ἀφορᾷ τώρα τὸν περὶ οὗ ὁ λόγος Jordanus Nemorarius ἢ ἰταλικὰ Giordano Nemorario, ἔχομεν νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι τοῦ ἀνήκει μία θέσις :

α) Εἰς τὴν ἱστορίαν τῆς μηχανικῆς, δι' ἕνα χωρίον τιτλοφορούμενον De ponderibus (περὶ σταθμῶν).

b) Εἰς τὴν ἱστορίαν τῆς κοσμογραφίας, δι' ἕνα μικρὸν ἔργον τιτλοφορούμενον Planisphaerium, ὅπου ἀποδεικνύεται γενικῶς, ὅτι εἰς τὴν στερεογραφικὴν προβολὴν σφαίρας οἱ κύκλοι ἀντιστοιχοῦν εἰς κύκλους, ἰδιότης τὴν ὁποίαν ὁ Πτολεμαῖος δὲν εἶχε διατυπώσει παρὰ εἰς εἰδικὰς μόνον περιπτώσεις.

c) Εἰς τὴν ἱστορίαν τῆς ἀριθμητικῆς, δι' ἕνα Ἐ γ χ ε ι ρ ί δ ι ο ν ἐκδοθὲν δύο φορὰς (1496, 1514) τῇ φροντίδι τοῦ διασήμου Giacomo Lefèvre d' Etalpes (λατινικὰ Faber Stapulensis) (1455 - 1537), διδασκάλου τῆς Renata τῆς Γαλλίας, δουκίσσης τῆς Ferrara κατὰ τὴν ἐποχὴν τοῦ Ariosto. Ἐπίσης, δι' ἕνα ἄλλο ἔργον De numeris datis, ἀναμφιβόλως ἀξιόλογον, συντόμως ὅμως παραμερισθὲν ἀπὸ ἄλλο τοῦ Giovanni de Meurs ἢ de Muris (1310 - 1360), πολὺ περισσότερον εὐκατάληπτον καὶ διὰ τοῦτο ἀξιωθὲν μιᾶς ἐκδόσεως τὸ 1515. Τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος ἔργον εἶναι συντεταγμένον κατ' ἀπομίμησιν τῶν ἔργων τοῦ Νικομάχου καὶ τοῦ Βοηθίου, εἶναι ὅμως κατά τι πλουσιώτερον ὅσον ἀφορᾷ τὰ διάφορα εἴδη τῶν ἀριθμῶν, τοὺς λόγους καὶ ἀναλογίας. Ὡς πρὸς τὸν τρόπον τῆς ἐκθέσεως ἔχει ὡς ὑπόδειγμα, πιθανώτατα, τὰ Δ ε δ ο μ έ ν α τοῦ Εὐκλείδου. Παρὰ ταῦτα, ἐνῷ ὁ ἀρχαῖος γεωμέτρης ἐσυλλογίζετο πάντοτε ἐπὶ εὐθυγράμμων τμημάτων, ὀνομαζομένων μὲ γράμματα, ὁ Giordano παραιτεῖται τοῦ γεωμετρικοῦ συμβολισμοῦ, ὅπου δὲν τοῦ φαίνεται ἀπαραίτητος, προσανατολιζόμενος τοιουτοτρόπως πρὸς τὴν κατεύθυνσιν, ἡ ὁποία ἐπέπρωτο νὰ ὁδηγήσῃ εἰς τὴν συμβολικὴν ἄλγεβραν. Εἰς τὸ βιβλίον I ὁ συγγραφεὺς ἀποδεικνύει κατ' οὐσίαν, ὅτι «δοθείσης μιᾶς ἐξισώσεως 2ου βαθμοῦ, δίδονται κατ' ἀνάγκην καὶ αἱ ρίζαι της», ἐνῷ εἰς τὸ βιβλίον II προέχει ἡ παρατήρησις ὅτι μία ἀναλογία εἶναι δεδομένη, ὅταν εἶναι γνωστοὶ τρεῖς ὅροι της. Περὶ ἀναλογιῶν ὁμιλεῖ ἐπίσης καὶ εἰς τὸ βιβλίον III, ἐνῷ εἰς τὸ βιβλίον IV ἐκτίθενται, εἰς γλῶσσαν ρητορικῆς ἀλγέβρας, τ' ἀφορῶντα τοὺς συνήθεις τρεῖς τύπους ἐξισώσεων :

$$x^2 + bx = c, \quad x^2 + c = bx, \quad bx + c = x^2$$

(b, c, ἀριθμοὶ θετικοί). Ὁ Giordano σημειώνει, ὅτι αἱ ἐξισώσεις τοῦ δευτέρου τύπου δύνανται νὰ ἔχουν δύο ρίζας.

d) Εἰς τὴν ἱστορίαν τῆς γεωμετρίας, δι' ἕνα ἀξιόλογον βιβλίον τιτλοφορούμενον De Triangulis, τὸ ὁποῖον τείνουν σήμερον νὰ ταυτίσουν μὲ ἕνα ἄλλο ἔργον φέρον τὸν ὀλίγον μυστηριώδη τίτλον Philotechnes, ποὺ ἐθεωρεῖτο ἐπὶ μακρὸν ὡς ὁριστικῶς ἀπολεσθέν. Εἰς τὸ ἔργον τοῦτο θὰ σταματήσωμεν ἐπ' ὀλίγον.

171. Ἐκ τῶν τεσσάρων βιβλίων, ποὺ ἀποτελοῦν τὸ ἔργον, τὰ δύο ἀναφέρονται εἰς εὐθύγραμμα σχήματα, τὰ δὲ λοιπὰ εἰς τὸν κύκλον καὶ τὰ πολύγωνα, ἐγγεγραμμένα ἢ περιγεγραμμένα. Τὸ ὅλον ἔργον εἶναι ἀξιοσημείωτον διὰ τοὺς αὐστηρούς του συλλογισμούς. Ὅσον ἀφορᾷ τὴν πρωτοτυπίαν τοῦ

περιεχομένου, δὲν εἶναι εὔκολον νὰ τὴν σταθμίσωμεν, ἀφοῦ μᾶς εἶναι ἄγνωστοι αἱ ἀραβικαὶ πηγαί, ἐκ τῶν ὁποίων ἤντλησεν ὁ συγγραφεύς. Χωρὶς νὰ ἐπιχειρήσωμεν ἐξαντλητικὴν ἀνάλυσιν τοῦ ἔργου, θ' ἀποσπάσωμεν ἀπὸ τὸ Βιβλίον IV τούτου τὰς ἀκολούθους ἀξιοσημειώτους προτάσεις:

Ἔστωσαν s_n, S_n τὰ ἐμβαδὰ τῶν κανονικῶν πολυγώνων μὲ n πλευράς, τῶν ἐγγεγραμμένων καὶ περιγεγραμμένων ἀντιστοίχως εἰς κύκλον ἀκτῖνος r. Ἔστωσαν p_n, P_n αἱ ἀντίστοιχοι περίμετροι. Θὰ ἔχωμεν γενικῶς:

$$\frac{s_n}{S_{2n}} = \frac{s_{2n}}{S_n}$$

καί, ἐὰν εἶναι $n > m$,

$$s_n : s_m > p_n : p_m$$

$$S_n : S_m = P_n : P_m$$

$$S_m > S_n .$$

Ἀπαντῶμεν ἐπίσης εἰς τὸ αὐτὸ βιβλίον μίαν λύσιν τοῦ προβλήματος τῆς τριχοτομήσεως τῆς γωνίας, ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ὁποίας λαμβάνεται μία κογχοειδὴς τοῦ κύκλου. Τοῦ προβλήματος τοῦ διπλασιασμοῦ τοῦ κύβου ὁ συγγραφεὺς ἀρκεῖται νὰ ἐκθέσῃ τὰς γνωστὰς λύσεις τῶν ἀρχαίων ἑλλήνων γεωμετρῶν.

Τέλος ἐξαίρομεν τὴν παρουσίαν τοῦ ἀκολούθου τύπου, ὁ ὁποῖος παρέχει (κατὰ τὸν συγγραφέα) τὴν πλευρὰν l_n κανονικοῦ n-γώνου, ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ἀκτῖνος r:

$$l_n^2 = \frac{18n^2}{\frac{(n-1)n}{2} + 3} .$$

Προσθέτομεν ὅτι ὁ τύπος εἶναι, ἁπλούστατα, προσεγγιστικὸς καὶ ἄγει εἰς τὴν παραδοχήν:

$$\text{ημ}\frac{\pi}{n} = \frac{3}{\sqrt{(n-1)n+6}} .$$

Δὲν εἶναι ἐν γένει ἀληθής, ἀλλὰ παρατηροῦμεν ὅτι ὁδηγεῖ εἰς ἀποτελέσματα μαθηματικῶς ἀκριβῆ διὰ $n = 3, 4, 6$· ἐνῷ διὰ $n = 7$ ἄγει εἰς τὴν σχέσιν:

$$l_7 = \frac{r}{2}\sqrt{3}, \quad \text{ἤτοι} \quad l_7 = \frac{1}{2} l_3 ,$$

γνωστὴν ἤδη εἰς τὸν Abu' l Wafa. Τὴν σχέσιν αὐτὴν καλεῖ ὁ Giordano «ἰνδικὸν κανόνα», δίδων κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον τὴν ὑπόνοιαν, ὅτι κατὰ τὴν συγγραφὴν τοῦ βιβλίου του ἤντλησεν ἐκ πηγῶν τῆς Ἀνατολῆς.

Προκύπτει ἐκ τῶν ἀνωτέρω ὅτι ὁ Girodano ὑπῆρξε μαθηματικός, ὄχι βέβαια τοῦ ἀναστήματος τοῦ Leonardo Fibonacci, ἀλλ' ἐπαρκῶς πληροφο-

ρημένος περὶ τῆς ἐπιστήμης τῆς ἐποχῆς του καὶ ἱκανὸς νὰ ἐπιφέρῃ προσθήκας εἰς ἐκεῖνα ποὺ ἔμαθεν ἀπὸ τοὺς διδασκάλους του.

172. Κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ αἰῶνος, περὶ τοῦ ὁποίου ὁμιλοῦμεν, ἐνεφανίσθη εἰς τὴν Ἀγγλίαν μία προσωπικότης πρώτης τάξεως, ἡ ὁποία, ἂν δὲν ἠμποδίζετο ἀπὸ ἀντιξόους περιστάσεις, ἦτο ἱκανὴ νὰ εἶχεν ἀποτυπώσει εἰς τὰς φυσικὰς ἐπιστήμας τὴν μόνην ἀσφαλῆ μέθοδον, τῆς ἐμπειρίας καὶ τῆς παρατηρήσεως. Ὁμιλοῦμεν διὰ τὸν Ρογῆρον Βάκωνα (Roger Bacon). Γεννηθεὶς περὶ τὸ 1214 εἰς τὴν κομητείαν τοῦ Sommerset, ἀπέθανεν εἰς Oxford τὴν 12ην Ἰουνίου 1294. Μετὰ τὸ πέρας τῶν σπουδῶν του εἰς Oxford, ἦλθεν εἰς Παρισίους, ὅπου διέμεινεν ἀπὸ τοῦ 1244 ἕως 1252 εἰσελθὼν εἰς τὸ μοναχικὸν τάγμα τῶν Φραγκισκανῶν. Τοιαύτη ἀπόφασις πρέπει ν' ἀπέβη μοιραία δι' αὐτόν, διότι ἐξ ὅλων τῶν θρησκευτικῶν κοινοβιακῶν θεσμῶν οὐδεὶς ἄλλος ἦτο τόσον ὀλίγον ἐπιρρεπὴς πρὸς τὴν ἐπιστημονικὴν μελέτην καὶ ἔρευναν, ὅσον ὁ στεγαζόμενος ὑπὸ τὸ ὄνομα τοῦ πτωχούλη τῆς Ἀσίζης. Πολὺ διάφορος θὰ ἦτο ἡ τύχη του ἐὰν εἶχεν ἐκλέξει τὸ τάγμα τῶν Δομινικανῶν, τὸ ὁποῖον ἀνεδείχθη ὑπέροχον μὲ τὸ νὰ ἐκθρέψῃ εἰς τοὺς κόλπους του ἄνδρας ἐπιφανεῖς, ὅπως ὁ Ἀλβέρτος ὁ Μέγας (1193 - 1280) καὶ ὁ Θωμᾶς ὁ Ἀκινᾶτος (1226 - 1274).

Βαθὺς γνώστης τῶν κλασσικῶν γλωσσῶν καὶ ἱκανὸς νὰ κατανοῇ ἀραβικὰ κείμενα, εἶχεν ὅλα τὰ προσόντα νὰ ἐρευνήσῃ ὁλόκληρον τὴν ἐπιστημονικὴν γραμματείαν τῆς ἐποχῆς του. Ἀλλὰ πνεῦμα ἀνεξάρτητον ὅπως ἦτο, ἔλαβε θέσιν ἐναντίον τῶν τάσεων τῆς παιδείας τῆς ἐποχῆς του, ἡ ὁποία ἐστηρίζετο ἀποκλειστικῶς εἰς τὴν αὐθεντίαν τῆς παραδόσεως. Εἰς τὴν στάσιν του αὐτὴν ὀφείλει ὅλας τὰς κακοτυχίας του, εἰς τὰς λεπτομερείας τῶν ὁποίων δὲν δυνάμεθα, φυσικά, νὰ ὑπεισέλθωμεν.

Μολονότι εἰς τὰ ἔργα τοῦ Βάκωνος ματαίως θ' ἀνεζητοῦντο συμβολαὶ εἰς τὰς μαθηματικάς μας γνώσεις, ἐν τούτοις ἀπαντῶμεν μερικὰς σκέψεις αἱ ὁποῖαι δὲν εἶναι ξέναι πρὸς τὸ ἀντικείμενον τῆς παρούσης ἱστορίας. Εἰς τὸ περίφημον π.χ. ἔργον του Opus Tertium προβαίνει εἰς μίαν δήλωσιν, ἡ ὁποία εἰκονίζει πόσον χαμηλὸν ἦτο τὸ ἐπίπεδον τῶν γεωμετρικῶν γνώσεων κατὰ τὸν XIII αἰῶνα· ἀφοῦ προβῇ εἰς τὴν διαπίστωσιν ὅτι δὲν ὑπάρχουν διδάσκαλοι τῶν μαθηματικῶν, προχωρεῖ εἰς τὴν δήλωσιν, ὅτι αὐτὸς ὁ ἴδιος ἦτο εἰς θέσιν νὰ ἐκμάθῃ μόνος του, εἰς διάστημα οὐχὶ ὁλοκλήρου ἑβδομάδος, ὁλόκληρον τὴν γεωμετρίαν. Ὑπάρχει δὲ τούτου μία ἐπιβεβαίωσις εἰς ἕνα ἐδάφιον τοῦ αὐτοῦ ἔργου, ἀναφερόμενον εἰς τὸ πρόβλημα (γνωστὸν ἤδη πρὸ αὐτοῦ) τῆς συμπληρώσεως τοῦ χώρου πέριξ ἑνὸς σημείου μέσῳ κανονικῶν πολυέδρων. Ἐξ αὐτοῦ συνάγεται πλήρης ἄγνοια τῆς διαφορᾶς μεταξὺ ἑδρῶν καὶ διέδρων μιᾶς στερεᾶς γωνίας. Ὁ συγγραφεὺς σημειώνει, πράγματι, τὴν δυνατότητα χωρισμοῦ τοῦ διαστήματος εἰς κελλία κυβικοῦ σχήματος.

Τότε εἰς ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ διαστήματος συγκεντροῦνται ὀκτὼ τοιαῦτα πολύεδρα καὶ μάλιστα πέριξ ἑκάστου σημείου εὑρίσκονται ὀκτὼ τρισορθογώνια τριέδρα, τῶν ὁποίων αἱ ἕδραι δίδουν ἐν ὅλῳ 24 ὀρθὰς γωνίας. Λοιπὸν (οὕτω συλλογίζεται ὁ Βάκων) ἀφοῦ αἱ ἕδραι τῆς στερεᾶς γωνίας ἑνὸς τετραέδρου δίδουν ἄθροισμα δύο ὀρθῶν, ἑνώνοντες 12 θὰ λάβωμεν ἀκριβῶς 24 ὀρθάς· ἐντεῦθεν προκύπτει, κατ' αὐτόν, ἡ δυνατότης νὰ διαχωρίσωμεν τὸν χῶρον εἰς κανονικὰ τετράεδρα. Ἐντελῶς ἀναλόγως, ἀφοῦ αἱ ἕδραι τοῦ γωνιοειδοῦς ἑνὸς ὀκταέδρου δίδουν ἄθροισμα 8/3 τῆς ὀρθῆς γωνίας, ἑνώνοντες 9, φθάνομεν, πάντοτε κατὰ Βάκωνα, εἰς τὸ ἐπιθυμητὸν ἀποτέλεσμα. Εἶναι παράξενον πῶς ὁ διανοούμενος, ὁ δικαίως γενόμενος διάσημος ὡς εἰσηγητὴς τῆς πειραματικῆς μεθόδου, δὲν ἐσκέφθη νὰ προστρέξῃ εἰς ἕνα εὐκολώτατον πείραμα, τὸ ὁποῖον ἢ θὰ ἐπεκύρωνε τὴν ἀλήθειαν τῶν συμπερασμάτων του ἢ θὰ τοῦ ἀπεκάλυπτε τὴν πλάνην !

173. Ἀμεσώτερον ἐνδιαφέρον διὰ τὰς ἀκριβεῖς ἐπιστήμας ἐπέδειξεν ἕνας ἄλλος Ἄγγλος, ὁ John Holywood, γνωστὸς εἰς τὴν ἠπειρωτικὴν Εὐρώπην ὑπὸ τὸ ὄνομα Giovanni Sacrobosco (παραφθαρὲν εἰς Sacrobusto). Ἐφοίτησεν εἰς τὸ πανεπιστήμιον τοῦ Oxfrod, ἐδίδαξεν ἔπειτα εἰς τὸ πανεπιστήμιον τῶν Παρισίων καὶ ἀπέθανεν εἰς τὴν πόλιν αὐτὴν τὸ 1244 ἢ 1256, ἀποθέσας τὴν φήμην του εἰς ἕνα βιβλίον στοιχειώδους ἀστρονομίας τιτλοφορούμενον De Sphaera Mundi, τὸ ὁποῖον ἐχρησίμευσεν ὡς διδακτικὸν βιβλίον εἰς ὅλην τὴν Εὐρώπην κατὰ τὸν Μεσαίωνα καὶ διὰ τοῦτο ἔτυχεν ἐπανειλημμένων ἐκδόσεων καὶ πολυαρίθμων ἑρμηνευτικῶν σχολίων*. (Εἰς τὴν Ferrara ἐξεδόθη τὸ 1472 τῇ φροντίδι τοῦ Levèfre, βλ. § 170).

Τὸ ὄνομα τοῦ Sacrobosco φέρει ἀκόμη ἕνα ἄλλο ἔργον εἰς στίχους: Tractatus de Arte Numerandi (Μαθήματα περὶ τῆς τέχνης τῶν ἀριθμῶν). Πρόκειται περὶ συλλογῆς πρακτικῶν κανόνων μὲ ἁπλοποιημένην ἐκφώνησιν, εἰς χρῆσιν ἐκείνων οἱ ὁποῖοι εὑρίσκοντο εἰς τὴν ἀνάγκην νὰ ἐκτελοῦν πράξεις, οἷαι αἱ ἀκόλουθοι : ἀρίθμησις, πρόσθεσις, ἀφαίρεσις, ἡμιάθροισις (mediatio), διπλασιασμὸς (duplatio), πολλαπλασιασμός, διαίρεσις, πρόοδευσις (progressio, δηλαδὴ ὑπολογισμὸς ἀθροίσματος διαδοχικῶν ὅρων τῆς φυσικῆς σειρᾶς), ἐξαγωγὴ (extractio). Ὅτι τὸ ἀριθμητικὸν αὐτὸ ἐγκόλπιον εἶχεν ἐπιτυχίαν, μὴ ὑπολειπομένην ἐκείνης τὴν ὁποίαν εἶχε τὸ ἀστρονομικὸν ἐγχειρίδιον τοῦ ἰδίου συγγραφέως, ἀποδεικνύεται ἀπὸ τὰ ἀναρίθμητα ἀντίτυπα καὶ σχόλια τούτου, ποὺ ἀπαντῶνται εἰς τὰς κυριωτέρας γερμανικὰς βιβλιοθήκας. Ἕνα σχόλιον μάλιστα, ὀφειλόμενον εἰς τὸν δομινικανὸν Pietro Filomeno τῆς Dacia (καὶ χρονολογούμενον ἀπὸ τοῦ Ἰουλίου 1291, εἶχε

* Μεταξὺ τῶν σχολιαστῶν ἀξιομνημόνευτος εἶναι ὁ Francesco Stabili, γνωστὸς γενικῶς ὑπὸ τὸ ὄνομα Cecco d' Ascoli (γενν. περὶ τὸ 1250, ἀποθ. εἰς Φλωρεντίαν τὴν 15ην Σεπτεμβρίου 1327), τοῦ ὁποίου τὰ σχόλια ἐτυπώθησαν εἰς Βασιλείαν τὸ 1485.

τὴν τιμὴν νὰ δοθῇ εἰς τὸν τύπον ἐπὶ τῶν ἡμερῶν μας. Πρόκειται περὶ ἑνὸς σχολαστικοῦ κειμένου, προοριζομένου διὰ τοὺς φοιτητὰς τῶν δανικῶν πανεπιστημίων, οἱ ὁποῖοι ἔπρεπε νὰ τὸ ἔχουν διαρκῶς πρὸ ὀφθαλμῶν. Οἱ ἐκτιθέμενοι κανόνες συνοδεύονται μὲ εὐνοϊκὰ παραδείγματα. Ἐξαίρομεν ἰδιαιτέρως τὴν διδομένην ἐξήγησιν τῆς λέξεως teca, ποὺ χρησιμοποιεῖ ὁ Sacrobosco διὰ νὰ δηλώσῃ τὸ μηδέν, ἐξήγησιν στηριζομένην, κατὰ τὸν σχολιαστήν, εἰς τὸ γεγονός, ὅτι μὲ τὴν λέξιν αὐτὴν ὠνομάζετο ἡ στρογγύλη σιδηρᾶ ῥάβδος, μὲ τὴν ὁποίαν, εἰς μερικὰς χώρας, ἐστιγμάτιζον εἰς τὸ μέτωπον ἢ τὴν παρειὰν τοὺς κακοποιούς.

Κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ αὐτοῦ αἰῶνος συνεγράφησαν ἄλλα δύο μέτρια ἔργα, ἕνα ἐπὶ τοῦ ἀλγορίθμου (δηλαδὴ τοῦ ἀριθμητικοῦ λογισμοῦ) καὶ ἕνα ἄλλο ἐπὶ τῆς γεωμετρίας. Ἀμφότερα ἐδημοσιεύθησαν τὸ 1882 ὑπὸ τοῦ C. Henry καὶ εἶναι ἀξιόλογα ὄχι τόσον διὰ τὴν ἐσωτερικήν των ἀξίαν, ὅσον διὰ τὸν λόγον ὅτι εἶναι τὰ πρῶτα, μέχρι τῆς ὥρας γνωστά, ποὺ ἐγράφησαν εἰς τὴν γαλλικήν. Τὴν ἰδίαν ἐποχήν, ἐπίσης εἰς τὴν Γαλλίαν, ἔζησεν ὁ περίφημος Βικέντιος ὁ ἐκ Μπωβαὶ (Vincent de Beauvais, λατινικὰ Vincentius Bellovacensis, γεννηθεὶς ἐντὸς τῆς δεκαετίας 1184 - 1194 καὶ ἀποθανὼν ὀλίγον μετὰ τὸ 1260). Γνωρίζων τὴν λατινικὴν καὶ ἑλληνικήν, τὴν ἀραβικὴν καὶ ἑβραϊκήν, ἦτο εἰς θέσιν νὰ μελετᾷ ὅ,τι εἶχε γραφῆ μέχρι τῆς ἐποχῆς του. Μέλος τοῦ τάγματος τῶν Δομινικανῶν καὶ ἐπόπτης τῆς Βιβλιοθήκης τοῦ Λουδοβίκου IX, ἀνέλαβε τὴν διαπαιδαγώγησιν τῶν υἱῶν τοῦ βασιλέως. Ἐντεῦθεν ὡρμήθη εἰς τὴν συγγραφὴν μιᾶς κολοσσιαίας ἐγκυκλοπαιδείας, ἡ ὁποία, εἰς τὰ πολλὰ ἀντίτυπα ποὺ εἶναι γνωστά, φέρει διάφορα ὀνόματα, ὅπως Παγκόσμιος Βιβλιοθήκη (Bibilioteca Mundi), Μείζων καθρέπτης (Speculum Majus), Τριπλοῦς καθρέπτης (Speculum Triplex). Σχετικὸν μὲ τὰ ἀντικείμενα ποὺ μᾶς ἐνδιαφέρουν εἶναι τὸ μέρος τὸ τιτλοφορούμενον Ἐπιστημονικὸς καθρέπτης (Speculum doctrinale), διότι περιλαμβάνει μίαν σύνοψιν τῶν μαθηματικῶν τῆς ἐποχῆς του. Γραφὲν κατ' ἀπομίμησιν τῶν σχολαστικῶν προτύπων, δὲν περιλαμβάνει καινοτομίας ἀξίας ἰδιαιτέρας μνείας. Ἕνας ἐνθουσιώδης βιογράφος τοῦ Βικεντίου παρακινεῖ διὰ θερμῶν λόγων τοὺς ἀναγνώστας του νὰ ἐπιδοθοῦν εἰς τὴν μελέτην τοῦ ἐπιβλητικοῦ, εἰς μέγα φύλλον, περιεχομένου τοῦ Μείζονος καθρέπτου. Εἰς ἡμᾶς λείπει τὸ θάρρος νὰ δώσωμεν παρομοίαν συμβουλὴν πρὸς τοὺς ἀναγνώστας μας, ἔστω καὶ ἂν περιορίσωμεν αὐτὴν μόνον εἰς τὸν Ἐπιστημονικὸν καθρέπτην.

Κατὰ τὸν XIV αἰῶνα

174. Ὁ XIV αἰὼν παρουσιάζει, ὑπὸ ἔποψιν πνευματικῆς ἀναπτύξεως, φυσιογνωμίαν μὴ διαφέρουσαν τῆς προηγουμένης, ἂν ὄχι δι' ἄλλον λόγον,

τὴν τιμὴν νὰ δοθῇ εἰς τὸν τύπον ἐπὶ τῶν ἡμερῶν μας. Πρόκειται περὶ ἑνὸς σχολαστικοῦ κειμένου, προοριζομένου διὰ τοὺς φοιτητὰς τῶν δανικῶν πανεπιστημίων, οἱ ὁποῖοι ἔπρεπε νὰ τὸ ἔχουν διαρκῶς πρὸ ὀφθαλμῶν. Οἱ ἐκτιθέμενοι κανόνες συνοδεύονται μὲ εὐνοϊκὰ παραδείγματα. 'Εξαίρομεν ἰδιαιτέρως τὴν διδομένην ἐξήγησιν τῆς λέξεως teca, ποὺ χρησιμοποιεῖ ὁ Sacrobosco διὰ νὰ δηλώσῃ τὸ μηδέν, ἐξήγησιν στηριζομένην, κατὰ τὸν σχολιαστήν, εἰς τὸ γεγονός, ὅτι μὲ τὴν λέξιν αὐτὴν ὠνομάζετο ἡ στρογγύλη σιδηρᾶ ράβδος, μὲ τὴν ὁποίαν, εἰς μερικὰς χώρας, ἐστιγμάτιζον εἰς τὸ μέτωπον ἢ τὴν παρειὰν τοὺς κακοποιούς.

Κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ αὐτοῦ αἰῶνος συνεγράφησαν ἄλλα δύο μέτρια ἔργα, ἕνα ἐπὶ τοῦ ἀλγορίθμου (δηλαδὴ τοῦ ἀριθμητικοῦ λογισμοῦ) καὶ ἕνα ἄλλο ἐπὶ τῆς γεωμετρίας. 'Αμφότερα ἐδημοσιεύθησαν τὸ 1882 ὑπὸ τοῦ C. Henry καὶ εἶναι ἀξιόλογα ὄχι τόσον διὰ τὴν ἐσωτερικήν των ἀξίαν, ὅσον διὰ τὸν λόγον ὅτι εἶναι τὰ πρῶτα, μέχρι τῆς ὥρας γνωστά, ποὺ ἐγράφησαν εἰς τὴν γαλλικήν. Τὴν ἰδίαν ἐποχήν, ἐπίσης εἰς τὴν Γαλλίαν, ἔζησεν ὁ περίφημος Βικέντιος ὁ ἐκ Μπωβαὶ (Vincent de Beauvais, λατινικὰ Vincentius Bellovacensis, γεννηθεὶς ἐντὸς τῆς δεκαετίας 1184 - 1194 καὶ ἀποθανὼν ὀλίγον μετὰ τὸ 1260). Γνωρίζων τὴν λατινικὴν καὶ ἑλληνικήν, τὴν ἀραβικὴν καὶ ἑβραϊκήν, ἦτο εἰς θέσιν νὰ μελετᾷ ὅ,τι εἶχε γραφῆ μέχρι τῆς ἐποχῆς του. Μέλος τοῦ τάγματος τῶν Δομινικανῶν καὶ ἐπόπτης τῆς Βιβλιοθήκης τοῦ Λουδοβίκου IX, ἀνέλαβε τὴν διαπαιδαγώγησιν τῶν υἱῶν τοῦ βασιλέως. 'Εντεῦθεν ὡρμήθη εἰς τὴν συγγραφὴν μιᾶς κολοσσιαίας ἐγκυκλοπαιδείας, ἡ ὁποία, εἰς τὰ πολλὰ ἀντίτυπα ποὺ εἶναι γνωστά, φέρει διάφορα ὀνόματα, ὅπως Παγκόσμιος Βιβλιοθήκη (Bibiliotеca Mundi), Μείζων καθρέπτης (Speculum Majus), Τριπλοῦς καθρέπτης (Speculum Triplex). Σχετικὸν μὲ τὰ ἀντικείμενα ποὺ μᾶς ἐνδιαφέρουν εἶναι τὸ μέρος τὸ τιτλοφορούμενον 'Επιστημονικὸς καθρέπτης (Speculum doctrinale), διότι περιλαμβάνει μίαν σύνοψιν τῶν μαθηματικῶν τῆς ἐποχῆς του. Γραφὲν κατ' ἀπομίμησιν τῶν σχολαστικῶν προτύπων, δὲν περιλαμβάνει καινοτομίας ἀξίας ἰδιαιτέρας μνείας. "Ενας ἐνθουσιώδης βιογράφος τοῦ Βικεντίου παρακινεῖ διὰ θερμῶν λόγων τοὺς ἀναγνώστας του νὰ ἐπιδοθοῦν εἰς τὴν μελέτην τοῦ ἐπιβλητικοῦ, εἰς μέγα φύλλον, περιεχομένου τοῦ Μείζονος καθρέπτου. Εἰς ἡμᾶς λείπει τὸ θάρρος νὰ δώσωμεν παρομοίαν συμβουλὴν πρὸς τοὺς ἀναγνώστας μας, ἔστω καὶ ἂν περιορίσωμεν αὐτὴν μόνον εἰς τὸν 'Επιστημονικὸν καθρέπτην.

Κατὰ τὸν XIV αἰῶνα

174. 'Ο XIV αἰὼν παρουσιάζει, ὑπὸ ἔποψιν πνευματικῆς ἀναπτύξεως, φυσιογνωμίαν μὴ διαφέρουσαν τῆς προηγουμένης, ἂν ὄχι δι' ἄλλον λόγον,

διότι καὶ κατὰ τὸν αἰῶνα τοῦτον οἱ Παρίσιοι ἀποτελοῦν τὴν πρωτεύουσαν ἑστίαν τοῦ κόσμου τῶν διανοουμένων.Ἐξ ὅσων μάλιστα πρόκειται νὰ ἐκθέσωμεν, θὰ προκύψῃ τὸ συμπέρασμα ὅτι ἀκόμη καὶ ἄλλαι χῶραι ἔδωσαν ἀπτὰ δείγματα ἐνδιαφέροντος διὰ τοὺς ἀριθμοὺς καὶ τὰ σχήματα.

Εἰς τὴν Ἀγγλίαν ἐπισύρει τὴν προσοχήν μας ὁ Thomas Bradwardin, εἴτε λόγῳ τῆς σοφίας του, εἴτε λόγῳ τῆς ὑψηλῆς θέσεως τὴν ὁποίαν κατεῖχεν εἰς τὴν ἐκκλησιαστικὴν ἱεραρχίαν. Γεννηθεὶς εἰς Hartfield (πλησίον τοῦ Chichester) τὸ 1290, διωρίσθη εἰς ἡλικίαν 35 ἐτῶν «πρόκτωρ» (proctor) τοῦ πανεπιστημίου τοῦ Oxford καὶ χάρις εἰς τὰ ἐμπεριστατωμένα μαθήματά του ἀπέκτησε τοιαύτην καὶ τοσαύτην ὑπόληψιν, ὥστε νὰ τοῦ ἀξίζῃ τὸ κολακευτικὸν παρωνύμιον «doctor profundus» (βαθὺς ἐπιστήμων), μὲ τὸ ὁποῖον ἀποκαλεῖται ἀκόμη σήμερον.

Μετὰ πάροδον δωδεκαετίας ὠνομάσθη γενικὸς γραμματεὺς τῆς ἐκκλησίας τοῦ Ἁγίου Παύλου εἰς τὸ Λονδῖνον, ὅπου ἐξελέγη ἴσως ὡς ἐξομολογητὴς τοῦ βασιλέως. Ἀρχιδιάκονος τοῦ Norwich τὸ 1347, ἀνακαλεῖται τὸ ἑπόμενον ἔτος εἰς Λονδῖνον ὡς ἀρχιεπίσκοπος τοῦ Καντέρμπιουρι. Ὀλίγον ὅμως μετὰ τὴν ἐπίσημον ἀνακήρυξίν του, ἀπέθανεν ἐκ πανώλους (26 Αὐγούστου 1347).

Εἰς τὴν ἱστορίαν τῶν μαθηματικῶν ὁ Bradwardin ἀναγράφεται, διὰ τὰ ἑξῆς ἔργα του: Tractatus de proportonibus (περὶ ἀναλογιῶν), De quadratura circuli (περὶ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου), Aritmetica Speculativa (θεωρητικὴ ἀριθμητική), Geometria Speculativa (θεωρητικὴ γεωμετρία). Ὅλα ἐτυπώθησαν εἰς Παρισίους, τὰ δύο πρῶτα τὸ 1495, τὰ δὲ δύο ἄλλα, τὸ 1502 καὶ 1530. Ἀνέκδοτον παραμένει ἀκόμη ἕνα ἔργον του Tractatus de continuo (περὶ συνεχείας) ὅπου ἀπαντῶνται θεωρίαι ἐπὶ τῆς γωνίας συνεπαφῆς, ἐμπνευσθεῖσαι ἴσως ἀπὸ τὸν Giovanni Campano καὶ τὸν Giordano Nemorario, ὡς ἐπίσης ἕνα πρῶτον δοκίμιον ταξινομήσεως τῶν ἀπείρων εἰς διαφόρους τάξεις, πρᾶγμα ἐμφανίζον τὸν Bradwardin ὡς μακρυνὸν πρόδρομον ἐκείνου, ὁ ὁποῖος ἐδημιούργησε τὴν θεωρίαν τῶν «ὑπερπεπερασμένων ἀριθμῶν» (nombres transfinis), δηλαδὴ τοῦ G. Cantor (1845 - 1918).

Μεταξὺ τῶν ἐκδοθέντων ἔργων τοῦ ἐπιστήμονος ἱεράρχου, ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον παρουσιάζει τὴν μεγαλυτέραν πρωτοτυπίαν εἶναι ἡ «Θεωρητικὴ γεωμετρία». Ἐκ τῶν 4 βιβλίων ποὺ ἀποτελοῦν τὸ ὅλον ἔργον, τὸ I πραγματεύεται τὰ ἀστεροειδῆ πολύγωνα (de figuris angularis egredientibus), ποὺ εἶχεν ἐξετάσει καὶ ὁ Campano, ἀλλὰ εἰς μεγαλυτέραν γενικότητα, παράγων αὐτὰ διὰ προεκτάσεως τῶν πλευρῶν κυρτῶν πολυγώνων καὶ προτείνων μίαν λογικὴν ταξινόμησιν, ἐγκαινιάζων δὲ ἐν συνεχείᾳ τὴν ἔρευναν τοῦ ἀθροίσματος τῶν γωνιῶν των, τὴν ὁποίαν ἐπέπρωτο νὰ φέρῃ εἰς πέρας ὁ L. Poinsot κατὰ τὰς ἀρχὰς τοῦ XIX αἰῶνος.

Εἰς τὴν θεωρίαν τῶν ἰσοπεριμέτρων, βάσει τῶν ἰδεῶν τοῦ ἕλληνος

γεωμέτρου Ζηνοδώρου (§ 55), ἀφιεροῦται τὸ Βιβλίον II. Εἰς τὸ III, τὸ ὁποῖον ἀφορᾷ τοὺς λόγους καὶ τὰς ἀναλογίας, ἐκτὸς μερικῶν θεωριῶν ἐπὶ τῶν γεωμετρικῶν ἀσυμμέτρων, εὑρίσκομεν μίαν ἀνάπτυξιν τοῦ προβλήματος τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου, ἐμπνευσμένην ἀπὸ τὸ παρόμοιον ὑπόμνημα τοῦ Ἀρχιμήδους.

Εἰς τὴν σφαῖραν, τοὺς μικροὺς καὶ μεγάλους κύκλους της καὶ εἰς τὰ κανονικὰ πολύεδρα, τὰ ὁποῖα δύνανται νὰ ἐγγραφοῦν εἰς αὐτήν, ἀναφέρεται τὸ τελευταῖον βιβλίον τοῦ ἰδίου ἔργου*, τὸ ὁποῖον — διὰ νὰ συνοψίσωμεν τὴν ἐντύπωσιν ποὺ προξενεῖ εἰς τοὺς ἀναγνώστας — ἐμφανίζει τὸν Bradwardin ὡς μακρυνόν, ἀλλ' ὄχι εὐκαταφρόνητον μαθητὴν τῶν κορυφαίων γεωμετρῶν τῆς Ἑλλάδος.

Συμπατριῶται καὶ σύγχρονοί του εἶναι : ὁ Roger (ἢ John) Suisseth, καθηγητὴς εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τοῦ Oxford καὶ μέλος (1350) τοῦ Τάγματος Σιστερσιανῶν (cistercian order), καὶ ὁ John Mauduith, διδάξας εἰς Oxford κατὰ τὴν περίοδον 1306 - 1340. Τοῦ πρώτου γίνεται μνεία δι' ἐργασίας του ἐπὶ ἀστρονομικῶν ὑπολογισμῶν, τοῦ δευτέρου δι' ἔργα ἀναφερόμενα εἰς τὴν τριγωνομετρίαν, θεωρουμένην ὄχι ὡς ἐπιστήμην αὐτόνομον καὶ ἀνεξάρτητον, ἀλλὰ μᾶλλον ὡς θεραπαινίδα τῆς ἀστρονομίας.

Ἐξ αὐτῶν ἤντλησεν ἐμπνεύσεις ὁ Richard Wallingford, ὁ ὁποῖος ἐγεννήθη τὸ 1292 καί, παρὰ τὴν ταπεινήν του καταγωγήν, ἀνῆλθεν τὸ ἔτος 1336 εἰς τὸν βαθμὸν τοῦ ἡγουμένου τοῦ Ἁγίου Ἀλβανοῦ. Πληγεὶς ἐκ λέπρας, ἡ ὁποία τοῦ ἐστέρησε τὴν ὅρασιν, ἀπέθανε τὴν 23ην Μαΐου 1345. Ἕνα μόνον ἔργον του ἔτυχε μέχρι τοῦδε τῆς τιμῆς τῆς ἐκδόσεως, τὸ Quadripartitum de sinibus demonstratis (τὰ περὶ ἡμιτόνων εἰς τέσσαρα μέρη). Πρόκειται περὶ ἔργου μικροῦ εἰς ὄγκον, ἀλλ' ἀξιολόγου, διότι ἐκπροσωπεῖ τὸ πρῶτον βιβλίον τριγωνομετρίας, ποὺ εἶδε τὸ φῶς εἰς τὴν χριστιανικὴν Εὐρώπην, καὶ ἐκθέτει μὲ σαφήνειαν καὶ αὐστηρότητα ὅσα εἶναι συνήθως χρήσιμα διὰ τὴν ἐκτέλεσιν ἀστρονομικῶν ὑπολογισμῶν.

175. Εἶναι ἀληθὲς ὅτι ἀπὸ τοῦ 1321 εἶχεν ἐμφανισθῆ ἕνα ἔργον τῆς αὐτῆς φύσεως, ἀλλ' εἶχε γραφῆ εἰς τὴν ἑβραϊκὴν καὶ μετεφράσθη εἰς τὴν λατινικὴν μόνον ἑπτὰ ἔτη μετὰ τὸν θάνατον τοῦ Wallingford, συνεπῶς ἂν ὑφίστανται σημεῖα ἐπαφῆς μεταξὺ τῶν δύο βιβλίων, θὰ πρέπει νὰ θεωρηθοῦν, μέχρις ἀποδείξεως τοῦ ἐναντίου, ἐντελῶς τυχαῖα.

Συγγραφεὺς τοῦ ἑβραϊκοῦ βιβλίου εἶναι ὁ Levi ben Gerson, τὸν ὁποῖον ὁ ἰταλὸς ἀνθρωπιστὴς Pico della Mirandola (1463 - 1494) δὲν ἐδίστασε νὰ

* Εἰς τὸ Βιβλίον αὐτὸ ἀποκαλύπτεται, μεταξὺ ἄλλων, τὸ σφάλμα ποὺ διέπραξεν ὁ Ρογῆρος Βάκων (§ 172) σχετικῶς πρὸς τὴν δυνατότητα πληρώσεως τοῦ χώρου διὰ τετραέδρων. Συγχρόνως ὅμως διαπράττεται ἕνα ἄλλο σφάλμα μὲ τὴν βεβαίωσιν, ὅτι ὁ περὶ ἕνα σημεῖον χῶρος δύναται νὰ πληρωθῇ ὄχι μὲ 12, ἀλλὰ μὲ 20 κανονικὰ τετράεδρα.

διακηρύξῃ «ἄνδρα ἐπιφανῆ καὶ μαθηματικὸν διάσημον, σχεδὸν ἐφάμιλλον πρὸς τοὺς ἀρχαίους, ὅστις ἐπενόησε νέον ὄργανον, ὑπερέχον εἰς μαθηματικὴν ἀκρίβειαν».

Γεννηθεὶς εἰς Προβηγκίαν τὸ 1288 ἀπὸ οἰκογένειαν διακεκριμένην εἰς τὰ γράμματα, ἔζησε κατὰ τὴν μεσαίαν περίοδον τοῦ αἰῶνος, κατὰ τὴν ὁποίαν μετεφράσθησαν εἰς τὴν ἑβραϊκὴν τὰ σπουδαιότερα ἐπιστημονικὰ ἔργα τῶν Ἑλλήνων καὶ τῶν Ἀράβων (Εὐκλείδης, Πτολεμαῖος, Avicenna, κλπ.). Τοιουτοτρόπως, ἂν καὶ ἄμοιρος λατινομαθείας καὶ πολὺ ὀλίγον οἰκεῖος μὲ τὴν ἀραβικήν, κατώρθωσε νὰ εἰσδύσῃ εἰς τὴν ἐπιστημονικὴν γραμματείαν τῆς ἐποχῆς του. Οἱ πάπαι, οἱ ὁποῖοι διέμενον τότε εἰς τὴν Avignon, ἔτρεφον δι' αὐτὸν μεγίστην ὑπόληψιν, τοῦ παρεῖχον τὴν προστασίαν των καὶ ἐπωφελοῦντο τῆς ἱκανότητός του ὡς ἀστρονόμου καὶ πιθανῶς ἀκόμη ὡς ἀστρολόγου. Ἀλλὰ περὶ τὸ τέλος τῆς ζωῆς του (Avignon, 1344) ἐπεφύλασσεν ἡ μοῖρα σκληρᾶς δοκιμασίας, συνεπείᾳ τῶν διώξεων, αἱ ὁποῖαι ἐξαπελύθησαν ἐναντίον τῶν ὁμοθρήσκων του. Ἐν πάσῃ περιπτώσει, ἡ ἐπελθοῦσα μεταβολὴ εἰς τοὺς πολιτικοὺς προσανατολισμοὺς δὲν ἐμείωσε τὴν ἐξαιρετικὴν ὑπόληψιν, τῆς ὁποίας οὗτος ἔχαιρεν ἐν μέσῳ τῶν συγχρόνων του καὶ τῶν ἀμέσων διαδόχων των. Τούτου ἀδιαφιλονίκητος ἀπόδειξις εἶναι αἱ ἐπακολουθήσασαι λατινικαὶ μεταφράσεις τῶν ἔργων του. Εἶναι ἐν τούτοις περίεργον, ὅτι ὀλίγον ἔπειτα ἀπὸ τὸν θάνατόν του, περιέπεσεν εἰς τελείαν λήθην οὕτως, ὥστε ἀπὸ τοῦ XVII αἰῶνος, τὸ ὄνομά του ἐξηφανίσθη ἀπὸ τὴν ἐπιστημονικὴν γραμματείαν. Χάρις εἰς μερικοὺς σοφοὺς γερμανοὺς τῆς ἐποχῆς μας (Steinschneider, Curtze, Günther, Carlebach), ἦλθον εἰς φῶς αἱ ὀφειλαὶ τῶν καθαρῶν καὶ ἐφηρμοσμένων ἐπιστημῶν εἰς τὸν πνευματώδη ἰσραηλίτην, ὅταν κατεβιβάσθη ἀπὸ τὰ ἰκριώματα ἀρχαίων βιβλιοθηκῶν ἕνα βιβλίον ἀριθμητικῆς, τιτλοφορούμενον Ἐγχειρίδιον τοῦ σκεπτομένου ὑπολογιστοῦ. Ἂν τὸ βιβλίον τοῦτο δὲν εἶχε κατὰ τὴν ἐμφάνισίν του μεγάλην ἐπιτυχίαν, τοῦτο ὠφείλετο ἀσφαλῶς εἰς τὸ ὅτι ἦτο συντεταγμένον εἰς γλῶσσαν καὶ σκέψεις αὐστηρᾶς ἀκριβείας, κατ' ἀντίθεσιν πρὸς τὴν κατηχητικὴν διατύπωσιν τῶν μεσαιωνικῶν συγγραφέων. Ἀπαντῶνται, ἐκτὸς ἄλλων, εἰς τὸ βιβλίον τοῦτο μερικὰ προβλήματα, τὰ ὁποῖα ὑπάρχουν ἐπίσης αὐτούσια ἢ παρόμοια εἰς τὸ Liber Abbaci, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον σημειοῦται ἁπλῶς, χωρὶς νὰ δυνάμεθα νὰ ἐκφέρωμεν γνώμην κατὰ πόσον ὁ Levi ἤντλησεν ἀπὸ τὸν Fibonacci ἢ ἀμφότεροι ἀπὸ ἄλλας ἀρχαιοτέρας ἀνατολικὰς πηγάς.

Πρὸς τὸ περιεχόμενον τοῦ ἐν λόγῳ ἐγχειριδίου πλησιάζει ἕνα ὑπόμνημα, γραφὲν τὸ 1342, τὸ ὁποῖον εἰς τὴν λατινικὴν μετάφρασιν, εὑρισκομένην εἰς τὴν βιβλιοθήκην τῆς Βασιλείας, φέρει τὸν τίτλον Leo Hebreus de numeris harmonicis. Σκοπὸς τοῦ κειμένου εἶναι ν' ἀποδείξῃ ὅτι ἡ διαφορὰ μεταξὺ δύο ἀριθμῶν ἁρμονικῶν (δηλαδὴ τῆς μορφῆς 2^m, 3^n) εἶναι πάντοτε μεγαλυτέρα τῆς μονάδος, ἀποκλειομένων διὰ τοὺς ἀριθμοὺς (m,n) τῶν τιμῶν (1,2),

(2,3), (3,4), (8,9). Πρόκειται περὶ μιᾶς προτάσεως, τὴν ὁποίαν διετύπωσεν ὁ Filippo di Vitry, ἐπίσκοπος Meaux κατὰ τὴν δεκαετίαν 1351 - 1361, ἀποδεικνύει δὲ ἐδῶ ὁ Leo μὲ πλήρη αὐστηρότητα.

176. Ὡς γεωμέτρης ὁ Levi ben Gerson κατέχει τιμητικὴν θέσιν μεταξὺ τῶν σχολιαστῶν τοῦ Εὐκλείδου. Τὰ Στοιχεῖα τοῦ διασήμου ἀλεξανδρινοῦ εἶχον μεταφρασθῆ εἰς τὰ ἑβραϊκὰ ἀπὸ τὸν Moses ibn Tibbon (1270) καὶ κατόπιν ἀπὸ τὸν Jacob ibn Machir (1277). Ὁ Levi, καίτοι ἐθαύμαζε τοὺς Πανδέκτας τῆς γεωμετρίας, ἐξεδήλωσε πάντοτε ἀνεξαρτησίαν σκέψεως καὶ μὴ εὑρίσκων ἱκανοποιητικὸν τὸν μεγάλον ἀριθμὸν τῶν εἰσαγομένων αἰτημάτων (ἀναποδείκτων προτάσεων), ἐπρότεινε τὴν ἀπόδειξιν τοὐλάχιστον μερικῶν ἐξ αὐτῶν, συγκεντρώσας ὅλην τὴν δύναμιν τῆς ἰσχυρᾶς διανοίας του εἰς τὴν βελτίωσιν τῆς θεωρίας τῶν παραλλήλων. Περιττὸν εἶναι νὰ βεβαιώσωμεν, ὅτι δὲν ἔφθασεν εἰς τὸ ἐπιδιωκόμενον ἀποτέλεσμα. Αἱ σελίδες ὅμως, τὰς ὁποίας ἔγραψεν ὑπὸ τὸ ἔνδυμα τοῦ σχολιαστοῦ καὶ κριτικοῦ τοῦ ἀθανάτου ἀλεξανδρινοῦ, τοῦ ἐξησφάλισαν μίαν τιμητικὴν θέσιν μεταξὺ τῶν προαιωνίων ἀγώνων, οἱ ὁποῖοι ἀπέληξαν τελικῶς εἰς τὰς μὴ εὐκλειδείους γεωμετρίας.

Σημαντικώτεραι καὶ πρωτοτυπώτεραι εἶναι αἱ συμβολαὶ τοῦ Levi εἰς τὴν τριγωνομετρίαν. Διὰ τὴν μεθοδικὴν διαπραγμάτευσιν τῆς ὕλης, ἔλαβεν ὑπ' ὄψιν τόσον τὸ ἑλληνικὸν σύστημα προσδιορισμοῦ τῶν τόξων διὰ τῶν χορδῶν, ὅσον καὶ τὸ ἀνατολικὸν σύστημα καθορισμοῦ τούτων διὰ τῶν ἡμιχορδῶν ἢ ἡμιτόνων. Κατὰ συνέπειαν, ἑκάστου τόξου ἐθεώρησε τὴν χορδὴν καὶ τὸ βέλος, τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον, ἀποκατέστησε δὲ τὰς μεταξύ των σχέσεις. Τῶν σχέσεων τούτων ἔκαμε χρῆσιν εἰς τὸν ὑπολογισμὸν πίνακος τιμῶν τῶν ἡμιτόνων, ἐκπεφρασμένων συναρτήσει τῆς διαμέτρου (ὑποτιθεμένης διῃρημένης εἰς 120 μέρη, ὅπως εἶχε κάμει ὁ Πτολεμαῖος) μέσῳ ἑξηκονταδικῶν κλασμάτων.

Κατὰ τὴν πρόοδον τῶν μελετῶν του εἰς τὴν τριγωνομετρίαν, ἔφθασεν εἰς ἀποτέλεσμα μεγίστης σπουδαιότητος, τουτέστιν εἰς τὴν ἀναλογίαν τῶν πλευρῶν εὐθυγράμμου τριγώνου πρὸς τὰ ἡμίτονα τῶν ἀντικειμένων γωνιῶν. Μολονότι ἡ τύχη τοῦ ἠρνήθη τὴν ἱκανοποίησιν νὰ κάμῃ γνωστὸν τὸ περίφημον τοῦτο εὕρημα εἰς τοὺς εὐρωπαίους, ἡ καθαρὰ δικαιοσύνη θὰ ἤθελε νὰ ὀνομάζεται ἡ ἐν λόγῳ πρότασις Θεώρημα τοῦ Levi ben Gerson.

Ἕνα πλῆρες περίγραμμα τοῦ ἐπιστημονικοῦ ἔργου τοῦ μαθηματικοῦ μας θὰ ἔπρεπε νὰ περιέχῃ μερικὰς πληροφορίας γύρω ἀπὸ τὴν συμβολήν του εἰς τὴν ἀστρονομίαν. Ἂν καὶ δὲν ἐπιτρέπεται εἰς ἡμᾶς νὰ ὑπεισέλθωμεν εἰς αὐτὸν τὸν τομέα, δὲν δυνάμεθα νὰ παρασιωπήσωμεν τοὺς ἀρίστους Σεληνιακοὺς πίνακάς του, οὔτε νὰ μὴ ἐξάρωμεν τὸ γεγονὸς ὅτι πρῶτος

παρετήρησε τὸ φαινόμενον τῆς μεταβολῆς τοῦ ἀπογείου τῶν πλανητῶν. Αὐτὸς εἶναι, τέλος, ὁ πραγματικὸς ἐφευρέτης τοῦ «baculus astronomicus», ἐσφαλμένως ἀποδιδομένου εἰς ἄλλους καὶ ὁ πρῶτος συλλαβὼν τὴν ἰδέαν τοῦ σκοτεινοῦ θαλάμου. Ἐλάχιστοι ἄνθρωποι κατῆλθον εἰς τὸν τάφον ἀφήνοντες ὄπισθέν των μίαν τόσον ἐξαιρετικὴν καὶ ποικίλην ἐπιστημονικὴν κληρονομίαν.

177. Ἡ μοῖρα, ἡ ὁποία ἔπληξε τὸν πνευματώδη ἑβραῖον τῆς Προβηγκίας, νὰ περιπέσῃ δηλαδὴ εἰς τελείαν λήθην ἐπὶ πολλοὺς αἰῶνας καὶ ν' ἀποδοθῇ ἔπειτα εἰς τὸ φῶς μετὰ τιμῶν, χάρις εἰς τὴν ἐργασίαν γερμανῶν ἱστορικῶν, παρουσιάζει μεγάλην ὁμοιότητα πρὸς τὴν μοῖραν ἑνὸς συγχρόνου του γάλλου ἐπισκόπου, τοῦ Nicolas Oresme* (προφ. Ὀρέμ).

Γεννηθείς, καθ' ὅλας τὰς ἐνδείξεις, τὸ 1323 εἰς Caen (ἢ εἰς τὰ περίχωρα τῆς πόλεως), εἰσῆλθεν εἰς τὸ College de Navarre τῶν Παρισίων τὸ 1348, ὅπου καὶ παρέμεινε μετὰ τὴν ἀπόκτησιν τοῦ ἐπιζήλου τίτλου «docteur de Paris», διδάσκων ὡς ὑφηγητὴς μέχρι τῆς 4ης Ὀκτωβρίου 1356, ἡμέρας καθ' ἣν προήχθη εἰς τὸν βαθμὸν «grand maître» τοῦ ἐκπαιδευτικοῦ ἐκείνου ἱδρύματος. Ὑπηρέτησεν εἰς τὴν θέσιν αὐτὴν μέχρι τῆς 4ης Δεκεμβρίου 1361, ὅτε διωρίσθη Πρεσβύτερος τῆς Rouen. Τὴν 16ην Νοεμβρίου 1377 προήχθη εἰς τὸν βαθμὸν τοῦ ἐπισκόπου τῆς Lisieux, πιθανῶς εἰς ἀνταμοιβήν, ἐκχωρηθεῖσαν ὑπὸ τοῦ βασιλέως τῆς Γαλλίας, διὰ τὴν ὑπ' αὐτοῦ γενομένην μετάφρασιν μερικῶν ἔργων τοῦ Ἀριστοτέλους, μολονότι, εἰς τὰ σχόλια μὲ τὰ ὁποῖα συνώδευσε τὴν ἐργασίαν του, προέβη κατὰ τρόπον τόσον ἀνορθόδοξον, ὥστε εἰς τὰ μάτια μας νὰ ἐμφανίζεται ὡς πρόδρομος τοῦ Κοπερνίκου. Ἀπέθανε διατηρῶν μέχρι τέλους τὸ ἐπισκοπικόν του ἀξίωμα τὴν 11ην Ἰουλίου 1382.

Τὸ σύγγραμμά του Tractatus de latitudinibus formarum (Πραγματεία περὶ πλατῶν τῶν σχημάτων) ἐγράφη τὸ 1361, ἐτυπώθη κατ' ἐπανάληψιν (1482, 1486,1505,1515) καὶ καθιερώθη ὡς βιβλίον κειμένου εἰς τὰ πανεπιστήμια τῆς Κολωνίας, τῆς Βιέννης καὶ τῆς Ingolstadt. Δι' ἡμᾶς ἡ σπουδαιότης του συνίσταται εἰς τὸ γεγονὸς ὅτι εἶναι τὸ πρῶτον ἔργον, σήμερα γνωστόν, ὅπου ἀπαντᾶται, ἔστω καὶ ὑπὸ ἐμβρυώδη μορφήν, ἡ ἰδέα τῆς γραφικῆς παραστάσεως τῶν συναρτήσεων, μέσῳ ὀρθογωνίων συντεταγμένων**. Μὲ

---

* Περίπου εἰς τὴν ἰδίαν ἐποχὴν ἀνήκει ὁ ἐκ Παρισίων Domenico di Clavasio, ὁ ὁποῖος, τὸ δεύτερον ἥμισυ τοῦ XIV αἰῶνος, ἐχρημάτισεν ἀστρολόγος τοῦ βασιλέως τῆς Γαλλίας. Ἀλλὰ τὸ ἔργον του Practica Geometriae δὲν ἀξίζει πλέον μνείας, ἂν καὶ τὰ πολλὰ χειρόγραφα ποὺ ὑφίστανται ἀποδεικνύουν ὅτι τὸ ἔργον του ἔχαιρεν ἀξιολόγου φήμης καὶ εἶχεν εὐρεῖαν διάδοσιν κατὰ τὸν Μεσαίωνα.

** Ὅτι ἡ ἰδέα εὑρίσκετο ἤδη ἐκπεφρασμένη εἰς ἀρχαιότερα κείμενα τεκμαίρεται ἐκ τοῦ γεγονότος, ὅτι ὁ ἴδιος ὁ Oresme δὲν παρουσιάζει ἑαυτὸν ὡς δημιουργὸν τῶν ἐκτιθεμένων ὑπ' αὐτοῦ ἰδεῶν, ἀλλὰ φαίνεται ν' ἀποδίδῃ τὴν πατρότητα εἰς ἀρχαῖα πρόσωπα (veteres), μὴ ὁριζόμενα μὲ ἀκρίβειαν.

τὴν λέξιν «forma» (μορφή, σχῆμα) ὁ Oresme ἐννοεῖ κάθε φαινόμενον ἐξαρτώμενον ἀπὸ μίαν παράμετρον. Παρουσιάζονται εἰς αὐτὸ δύο μεγέθη τὸ «μῆκος» (longitudo) καὶ τὸ «πλάτος» (latitudo), μὲ τὰ ὁποῖα προβαίνει εἰς γραφικὴν παράστασιν τοῦ φαινομένου μὲ τὴν ἰδίαν πρακτικὴν μέθοδον μὲ τὴν ὁποίαν καθιστῶμεν σήμερον ἔκδηλον τὴν πορείαν τῆς θερμοκρασίας ἢ τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πιέσεως εἰς μίαν ὡρισμένην χρονικὴν περίοδον ἢ τῶν μεταβολῶν, τὰς ὁποίας ὑφίστανται αἱ τιμαὶ τῶν τίτλων τῶν διαφόρων βιομηχανικῶν ἐπιχειρήσεων.

Εὑρισκόμεθα λοιπὸν ἐνώπιον τοῦ καρτεσιανοῦ συστήματος συντεταγμένων εἰς τὴν πρωταρχικήν του μορφήν, εἰς τὴν ὁποίαν τὰ θεωρούμενα μεγέθη λαμβάνουν ἀποκλειστικῶς θετικὰς τιμάς. Τὸ «πλάτος» δύναται νὰ εἶναι «ὁμοιόμορφον» ἢ «ἀνομοιόμορφον». Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν ἡ ἀντίστοιχος γραφικὴ παράστασις εἶναι μία εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὸν ἐκλεγέντα ἄξονα. Ἡ ἄλλη περίπτωσις ὑποδιαιρεῖται εἰς δύο : δυνατὸν νὰ ἔχωμεν «πλάτος ὁμαλῶς μεταβαλλόμενον», ὁπότε ἡ γραφικὴ παράστασις εἶναι μία εὐθεῖα, ἢ νὰ ἔχωμεν «πλάτος κατὰ μέρη ὁμαλῶς μεταβαλλόμενον», ὁπότε ἡ γραφικὴ παράστασις θ' ἀποτελεῖται ἀπὸ τμήματα εὐθύγραμμα, μερικὰ τῶν ὁποίων δὲν ἀποκλείεται νὰ εἶναι παράλληλα πρὸς τὸν ἄξονα.

Ὁ Oresme ἐξήτασε προσέτι καὶ «πλάτη μὴ ὁμαλῶς μεταβαλλόμενα» (difformiter difformes), τὰ ὁποῖα εἰκονίζονται ὑπὸ γραμμῶν ἀνωμάλου πορείας. Τέλος παρετήρησε, πρὸ τοῦ Κεπλέρου, ὅτι εἰς τὴν γειτονίαν ἑνὸς μεγίστου ἡ μεταβολὴ μιᾶς μεταβλητῆς εἶναι μηδενική. Εἰς τὰ ἔργα του εὑρέθη ἀκόμη καὶ ἕνας ὑπαινιγμὸς διὰ τὸν τετραδιάστατον χῶρον. Ἐξ ὅλων τούτων συνάγεται, ὅτι τὸ ἔργον τοῦ Oresme, ἀκόμη καὶ ἂν δὲν ἤσκησε καμμίαν ἀπτὴν ἐπίδρασιν ἐπὶ τῆς διαμορφώσεως τῆς ἀναλυτικῆς γεωμετρίας, ἀξίζει τὴν θέσιν, τὴν ὁποίαν τελικῶς κατέλαβεν εἰς τὴν ἱστορίαν τῶν μαθηματικῶν.

Ἀκόμη μεγαλυτέραν πρωτοτυπίαν παρουσιάζει ὁ Oresme εἰς τὸ ἔργον του Algoritmus proprortionum (λογισμὸς ἀναλογιῶν), τὸ ὁποῖον ἀτυχῶς παρέμεινεν ἐνταφιασμένον εἰς δυσπροσίτους βιβλιοθήκας μέχρι τοῦ 1868, ὁπότε ἀνακαλυφθὲν ἐτιμήθη ἀμέσως μὲ μίαν ἔκδοσιν. Ἡ ἔκφρασίς μας δικαιολογεῖται ἐκ τοῦ γεγονότος, ὅτι εἰς τὸ ἔργον τοῦτο — διὰ νὰ ὁμιλήσωμεν μόνον διὰ τὰ σημαντικώτερα — ἐκτίθεται διὰ πρώτην φορὰν μία γενικὴ θεωρία τῶν ἀσυμμέτρων ποσῶν, στηριζομένη ἐπὶ τῆς μεθοδικῆς χρήσεως τῶν κλασματικῶν ἐκθετῶν. Διὰ νὰ δείξωμεν τὰ ἐπιτεύγματα τοῦ συγγραφέως, ἀρκεῖ ν' ἀναφέρωμεν τοὺς κανόνας λογισμοῦ, τοὺς ὁποίους ἀποκαθιστᾷ καὶ τοὺς ὁποίους, χάριν συντομίας καὶ σαφηνείας, παρουσιάζομεν ἐδῶ ὑπὸ σύγχρονον συμβολισμόν :

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n},$$

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}}, \quad a^{\frac{1}{m}} = \left(a^{\frac{p}{m}}\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\left(a^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{p}{m}} = a^{\frac{1}{m}}, \quad (a^m)^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{mp}{n}}\right)^{\frac{1}{q:n}},$$

$$(a^m)^{\frac{p}{b}} = (a^{mp})^{\frac{1}{q}}, \quad ab^{\frac{1}{n}} = (a^n b)^{\frac{1}{n}},$$

$$\frac{b^{\frac{1}{n}}}{a} = \left(\frac{b}{a^n}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad \frac{a}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a^n}{b}\right)^{\frac{1}{n}},$$

$$\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad a^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{p}{mp}},$$

$$a^{\frac{1}{m}} b^{\frac{1}{n}} = (a^n b^m)^{\frac{1}{mn}}, \quad \frac{a^{\frac{1}{m}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a^n}{b^m}\right)^{\frac{1}{mn}},$$

$$a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}}, \quad a^{\frac{1}{n}} : b^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}},$$

$$a^m . a^{\frac{1}{n}} = a^{m+\frac{1}{n}}, \quad a^m : a^{\frac{1}{n}} = a^{m-\frac{1}{n}}.$$

Θεωροῦμεν περιττὴν οἱανδήποτε ἰδικήν μας προσθήκην διὰ νὰ ἐξάρωμεν τὴν σπουδαιότητα τῶν ἀποτελεσμάτων τούτων, τὰ ὁποῖα ἀσφαλῶς ἦσαν πολὺ ἀνώτερα τῆς πνευματικῆς στάθμης τῶν ἐπιστημόνων τῆς ἐποχῆς διὰ νὰ ἐκτιμηθοῦν καὶ νὰ χρησιμοποιηθοῦν κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ XIV αἰῶνος.

Μετὰ τὴν ἀνάπτυξιν τῆς θεωρίας τῶν ἀναλογιῶν εἰς τὰ πρῶτα δύο μέρη τοῦ ἔργου του, ὁ συγγραφεὺς εἰς τὸ τρίτον μέρος παρουσιάζει ἐφαρμογάς, συνισταμένας εἰς τὴν ἔρευναν τῶν λόγων μεταξὺ τῶν ἐμβαδῶν κανονικῶν πολυγώνων ἐγγεγραμμένων καὶ περιγεγραμμένων εἰς κύκλον, ἐχόντων πλευρὰς 3,4, 6 ἢ 8, θέματα ποὺ ἀπησχόλησαν ἐπίσης καὶ τὸν Giordano Nemorario (§ 170). Ἀναφέρομεν μόνον τὴν πρότασιν : «Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον κανονικοῦ ὀκταγώνου εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν ἐμβαδῶν τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου τετραγώνου καὶ τοῦ ἀντιστοίχου περιγεγραμμένου», διὰ νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι εἰς ἕνα χειρόγραφον τοῦ ὑπὸ ἐξέτασιν ἔργου ἔχει προστεθῆ μία παρατήρησις, ὅτι «τὸ αὐτὸ θεώρημα ἰσχύει δι' ὅλα τὰ πολύγωνα», ἡ ὁποία εἶχεν ἤδη γίνει ἀπὸ τὸν προαναφερθέντα Giordano (§ 171). Ἀπορρέει ἐντεῦθεν τὸ συμπέρασμα ὅτι, ὡς πρὸς τὴν ἐσωτερικὴν ἀξίαν καὶ πρωτοτυπίαν, τὸ γεωμετρικὸν μέρος τοῦ Algoritmus εἶναι πολὺ κατώτερον τῆς ὕλης τῆς περιεχομένης εἰς τὸ μέρος τὸ σχετικὸν πρὸς τὴν ἐπιστήμην τῶν ἀριθμῶν.

178. Ἀφήνοντες πρὸς τὸ παρὸν τὴν Γαλλίαν, διαβαίνομεν τὸν Ρῆνον διὰ νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι τὸ 1365 ὁ Ροδόλφος IV, δοὺξ τῆς Αὐστρίας, σχεδιάζων νὰ ἱδρύσῃ εἰς Βιέννην ἕνα μέγα πανεπιστήμιον, ἐκάλεσεν ὡς πρύτανιν τὸν Ἀλβέρτον τῆς Σαξωνίας. Δὲν ἀρκεῖ, ἄραγε, αὐτὸ καὶ μόνον διὰ νὰ πιστοποιήσῃ τὴν μεγάλην φήμην τῆς ὁποίας ἔχαιρεν ὁ Ἀλβέρτος ;

Γεννηθεὶς εἰς τὴν Riggensdorf τῆς Σαξωνίας, ἐσπούδασε πρῶτον εἰς τὴν Πράγαν καὶ κατόπιν εἰς Παρισίους. Οὐδέποτε κατέλαβε τὴν θέσιν, διὰ τὴν ὁποίαν τὸν ἐκάλεσεν ὁ αὐστριακὸς πρίγκηψ, προτιμήσας τὸ ἀξίωμα τοῦ ἐπισκόπου τῆς Halberstadt, τὸ ὁποῖον καὶ διετήρησε μέχρι τοῦ θανάτου του (1390).

Ἐκ τῶν ἔργων του ἐτιμήθησαν μὲ ἐκδόσεις : α) Tractatus de latitudinis formarum (1505) καὶ β) Liber proportionum (1482 καὶ ἐννέα ἄλλαι ἐκδόσεις)*. Ὡς συγγραφεὺς πρωτότυπος μᾶς παρουσιάζεται εἰς δύο ἡμιφιλοσοφικοῦ περιεχομένου ἔργα, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἕνα φέρει τίτλον «Τετραγωνισμὸς τοῦ κύκλου» τὸ δὲ ἄλλο «Περὶ τῆς σχέσεως μεταξὺ πλευρᾶς καὶ διαγωνίου ἑνὸς τετραγώνου». Πτωχὸν εἰς περιεχόμενον τὸ πρῶτον, ὅπου διὰ μακρῶν διερευνᾶται τὸ ζήτημα κατὰ πόσον ἕνας κύκλος δύναται ἢ δὲν δύναται νὰ μετασχηματισθῇ εἰς τετράγωνον. Μεταξὺ τῶν παραδοξοτήτων ποὺ ἀπαντῶνται εἰς τὸ ἔργον αὐτὸ ἀναφέρομεν τὸ ἑξῆς : «ἐὰν ὁ κύκλος τετραγωνίζεται, τότε καὶ ἡ σφαῖρα κυβίζεται καὶ ἀντιστρόφως. Ἐὰν τώρα μεταγγίσωμεν τὴν ποσότητα τοῦ ὕδατος, ποὺ περιέχεται εἰς μίαν σφαῖραν, εἰς ἕνα κύβον, ἀναγνωρίζομεν ὅτι τὸ δεύτερον πρόβλημα εἶναι ἐπιδεκτικὸν λύσεως, ἄρα καὶ τὸ πρῶτον». Παρὰ ταῦτα ὁ συγγραφεὺς παραλείπει νὰ δηλώσῃ πόσον θὰ εἶναι τὸ μῆκος τῆς ἀκμῆς τοῦ κύβου τοῦ ἰσοδυνάμου πρὸς τὴν σφαῖραν, διὸ καὶ ὁ ἰσχυρισμός του στερεῖται ἐντελῶς βάσεως. Σημειωτέον ὅτι δι' αὐτόν, ὅπως καὶ διὰ τὸν Campano (§ 168) καὶ ὅλους τοὺς μεσαιωνικοὺς συγγραφεῖς, ἡ τιμὴ $3\,{}^{1}/_{7}$ τοῦ λόγου τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον δὲν εἶναι τιμὴ προσεγγίσεως, ἀλλ' ἡ ἀκριβὴς τιμὴ τοῦ π.

Κατὰ τρόπον ἀνάλογον προβαίνει καὶ εἰς τὸ δεύτερον ἔργον, λαμβάνων ἀφορμὴν ἀπὸ τὴν γνώμην, τὴν ὁποίαν καταπολεμεῖ, ὅτι ἡ διαγώνιος τετραγώνου εἶναι διπλασία τῆς πλευρᾶς του. Ἀποδεικνύει πῶς οἱ ἀρχαῖοι εἶχον ἀναγνωρίσει ἀπὸ τῆς ἐποχῆς τοῦ Πυθαγόρου, ὅτι ὁ λόγος τῆς διαγωνίου πρὸς τὴν πλευρὰν δὲν δύναται νὰ εἶναι ρητὸς ἀριθμός.

---

* Ὁ Aschbach εἰς τὸ ἔργον του Geschichte der Wiener Universität ἀποδίδει εἰς τὸν Ἀλβέρτον τῆς Σαξωνίας, ἔστω καὶ κατὰ τρόπον πιθανολογούμενον, ἕνα ὑπόμνημα De maximo et minimo, τὸ ὁποῖον θὰ ἔπρεπε νὰ εὑρίσκεται εἰς Βενετίαν. Πληροφορίαι ὅμως, ληφθεῖσαι ἀπὸ τὴν διεύθυνσιν τῆς Βιβλιοθήκης Ἁγίου Μάρκου, ἄγουν εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι πρόκειται περὶ κάποιας ἀβεβαιότητος· διότι εἰς τὴν ἐν λόγῳ Βιβλιοθήκην ὑπάρχει τὸ χειρόγραφον τοῦ Tractatus proportionum τοῦ Ἀλβέρτου τῆς Σαξωνίας, εἰς τὸ ὁποῖον ἔχει προσαρτηθῆ ἕνα Tractatus de maximo et minimo χωρὶς καμμίαν ἔνδειξιν συγγραφέως.

Δὲν θὰ τὸν ἀκολουθήσωμεν εἰς τὰς πολλὰς του παρεκβάσεις καὶ ἀποπλανήσεις, αἱ ὁποῖαι πολὺ μικρὰν σχέσιν ἔχουν μὲ τὰ μαθηματικά, ἀλλὰ σημειοῦμεν μόνον ὅτι δὲν φθάνει τελικῶς εἰς κανένα ἄξιον λόγου συμπέρασμα. Πρόκειται λοιπὸν περὶ μιᾶς ἀγόνου διαλεκτικῆς ἀσκήσεως, καρποῦ ἄνευ θρεπτικῆς ἀξίας τῆς σχολαστικῆς διδασκαλίας, ἀξιομνημονεύτου διὰ τὴν ὀλεθρίαν ἐπίδρασιν μερικῶν φιλοσοφικῶν κατευθύνσεων ἀκόμη καὶ ἐπὶ πνευμάτων ἀναμφισβητήτου ἀξίας.

Ἡ τύχη ἠθέλησε, πρὸς τιμὴν τῆς Γερμανίας, νὰ ἐμφανισθῇ κατὰ τὴν ἐποχὴν αὐτὴν ἐπὶ τῆς σκηνῆς τοῦ κόσμου μία σειρὰ διανοουμένων, ἐκ τῶν ὁποίων ἄρχεται, οὕτως εἰπεῖν, ἡ συμμετοχὴ τοῦ ἔθνους τούτου εἰς τὴν πρόοδον τῶν ἀκριβῶν ἐπιστημῶν.

Κατὰ τὸν XV αἰῶνα

179. Πράγματι ὁ Giovanni di Gemunden (καλούμενος τοιουτοτρόπως ἐκ τῆς τοποθεσίας, ὅπου εἶδε τὸ φῶς τὸ 1380) ἔγραψεν, μὲ τὸν τίτλον Tractatus de minutiis physicis, ἕνα μεθοδικὸν ἐγχειρίδιον ἐπὶ τοῦ λογισμοῦ μὲ ἑξηκονταδικὰ κλάσματα, τὸ ὁποῖον χάρις εἰς τὴν πρακτικήν του χρησιμότητα διὰ τοὺς ἐπιθυμοῦντας νὰ ἐξασκηθοῦν εἰς τοὺς ἀστρονομικοὺς ὑπολογισμούς, ἐχρησίμευσεν ὡς διδακτικὸν βιβλίον ἐπὶ πολλὰς δεκαετηρίδας εἰς τοὺς πανεπιστημιακοὺς σπουδαστάς.

Μεγαλυτέρα εἶναι ἡ φήμη, τῆς ὁποίας δικαίως ἔχαιρεν ὁ Giorg von Peuerbach, χάρις, πρὸ πάντων εἰς τὰς συμβολάς του εἰς τὴν σπουδὴν τῆς ἀστρονομίας. Γεννηθεὶς εἰς τὰ περίχωρα τοῦ Linz, εἰς ἕνα χωρίον ἐκ τοῦ ὁποίου ἔλαβε τὸ ὄνομα, τὴν 30ην Μαΐου 1423, ἐσπούδασεν εἰς Βιέννην καὶ ἔπειτα ἀπὸ μακρὰ ταξίδια εἰς τὴν Ἰταλίαν, ὅπου συνῆψε φιλικὰς σχέσεις μὲ τὸν ἀστρονόμον Giovanni Bianchini, ἐκλήθη τὸ 1454 ὑπὸ τοῦ βασιλέως τῆς Οὐγγαρίας ὡς ἀστρονόμος τῆς αὐλῆς. Μετ' οὐ πολὺ ὅμως κατέλαβε τὴν ἕδραν τῆς Ἀστρονομίας εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τῆς Βιέννης, ὅπου καὶ ἐγκατεστάθη. Ὁ πρόωρος θάνατός του, ἐπελθὼν τὴν 8ην Ἀπριλίου 1461, τὸν ἠμπόδισε νὰ φέρῃ εἰς πέρας μερικὰ σημαντικὰ ἔργα, τὰ ὁποῖα εἶχεν ἀρχίσει. Μεταξὺ τούτων πρέπει ν' ἀναφέρωμεν τὴν μετάφρασιν τῆς Ἀλμαγέστας τοῦ Πτολεμαίου ἐκ τοῦ πρωτοτύπου ἑλληνικοῦ κειμένου εἰς τὴν λατινικήν. Ἐκ τῶν ἔργων του σώζεται ἕνα βιβλίον ἀριθμητικῆς μὲ τὸν παράδοξον τίτλον Opus Algorismi jucundissimum (Ἔργον ἀριθμητικῆς τερπνότατον). Πρόκειται περὶ μιᾶς συλλογῆς κανόνων μὲ ἁπλοποιημένην διατύπωσιν, ἡ ὁποία συλλογὴ ἐπέτυχε νὰ καταλάβῃ τὴν θέσιν τοῦ ἀναλόγου ἐγχειριδίου τοῦ Sacrobosco (§ 173), μολονότι δὲν δύναται νὰ θεωρηθῇ ἀνώτερον ἐκείνου. Εἰς τοὺς παρακολουθοῦντας τὰς κινήσεις τῶν ἄστρων ὁ Peuerbach προσέφερε σπουδαίαν ὑπηρεσίαν καταστρώνων ἕνα πίνακα ἡμιτόνων, τοῦ ὁποίου ἡ

Δὲν θὰ τὸν ἀκολουθήσωμεν εἰς τὰς πολλὰς του παρεκβάσεις καὶ ἀποπλανήσεις, αἱ ὁποῖαι πολὺ μικρὰν σχέσιν ἔχουν μὲ τὰ μαθηματικά, ἀλλὰ σημειοῦμεν μόνον ὅτι δὲν φθάνει τελικῶς εἰς κανένα ἄξιον λόγου συμπέρασμα. Πρόκειται λοιπὸν περὶ μιᾶς ἀγόνου διαλεκτικῆς ἀσκήσεως, καρποῦ ἄνευ θρεπτικῆς ἀξίας τῆς σχολαστικῆς διδασκαλίας, ἀξιομνημονεύτου διὰ τὴν ὀλεθρίαν ἐπίδρασιν μερικῶν φιλοσοφικῶν κατευθύνσεων ἀκόμη καὶ ἐπὶ πνευμάτων ἀναμφισβητήτου ἀξίας.

Ἡ τύχη ἠθέλησε, πρὸς τιμὴν τῆς Γερμανίας, νὰ ἐμφανισθῇ κατὰ τὴν ἐποχὴν αὐτὴν ἐπὶ τῆς σκηνῆς τοῦ κόσμου μία σειρὰ διανοουμένων, ἐκ τῶν ὁποίων ἄρχεται, οὕτως εἰπεῖν, ἡ συμμετοχὴ τοῦ ἔθνους τούτου εἰς τὴν πρόοδον τῶν ἀκριβῶν ἐπιστημῶν.

Κατὰ τὸν XV αἰῶνα

179. Πράγματι ὁ Giovanni di Gemunden (καλούμενος τοιουτοτρόπως ἐκ τῆς τοποθεσίας, ὅπου εἶδε τὸ φῶς τὸ 1380) ἔγραψεν, μὲ τὸν τίτλον Tractatus de minutiis physicis, ἕνα μεθοδικὸν ἐγχειρίδιον ἐπὶ τοῦ λογισμοῦ μὲ ἑξηκονταδικὰ κλάσματα, τὸ ὁποῖον χάρις εἰς τὴν πρακτικήν του χρησιμότητα διὰ τοὺς ἐπιθυμοῦντας νὰ ἐξασκηθοῦν εἰς τοὺς ἀστρονομικοὺς ὑπολογισμούς, ἐχρησίμευσεν ὡς διδακτικὸν βιβλίον ἐπὶ πολλὰς δεκαετηρίδας εἰς τοὺς πανεπιστημιακοὺς σπουδαστάς.

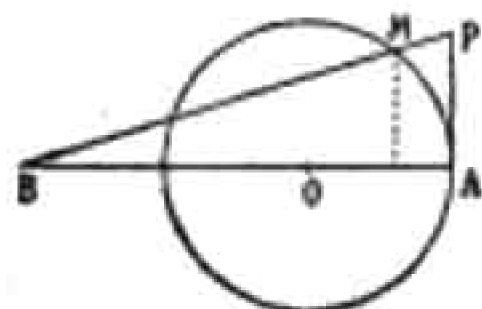
Μεγαλυτέρα εἶναι ἡ φήμη, τῆς ὁποίας δικαίως ἔχαιρεν ὁ Giorg von Peuerbach, χάρις, πρὸ πάντων εἰς τὰς συμβολάς του εἰς τὴν σπουδὴν τῆς ἀστρονομίας. Γεννηθεὶς εἰς τὰ περίχωρα τοῦ Linz, εἰς ἕνα χωρίον ἐκ τοῦ ὁποίου ἔλαβε τὸ ὄνομα, τὴν 30ην Μαΐου 1423, ἐσπούδασεν εἰς Βιέννην καὶ ἔπειτα ἀπὸ μακρὰ ταξίδια εἰς τὴν Ἰταλίαν, ὅπου συνῆψε φιλικὰς σχέσεις μὲ τὸν ἀστρονόμον Giovanni Bianchini, ἐκλήθη τὸ 1454 ὑπὸ τοῦ βασιλέως τῆς Οὐγγαρίας ὡς ἀστρονόμος τῆς αὐλῆς. Μετ᾽ οὐ πολὺ ὅμως κατέλαβε τὴν ἕδραν τῆς Ἀστρονομίας εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τῆς Βιέννης, ὅπου καὶ ἐγκατεστάθη. Ὁ πρόωρος θάνατός του, ἐπελθὼν τὴν 8ην Ἀπριλίου 1461, τὸν ἠμπόδισε νὰ φέρῃ εἰς πέρας μερικὰ σημαντικὰ ἔργα, τὰ ὁποῖα εἶχεν ἀρχίσει. Μεταξὺ τούτων πρέπει ν᾽ ἀναφέρωμεν τὴν μετάφρασιν τῆς Ἀλμαγέστας τοῦ Πτολεμαίου ἐκ τοῦ πρωτοτύπου ἑλληνικοῦ κειμένου εἰς τὴν λατινικήν. Ἐκ τῶν ἔργων του σώζεται ἕνα βιβλίον ἀριθμητικῆς μὲ τὸν παράδοξον τίτλον Opus Algorismi jucundissimum (Ἔργον ἀριθμητικῆς τερπνότατον). Πρόκειται περὶ μιᾶς συλλογῆς κανόνων μὲ ἁπλοποιημένην διατύπωσιν, ἡ ὁποία συλλογὴ ἐπέτυχε νὰ καταλάβῃ τὴν θέσιν τοῦ ἀναλόγου ἐγχειριδίου τοῦ Sacrobosco (§ 173), μολονότι δὲν δύναται νὰ θεωρηθῇ ἀνώτερον ἐκείνου. Εἰς τοὺς παρακολουθοῦντας τὰς κινήσεις τῶν ἄστρων ὁ Peuerbach προσέφερε σπουδαίαν ὑπηρεσίαν καταστρώνων ἕνα πίνακα ἡμιτόνων, τοῦ ὁποίου ἡ

ἀνάγκη καθίστατο μὲ τὴν πάροδον τοῦ χρόνου ὁλοὲν καὶ περισσότερον αἰσθητή, ὅσον ἡ ἀνατολικὴ μέθοδος τῶν ἡμιτόνων ἐλάμβανε βαθμηδὸν τὴν θέσιν τοῦ ἀρχαίου ἑλληνικοῦ συστήματος τῶν χορδῶν.

180. Ἐρχόμεθα τώρα εἰς ἐκεῖνον, ὁ ὁποῖος ἀφοῦ περιεβλήθη τὸ 1448 τὴν πορφύραν τοῦ Καρδιναλίου, ὠνομάσθη Νικόλαος Κουζᾶνος (λατινικὰ Cusanus). Ἐγεννήθη τὸ 1401 ἀπὸ οἰκογένειαν πτωχοῦ ἁλιέως εἰς τὸ χωρίον Cues, τοῦ ὁποίου τὸ ὄνομα ἐξελατινίσθη εἰς Cusa, ἐπὶ τῆς ἀριστερᾶς ὄχθης τοῦ Μοζέλλα. Περατώσας τὰ ἐγκύκλια γράμματα εἰς Deventer, ἐνεγράφη τὸ 1416 εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τοῦ Heidelberg. Τὸν εὑρίσκομεν κατόπιν εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τῆς Padova, συμμαθητὴν τοῦ μέλλοντος γεωγράφου Paolo Toscanelli. Λαβὼν τὸ δίπλωμα ἐξ ἀμφοτέρων ἐπεδόθη εἰς τὴν δικηγορίαν. Ἡ θλῖψις ὅμως, τὴν ὁποίαν ἐδοκίμασεν, ὅταν ἔχασε τὴν πρώτην ὑπόθεσιν, ποὺ ὑπερήσπιζεν, ἦτο τόσον ἰσχυρὰ ,ὥστε ἐγκατέλειψε τοὺς κώδικας διὰ ν' ἀφοσιωθῇ εἰς τὴν Θεολογίαν, ὅπου δὲν ἐβράδυνε νὰ διαπρέψῃ, λαμβάνων μέρος εἰς τὰς ἔριδας, αἱ ὁποῖαι τὴν ἐποχὴν ἐκείνην (παραμοναὶ τῆς Μεταρρυθμίσεως) ἦσαν συχνόταται καὶ ὀξύταται. Ἀπέθανεν εἰς Todi τὴν 11ην Αὐγούστου 1464. Εἰς τὴν ἱστορίαν τοῦ Ἡμερολογίου ἔχει θέσιν ὁ Κουζᾶνος, λόγῳ τῆς συμμετοχῆς του εἰς τὰς ἐργασίας, αἱ ὁποῖαι ὡδήγησαν εἰς τὴν μεταρρύθμισίν του.

Ὡς δόκιμον ἐργάτην τῆς μαθηματικῆς φιλοσοφίας τὸν συνιστοῦν εἰς τὴν προσοχήν μας τὸ μικρὸν ἔργον του De Beryllo καὶ τὸ περίφημον De docta ignorantia (Περὶ πεπαιδευμένης ἀγνοίας). Ἡ πεπλανημένη ἀντίληψις, ὅτι ἠδύνατο νὰ ἐπιτύχῃ τὸν τετραγωνισμὸν τοῦ κύκλου (περὶ οὗ τὸ μικρὸν ἔργο του De quadratura circuli) τὸν ὡδήγησεν εἰς συμπεράσματα ἐσφαλμένα, τὰ ὁποῖα θὰ ἠδύνατο νὰ προλάβῃ μελετῶν τὸ τοῦ Ἀρχιμήδους Κύκλου μέτρησις, ποὺ ἀκριβῶς τότε ἐτίθετο εἰς κυκλοφορίαν ὑπὸ διακεκριμένων ἰταλῶν λογίων τῆς ἐπιστήμης.

Ἐν πάσῃ περιπτώσει, διὰ νὰ δώσωμεν δεῖγμα τοῦ μαθηματικοῦ πνεύματος, τὸ ὁποῖον αἱ περιστάσεις δὲν τοῦ ἐπέτρεψαν νὰ ἐκμεταλλευθῇ πρὸς τὸ συμφέρον τῆς ἐπιστήμης, θὰ μνημονεύσωμεν μίαν κομψὴν μέθοδον, τὴν ὁποίαν μᾶς ἐδίδαξε πρὸς εὐθειοποίησιν κυκλικοῦ τόξου μὲ ἱκανὴν προσέγγισιν. Ἔστω τόξον ΑΜ = φ, μικρότερον τῶν 30°, εἰς κύκλον κέντρον Ο (σχ. 30). Προεκτείνομεν τὴν ἀκτῖνα ΑΟ οὕτως, ὥστε νὰ προκύπτῃ ἡ ΑΒ τριπλασία τῆς ἀκτῖνος r, καὶ ἔστω Ρ τὸ σημεῖον ὅπου ἡ εἰς Α ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας συναντᾷ τὴν εὐθεῖαν ΒΜ. Τὸ τμῆμα ΑΡ προκύπτει κατὰ προσέγγισιν ἴσον πρὸς τὸ τόξον ΑΜ. Διὰ νὰ κρίνωμεν περὶ τοῦ βαθμοῦ τῆς ἐπιτυγχανο-



Σχ. 30

μένης προσεγγίσεως, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἐκτιθεμένη κατασκευὴ ἄγει εἰς τὴν ἀκόλουθον ἔκφρασιν τοῦ μήκους τοῦ τόξου φ :

$$\varphi = \frac{3\ \eta\mu\ \varphi}{2+\sigma\upsilon\nu\varphi} = \varphi\left(1 - \frac{\varphi^4}{180} + \cdots\right).$$

Βλέπομεν ὅτι τὸ σφάλμα ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν πέμπτην δύναμιν τοῦ τόξου, ὑποτεθέντος μικροτέρου τῶν 30° ($\pi/6 = 0{,}523\ldots$).

181. Ὅτι τὸ σφάλμα, ποὺ διέπραξεν ὁ Νικόλαος Κουζᾶνος εἰς τὰς προσπαθείας του νὰ τετραγωνίσῃ τὸν κύκλον, θὰ εἶχε γίνει φανερὸν ἐκ τοῦ γεγονότος ὅτι ἡ ὑπ' αὐτοῦ εὑρεθεῖσα τιμὴ τοῦ π δὲν περιελαμβάνετο μεταξὺ $3\ ^1/_7$ καὶ $3\ ^{10}/_{71}$ (§ 41), κατέστησε σαφές, ὀλίγον πρὸ τοῦ θανάτου τοῦ σοφοῦ καρδιναλίου, ἕνας ἐπιστήμων, εἰς τὸν ὁποῖον αἱ λογιστικαὶ μέθοδοι τῆς ἀστρονομίας ὀφείλουν πολλὰς βελτιώσεις, ἀλλ' ὁ ὁποῖος ἔχει ἐπίσης δικαιώματα διὰ μία διακεκριμένην θέσιν εἰς τὴν ἱστορίαν τῶν καθαρῶν μαθηματικῶν. Εἶναι ὁ γερμανὸς Johanes Müller, γεννηθεὶς τὴν 6ην Ἰουνίου 1436 εἰς Königsberg (τοποθεσίαν ἀνήκουσαν εἰς τὸ δουκᾶτον τοῦ Coburg) καὶ ἀποκαλούμενος ἐνίοτε Johannes Germanus ἢ Francus, συχνότερα καὶ γενικώτερα Johannes de Monte Regio, ὑπὸ τῶν Ἰταλῶν δὲ Regiomontano (λατινικὰ Regiomontanus).

Μόλις δωδεκαετὴς ἐνεγράφη εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τῆς Λειψίας, μετ' ὀλίγον δὲ εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τῆς Βιέννης, ἑλκυσθεὶς ἀπὸ τὴν μεγάλην φήμην τοῦ Peuerbach (§ 179), τοῦ ὁποίου δὲν ἐβράδυνε νὰ γίνῃ ἐπίλεκτος μαθητὴς καὶ ἐν συνεχείᾳ ἐπιστημονικὸς διάδοχος. Διότι ὁ Peuerbach εἰς αὐτὸν ἐνεπιστεύθη τὴν ἀποστολὴν νὰ φέρῃ εἰς πέρας τὴν ἔκδοσιν τοῦ Πτολεμαίου, τὴν ὁποίαν εἶχεν ὁ ἴδιος ἀρχίσει κατὰ προτροπὴν τοῦ γνωστοῦ Ἕλληνος λογίου Βησσαρίωνος (1403 - 1472). Ἀκριβῶς δὲ διὰ νὰ ἔλθῃ εἰς ἐπαφὴν μὲ τὸν εὐρυμαθέστατον ἐκεῖνον Ἕλληνα ὁ Regiomontano μετέβη εἰς τὴν Ρώμην, περιώδευσεν ἔπειτα τὴν Ἰταλίαν καὶ διέμεινεν ἐπί τινα χρόνον εἰς τὴν Ferrara, διὰ νὰ ἐπωφεληθῇ τῆς διδασκαλίας τοῦ ἀστρονόμου Bianchini καὶ εἰς τὴν Padova, εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τῆς ὁποίας ἔκαμεν ἕνα εἰσαγωγικὸν μάθημα ἱστορικοῦ χαρακτῆρος, περὶ τοῦ ὁποίου θὰ ὁμιλήσωμεν μετ' ὀλίγον.

Εἰς τὴν Ἰταλίαν κατεγίνετο τόσον μὲ καθαρὰς ἐπιστημονικὰς ἐρεύνας ὅσον καὶ μὲ ἀναδιφήσεις τῶν βιβλιοθηκῶν καὶ τῶν ἀρχείων, ὅπου ἔκαμεν ἀνακαλύψεις μεγίστου ἐνδιαφέροντος. Ἀρκεῖ ν' ἀναφέρωμεν τὴν ἀνακάλυψιν, εἰς μίαν βιβλιοθήκην τῆς Βενετίας, τοῦ Διοφάντου εἰς τὴν Ἑλληνικήν. Χάρις εἰς τὴν ἀνακάλυψιν αὐτὴν ὁ πρίγκηψ τῶν ἀρχαίων ἑλλήνων ἀριθμητικῶν, ἔπειτα ἀπὸ λήθην τόσων αἰώνων, ἐτίθετο πάλιν εἰς κυκλοφορίαν*.

* Εἰς μίαν ἐπιστολὴν πρὸ τὸν Bianchini (1464), ὅπου ἀναγγέλλεται ἡ ἀνακάλυψις.

Τὸ 1468 εὑρίσκομεν τὸν Regiomontano εἰς Βιέννην, ὅπου λαμβάνει παρά τοῦ Matteo Corvino τὴν πρόσκλησιν νὰ μεταβῇ εἰς Ofen (τὴν σημερινὴν Βουδαπέστην) ὑπὸ τὴν ἰδιότητα τοῦ ἀστρονόμου τῆς αὐλῆς. Ἀπεδέχθη τὴν τιμητικὴν πρόσκλησιν, ἀλλά τὸ 1471 ἐγκατέλειψε τὴν Οὑγγαρίαν διὰ νὰ ἐγκατασταθῇ εἰς τὴν Νυρεμβέργην. Καὶ ἐδῶ ὅμως δὲν παρέμεινεν ἐπὶ μακρόν, διότι ὁ πάπας Σίξτος IV, τὸ 1475, τὸν ἐκάλεσεν εἰς τὴν Ρώμην νὰ τεθῇ ἐπικεφαλῆς τῶν ἐργασιῶν μεταρρυθμίσεως τοῦ ἡμερολογίου, ἡ ὁποία εἶχε προσλάβει τὴν μορφὴν ἐπειγούσης ἀνάγκης ἀνεπιδέκτου ἀναβολῆς. Ἐκεῖ καὶ ἀπέθανεν ὁ Regiomontano, εἰς ἡλικίαν μόλις 40 ἐτῶν (6 Ἰουνίου 1476), κατά τινας ἐκ πανώλους, κατ' ἄλλους ἐκ δηλητηριάσεως σχεδιασθείσης ὑπὸ τοῦ Giorgo di Trebisonda, χολωθέντος δι' αὐστηρὰν κριτικὴν τῶν ἐργασιῶν του ἐπὶ τοῦ Πτολεμαίου καὶ τοῦ Θέωνος τοῦ Ἀλεξανδρέως.

182. Ὁ ὄγκος τῆς ἐργασίας, τὴν ὁποίαν ἔφερεν εἰς πέρας ὁ Regiomontano κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς βραχείας ζωῆς του εἶναι πράγματι καταπληκτικός. Ἔστω καὶ ἂν ὁ κατάλογος τῶν γραπτῶν του περιλαμβάνῃ ἔργα μόνον ἐν σχεδίῳ, πάντως οὐδεμία ἀμφιβολία ὑπάρχει ὅτι τὸ πεδίον τὸ ὁποῖον ἐνηγκαλίσθη παρουσιάζεται τόσον μέγα, ὥστε ἀκόμη καὶ διὰ νὰ τὸ διατρέξῃ κανεὶς ἐπιτροχάδην θὰ ἐχρειάζετο χρόνον ὑπερβαίνοντα κατὰ πολὺ τὴν διάρκειαν μιᾶς ἀνθρωπίνης ζωῆς. Ὅτι δὲ ἐκυριεύθη ἀπὸ τὸν πόθον νὰ δώσῃ εἰς τὴν λατινικὴν μεταφράσεις τῶν ἔργων τοῦ Πτολεμαίου, τοῦ Εὐκλείδου, τοῦ Ἀρχιμήδους, τοῦ Ἀπολλωνίου καὶ τῶν ἄλλων μικροτέρων ἑλλήνων γεωμετρῶν δὲν ἀποδεικνύει τίποτε ἄλλο, παρὰ ὅτι ἐγνώριζε τὴν ἀξίαν τῶν ἔργων τούτων, τὰ ὁποῖα θὰ εἶχε μελετήσει κατὰ βάθος. Τὸ ἔμμεσον τοῦτο συμπέρασμα εὑρίσκει πολύτιμον ἐπιβεβαίωσιν εἰς τὸ εἰσαγωγικὸν ἐκεῖνο μάθημα ἐπὶ τῆς ἱστορίας τῶν μαθηματικῶν, τὸ ὁποῖον ἔχομεν ἤδη ἀναφέρει, καὶ τοῦ ὁποίου τὸ περιεχόμενον ἔχομεν ὑποχρέωσιν νὰ γνωρίσωμεν εἰς τὸν ἀναγνώστην, διὰ νὰ μάθῃ ποῖα ἦσαν τὰ ἀρχαῖα ἔργα τὰ ὁποῖα εἶχον περιέλθει εἰς γνῶσιν τῶν εὐρωπαίων πεπαιδευμένων τοῦ XV αἰῶνος, χάρις εἰς τὰς ἀξιεπαίνους προσπαθείας τῶν ἀνθρωπιστῶν.

«Ἐπὶ δύο καὶ πλέον ἔτη», ἀρχίζει τὴν διάλεξίν του ὁ Regiomontano, «σιωποῦν εἰς τὸ πανεπιστήμιον τοῦτο (τῆς Padova) τὰ μαθήματα τῆς Ἀστρονομίας». Διὰ τοῦτο ἐν τῇ ἐπιθυμίᾳ του νὰ διευκολύνῃ τοὺς ἀκροατάς του νὰ κατανοήσουν τὰς θεωρίας τοῦ ἄραβος ἀστρονόμου Alfergani*, ἐθεώρησε σκόπιμον νὰ ρίψῃ ἕνα βλέμμα εἰς τὸ σύνολον τῶν μαθηματικῶν ἐπιστημῶν.

Δι' αὐτὸν τὰ μαθηματικὰ εἶναι ἡ ἐπιστήμη τῶν μεγεθῶν καὶ περιλαμβά-

ἀποκαλύπτεται συγχρόνως καὶ ἡ λεπτομέρεια, ὅτι ἐνῷ εἰς τὸν πρόλογον γίνεται λόγος διὰ 13 βιβλία, τὸ βενετικὸν χειρόγραφον δὲν περιλαμβάνει παρὰ μόνον ἕξ.

* Πρόκειται περὶ τοῦ ἄραβος μαθηματικοῦ (ἀποθανόντος τὸ 833 ἢ 844), τοῦ ὁποίου τὸ πλῆρες ὄνομα εἶναι Ahmed ben Muhammed ben Muhammed ben Ketir al Fargani. Εἰς τὰ ἔργα του ἀναφέρεται ὁ II τόμος τοῦ ἔργου τοῦ P. Duhem, Le système du monde (Paris 1914).

νουν τὴν Γεωμετρίαν καὶ τὴν Ἀριθμητικήν, κλάδους τῶν ὁποίων ὁ πρῶτος ἀσχολεῖται μὲ ὀντότητας συνεχεῖς, ἐνῷ ὁ δεύτερος μὲ ὀντότητας διακεριμένας. Ἡ γεωμετρία ἐγεννήθη εἰς τὴν Αἴγυπτον ἐξ ἀφορμῆς τῶν προβλημάτων ποὺ ἀνέκυπτον κατὰ τὰς περιοδικὰς πλημμύρας τοῦ Νείλου καὶ πολλοὶ ὑπῆρξαν οἱ ἐπιστήμονες ποὺ ἠσχολήθησαν μὲ αὐτήν. Ὁ Εὐκλείδης ὁ ἐκ Μεγάρων (sic) ἥνωσεν εἰς 13 βιβλία ὅλας τὰς γνώσεις τῆς ἐποχῆς του. Ὁ Ὑψικλῆς προσέθεσε δύο βιβλία, ὁ δὲ Βοήθιος μετέφρασεν εἰς τὴν λατινικὴν καὶ τὰ 15 βιβλία(;), ἐνῷ ὁ Ἀδελάρδος, ὁ Ἀλφρέδος* καὶ τέλος ὁ Campano ἀνεψηλάφησαν τὸ σύνολον. Ἠκολούθησαν ὁ Ἀπολλώνιος μὲ τὰς Κωνικάς του, ἔργον παραμένον ἀκόμη ἀμετάφραστον καὶ ὁ Ἀρχιμήδης, τοῦ ὁποίου τὰ ἔργα μετεφράσθησαν ὑπὸ τοῦ Γεράρδου τῆς Κρεμώνης. Εἰς τὸ ἔργον τοῦ Ἀρχιμήδους Περὶ σπειρῶν ἐγένετο προσπάθεια ἀναγωγῆς μιᾶς περιφερείας εἰς μίαν εὐθεῖαν πρὸς τὸν σκοπὸν τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου, προβλήματος ἀναμένοντος μέχρι σήμερον τὴν λύσιν του. Ὁ Ἀρχιμήδης ἔγραψεν ἀκόμη περὶ μετρήσεως τοῦ κύκλου καὶ ἄλλα.

Ὁ Regiomontano ἀναφέρει κατόπιν τὸν Εὐτόκιον ὡς σχολιαστὴν τοῦ Ἀρχιμήδους, τοῦ Θεοδοσίου καὶ τοῦ Μενελάου. Ὡς πρὸς τὴν ἀριθμητικήν, ἀναγνωρίζει ὅτι εἶναι δύσκολον ν' ἀποφανθῇ κανεὶς περὶ τοῦ πῶς ἐγεννήθη, εἶναι ὅμως ἐκτὸς πάσης ἀμφιβολίας ὅτι ὁ Πυθαγόρας ἀπηθανατίσθη διὰ τὰς γνώσεις του ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν. Εἰς τὴν ἀριθμητικὴν ὁ Εὐκλείδης ἀφιέρωσε τὰ βιβλία VII - IX τῶν Στοιχείων του, ἐκ τῶν ὁποίων ἐνεπνεύσθη ὁ Giordano τὴν συγγραφὴν τῶν δέκα βιβλίων του ἐπὶ τοῦ ἰδίου θέματος. Ὁ Giornado ἔγραψεν ἔπειτα ἄλλα τρία ὑπὸ τὸν τίτλον De numeris datis. Τὰ 13 βιβλία τοῦ Διοφάντου δὲν μετεφράσθησαν ἀκόμη ἐκ τοῦ ἑλληνικοῦ, ἂν καί, βεβαιώνει ὁ Regiomontano, εἰς τὸ ἔργον τοῦτο περιέχεται τὸ ἄνθος τῆς ἀριθμητικῆς, τουτέστιν ἡ «ars rei et census» (τέχνη μεγεθῶν καὶ τετραγώνων, § 161) ἤ, μὲ τὸν ἀραβικὸν ὅρον, «ἄλγεβρα». Μεταξὺ τῶν λατίνων εἰδικῶν εἰς τὰ θέματα αὐτὰ ἀναφέρει μόνον τὸν Bianchini**, ἐνῷ ἐνθυμεῖται τὸν Βαρλαὰμ (§ 96), διότι ἔγραψεν ἓξ βιβλία ἀριθμητικῆς εἰς τὴν ἑλληνικήν***. Εἰσέρχεται κατόπιν εἰς τὴν ἀστρονομίαν, ὅπου δὲν θὰ τὸν ἀκολουθήσωμεν περατοῦντα τὴν ὁμιλίαν του μὲ ἕνα ἐγκώμιον τοῦ διδασκάλου του Peuerbach.

---

* Ἀναφέρεται, ἄραγε, εἰς μίαν μετάφρασιν γενομένην ἐκείνην τὴν ἐποχὴν ὑπὸ ἑνὸς ἄγγλου βασιλέως φέροντος τὸ ὄνομα τοῦτο;

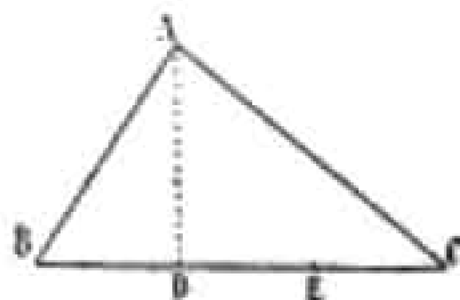
** Ἀναφέρεται εἰς τὸν γνωστὸν ἀστρονόμον, γεννηθέντα εἰς Βολωνίαν, διαβιώσαντα δὲ εἰς Ferrara κατὰ τὸν XV αἰῶνα. Ἀκατανόητος εἶναι ἡ ἀναφορὰ αὐτὴ τὴν ὁποίαν κάμνει ὁ Regiomontano, διότι, ὡς γράφει ὁ Tiraboschi (Storia delle lett. itab. tVI, μέρος I, σελ. 363 - 5). Τὸ μοναδικόν του μαθηματικὸν ἔργον, ποὺ γνωρίζομεν (μέχρι τοῦδε μάλιστα ἀνέκδοτον) φέρει τὸν τίτλον De Sinibus (περὶ ἡμιτόνων).

*** Ἂς σημειώσῃ ὁ ἀναγνώστης τὴν ἀπουσίαν τοῦ ὀνόματος τοῦ Fibonacci καὶ τῶν ἄλλων μεταγενεστέρων αὐτοῦ Ἰταλῶν ἀλγεβριστῶν.

183. Ἡ ἀστρονομία ὑπῆρξε τὸ πεδίον ἐκεῖνο, εἰς τὴν καλλιέργειαν τοῦ ὁποίου ἀφιέρωσεν ὁ Regiomontano τὸ καλύτερον μέρος τῶν δυνάμεών του. Καὶ ἀκριβῶς εἰς ἐξυπηρέτησιν αὐτῆς συνέγραψε τὸ 1464 τὸ περίφημον ἔργον De triangulis omnimodis libri V (Περὶ παντοειδῶν τριγώνων: τυπωθὲν τὸ 1533), τὸ πρῶτον βιβλίον τριγωνομετρίας φέρων τὸ ὄνομα εὐρωπαίου συγγραφέως. Εἰς τὴν συγγραφὴν τούτου ἐστηρίχθη ἐπὶ παρομοίων ἔργων τοῦ Nasir ed Din (§ 152), ἐνῷ τίποτε δὲν ἀποδεικνύει ὅτι εἶχε λάβει γνῶσιν τῶν ἔργων τοῦ Levi ben Gerson (§ 175 - 6), παρὰ τὰ ἔκδηλα καὶ σημαντικὰ σημεῖα ἐπαφῆς.

Αἱ πεντήκοντα ἑπτὰ προτάσεις ποὺ ἀποτελοῦν τὸ Βιβλίον I τοῦ ἐν λόγῳ ἔργου ἔχουν προπαιδευτικὸν χαρακτῆρα. Μερικοὶ θὰ ἔλεγε κανεὶς ὅτι ἐγράφησαν ἀπὸ ἕλληνα μαθηματικὸν τῆς χρυσῆς περιόδου (σημειωτέον ὅτι διὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος τῶν τριῶν ὑψῶν ὁ συγγραφεὺς παραπέμπει εἰς ἄλλο ἔργον του), ἐνῷ ἄλλαι χρησιμεύουν ὡς βάσις, διὰ μίαν μεθοδικὴν ἔκθεσιν τῆς τριγωνομετρίας, στηριζομένην ἐπὶ τῆς χρήσεως τῶν ἡμιτόνων τῶν γωνιῶν καὶ τῶν συμπληρωμάτων των.

Εἰς τὸ Βιβλίον II, τὸ ὁποῖον περιλαμβάνει 33 προτάσεις συναντῶμεν τὸ θεώρημα τῶν ἡμιτόνων εἰς τὰ εὐθύγραμμα τρίγωνα, γεγονὸς τὸ ὁποῖον παρεκίνησε τοὺς ἱστορικοὺς ν' ἀποδώσουν εἰς αὐτὸν τὴν πατρότητα τῆς προτάσεως, ἐνῷ σήμερον γνωρίζομεν (§ 176) ὅτι τούτου προηγήθη ὁ Levi ben Gerson. Εἰς τὸ αὐτὸ Βιβλίον ἀπαντῶμεν πολλὰ προβλήματα ἀφορῶντα τρίγωνα, λυόμενα μὲ ρητορικὴν ἄλγεβραν ἀκόμη καὶ ὅταν ἡ γεωμετρικὴ λύσις δὲν παρουσιάζει καμμίαν δυσκολίαν. Ἀναφέρομεν ὡς παράδειγμα τὴν κατασκευὴν τριγώνου (σχ. 31), τοῦ ὁποίου δίδονται ἡ βάσις $BC = a$, τὸ ἀντίστοιχον ὕψος $AD = h$ καὶ ὁ λόγος μ τῶν ἄλλων δύο πλευρῶν. Τὸ πρόβλημα λύεται γεωμετρικῶς χωρὶς δυσκολίαν, ὅταν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου, τῶν ὁποίων ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο δοθέντων σημείων εἶναι σταθερὸς εἶναι ἡ «ἀπολλώνειος περιφέρεια» (§ 45). Ὁ Regiomontano πραγματεύεται τὸ πρόβλημα μὲ ὑπολογισμούς, δεχόμενος ὡς ἄγνωστον τὸ ἥμισυ τοῦ τμήματος EC, τὸ ὁποῖον προκύπτει λαμβανομένου $DE = DB$. Μὲ ἁπλᾶς ἐφαρμογὰς τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος, φθάνει εἰς ἀποτέλεσμα ἰσοδύναμον πρὸς τὴν ἀκόλουθον δευτεροβάθμιον ἐξίσωσιν:



Σχ. 31

$$x^2 + \frac{a^2}{4} + h^2 = \frac{\mu^2+1}{\mu^2-1}\, a\, x\,.$$

Αἱ 56 προτάσεις τοῦ Βιβλίου III καὶ αἱ πρῶται 15 (μεταξὺ 34) τοῦ IV Βιβλίου συναποτελοῦν τὸ περιεχόμενον τῆς Σφαιρικῆς τῶν ἀρχαίων. Ὡς πηγαὶ τοῦ ἐχρησίμευσαν ἀναμφιβόλως ὁ Θεοδόσιος καὶ ἀκόμη περισσότερον

ὁ Μενέλαος. Σημειοῦμεν εἰς τὸ Βιβλίον III τὸ θεώρημα τῶν ἡμιτόνων διὰ τυχόντα σφαιρικὰ τρίγωνα, ὡς ἐπίσης τὰς σχέσεις μεταξὺ τῶν διαφόρων στοιχείων σφαιρικῶν τριγώνων ABC, ὀρθογωνίου εἰς C, αἱ ὁποῖαι σχέσεις σήμερον ἐκφράζονται μὲ τοὺς τύπους:

$$\sin A \cos b = \cos B$$
$$\cos c = \cos a \cdot \cos b.$$

Ὁ δεύτερος προκύπτει προφανῶς ὡς εἰδικὴ περίπτωσις τοῦ οὕτω καλουμένου «θεωρήματος τοῦ συνημιτόνου», τὸ ὁποῖον ἀπαντᾶται εἰς τὸ IV Βιβλίον τοῦ ἐξεταζομένου ἔργου ὑπὸ τὴν μορφήν:

$$\frac{\sin \operatorname{ver} C}{\sin \operatorname{ver} c + \sin \operatorname{ver} (a-b)} = \frac{1}{\sin a \cdot \sin b}.$$

Τὸ ὑπόλοιπον τοῦ Βιβλίου (ὅπου εὑρίσκονται 15 προτάσεις) ἀναφέρεται εἰς κατασκευὰς σφαιρικῶν τριγώνων, ἐπὶ τῇ βάσει διαφόρων συστημάτων ἀριθμητικῶν δεδομένων.

Τὸ ἔργον τοῦτο τοῦ Regiomontano, δοθὲν εἰς τὴν δημοσιότητα διὰ τοῦ τύπου περίπου ἥμισυ αἰῶνα μετὰ τὸν θάνατον τοῦ συγγραφέως, μᾶς παρουσιάζεται ὑπὸ μίαν μορφήν, ἡ ὁποία πιθανῶς δὲν εἶναι ἐκείνη, τὴν ὁποίαν θὰ ἔδιδε τελικῶς εἰς αὐτὸ ὁ συγγραφεύς. Ὡς συμπληρώματα τοῦ ἔργου θεωροῦνται ἀκόμη δύο πίνακες: Tabula primi mobilis καὶ Tabula directionum. Ὁ πρῶτος εἶναι ἕνας πίναξ διπλῆς εἰσόδου, χρήσιμος εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τῶν στοιχείων ἑνὸς ὀρθογωνίου σφαιρικοῦ τριγώνου, ὀρθογωνίου εἰς C, μέσῳ τοῦ τύπου:

$$\sin a = \sin c \cdot \sin A.$$

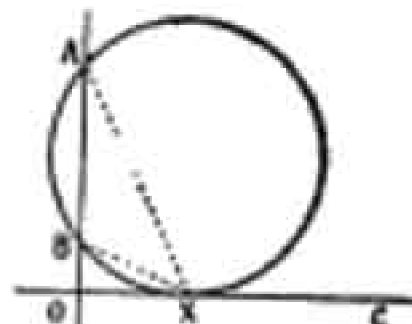
Ὁ δεύτερος χρειάζεται εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τῶν ἐφαπτομένων, χωρὶς ὅμως τὰ νέα αὐτὰ τριγωνομετρικὰ μεγέθη ν' ἀποκαλοῦνται μὲ εἰδικὸν ὄνομα.

Εἰς ἕνα κείμενον φέρον τὸν τίτλον Contra commentatorem Aristotelis Averroem, ὁ ὁποῖος ἀναγινώσκεται εἰς ἕνα κατάλογον τῶν ἔργων του, χωρὶς ὅμως τὸ κείμενον νὰ μᾶς εἶναι γνωστόν, ἴσως ὁ συγγραφεὺς ν' ἀπέδειξε πρῶτος, ἐναντίον τῆς γνώμης τοῦ Ἀριστοτέλους, τοῦ R. Bacone καὶ τοῦ Bradwardin, τὸ ἀδύνατον τῆς πληρώσεως τοῦ χώρου μὲ κανονικὰ πολύεδρα διάφορα τοῦ κύβου.

184. Ἐνῷ τὰ ἔργα, τὰ ὁποῖα ἐν συντομίᾳ ἀνελύσαμεν, πίπτουν ἐπὶ τῆς γεφύρας τῆς συνδεούσης τὴν γεωμετρίαν μὲ τὴν ἀστρονομίαν, ἄλλα δεδομένα παρέχουν ἀπόδειξιν τοῦ ἐνδιαφέροντος καὶ τῶν ἱκανοτήτων τοῦ Regiomontano διὰ καθαρῶς θεωρητικὰς ἐρεύνας. Θ' ἀναφέρωμεν π.χ. τὴν ἐργασίαν του Π ρ ο σ θ ῆ κ α ι ε ἰ ς τ ὰ Σ τ ο ι χ ε ῖ α τ ο ῦ Ε ὐ κ λ ε ί δ ο υ, ὅπου, μεταξὺ ἄλλων, προέχουν αἱ θεωρίαι ἐπὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν γωνιῶν

ἀστεροειδοῦς πολυγώνου, ἀποτελοῦσαι φυσικὴν συνέχειαν τῶν ὅσων ἔγραψαν ἤδη ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ θέματος ὁ Campano (§ 168) καὶ ὁ Bradwardin (§ 174).

Περὶ τῶν ἄλλων μαθηματικῶν ἐρευνῶν τοῦ Regiomontano λαμβάνομεν γνῶσιν ἐκ τῆς ἀλληλογραφίας του μὲ ἄλλους ἐπιστήμονας τῆς ἐποχῆς του. Ἀναφέρομεν πρὸ πάντων τὸ ἀκόλουθον πρόβλημα μεγίστου. Δοθέντος (σχ. 32) τοῦ κατακορύφου ἱστοῦ AB, νὰ προσδιορισθῇ ἐπὶ τοῦ ἐδάφους OC ἕνα σημεῖον X, ἀπὸ τοῦ ὁποίου ὁ ἱστὸς νὰ φαίνεται ὑπὸ τὴν μεγίστην γωνίαν.



Σχ. 32

Εἶναι τὸ πρῶτον πρόβλημα τοῦ εἴδους τούτου, ποὺ ἐμφανίζεται εἰς τὴν μαθηματικὴν γραμματείαν μετὰ τὸν Ἀπολλώνιον, λύεται δ' ἁπλούστατα διὰ κατασκευῆς τῆς περιφερείας τῆς διερχομένης διὰ τῶν σημείων A καὶ B καὶ ἐφαπτομένης τῆς εὐθείας OC, τοῦ σημείου ἐπαφῆς X πληροῦντος τὴν ἐπιταχθεῖσαν συνθήκην.

Δὲν εἶναι μικροτέρας σπουδαιότητος τὸ ἀκόλουθον πρόβλημα τὸ ὁποῖον ἐπροτάθη ἀπὸ τὸν Regiomontano εἰς τὸν ἀστρονόμον Bianchini: Εἰς ἕνα τρίγωνον ABC μὲ πλευρὰς AB = 18, AC = 25, BC = 29, ν' ἀχθῇ εὐθεῖα AD ἀπὸ τῆς κορυφῆς εἰς τὴν βάσιν τοιαύτη, ὥστε νὰ πληροῦται ἡ σχέσις:

$$BD^2 + AD \cdot AB = AB^2.$$

Θέτοντες $BD = x$, καταλήγομεν μὲ στοιχειώδεις συλλογισμοὺς εἰς τὴν διτετράγωνον ἐξίσωσιν:

$$\frac{x^4}{324} + \frac{540}{29}x = 3x^2,$$

τῆς ὁποίας ὁ βαθμὸς πίπτει ἀμέσως εἰς τὸν τρίτον. Ὁ Regiomontano δὲν ἦτο εἰς θέσιν νὰ τὴν λύσῃ, παρετήρησεν ὅμως* ὅτι ἡ λύσις αὐτῆς ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὴν εὕρεσιν τῆς χορδῆς μιᾶς μοίρας (1°) γνωστῆς οὔσης τῆς χορδῆς τριῶν μοιρῶν (3°). Πράγματι, ἡ ἐν λόγῳ ἐξίσωσις δύναται νὰ μετασχηματισθῇ εἰς τὴν ἀκόλουθον:

$$(\text{χορδὴ } 1^\circ)^3 + (\text{χορδὴ } 3^\circ) = 3\,(\text{χορδὴ } 1^\circ).$$

Διὰ τοῦτο γράφει ὁ Regiomontano εἰς τὸν φίλον του: «Δῶσε μου τὴν εὐθεῖαν BD καὶ ἐγὼ σοῦ εὑρίσκω τὴν χορδὴν τοῦ τόξου 1°». Δὲν θὰ διαφύγῃ ἀσφαλῶς τῆς προσοχῆς τοῦ ἀναγνώστου ἡ στενωτάτη σχέσις ἡ ὑφισταμένη μεταξὺ τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως καὶ ἐκείνης, εἰς τὴν ὁποίαν ὁ Al-Biruni

* Εἰς τὴν προηγουμένην ἐξίσωσιν θέτοντες $x = 18y$ λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν, ἡ ὁποία χρησιμεύει εἰς τριχοτόμησιν τῆς γωνίας.

ἀνήγαγε (§ 148) τὴν ἔρευναν τῆς πλευρᾶς τοῦ κανονικοῦ ἐνναγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς δοθέντα κύκλον. Δὲν δυνάμεθα παρὰ ταῦτα νὰ παρασιωπήσωμεν τὸ γεγονὸς ὅτι ἐνῷ ὁ ἄραψ ἐπιστήμων ἐγνώριζε νὰ ὑπολογίζῃ κατὰ προσέγγισιν τὴν θετικὴν ρίζαν τῆς ἐξισώσεως, ὁ Regiomontano σταματᾷ εἰς τὴν εὑρεθεῖσαν ἐξίσωσιν. Θὰ ἦτο λοιπὸν δυνατὸν νὰ εἴπωμεν ὅτι ἡ ἀνατολικὴ μέθοδος λύσεως ἀριθμητικῶν ἐξισώσεων, τὴν ὁποίαν ἐγνώριζεν ὁ Λεονάρδος Πιζᾶνο (§ 165), δὲν ἐγένετο κοινὸν κτῆμα τῶν εὐρωπαίων ἐπιστημόνων ἐν γένει.

Μεταξὺ τῶν ἄλλων προβλημάτων ποὺ ἀπαντῶνται εἰς τὴν ἀλληλογραφίαν τοῦ Regiomontano, ἀναφέρομεν ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα μὲ ἀλγεβρικὴν διατύπωσιν ἐκφέρονται ὡς ἑξῆς :

1. $x + y + z = 240, \qquad 97x + 56y + 3z = 16047$
2. $17x + 15 = 13y + 11 = 10z + 3$
3. $23x + 12 = 17y + 7 = 10z + 3$
4. $x + y + z = 116, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 4624.$
5. Νὰ εὑρεθοῦν τρεῖς ἀριθμοὶ εἰς ἁρμονικὴν πρόοδον, ὁ ἐλάχιστος τῶν ὁποίων νὰ μὴ ὑπερβαίνῃ τὸν 500.000.
6. Νὰ εὑρεθοῦν τρία τετράγωνα εἰς ἀριθμητικὴν πρόοδον.
7. Νὰ εὑρεθοῦν τρία τετράγωνα εἰς ἀριθμητικὴν πρόοδον, τὸ μικρότερον τῶν ὁποίων νὰ μὴ ὑπερβαίνῃ τὸν 20.000.
8. Νὰ εὑρεθοῦν τρεῖς ἀκέραιοι ἀθροίσματος 214, τῶν ὁποίων τὰ τετράγωνα νὰ ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον.
9. Νὰ εὑρεθοῦν τέσσαρα τετράγωνα ἔχοντα ἄθροισμα τετράγωνον.
10. Νὰ εὑρεθοῦν 20 τετράγωνα μὲ ἄθροισμα τετράγωνον μεγαλύτερον τοῦ 300.000.

Τὰ πρῶτα τρία ἀνήκουν εἰς τύπους γνωστοὺς ἀπὸ μακροῦ. Τὸ πρῶτον πράγματι ἀνάγεται εἰς τὴν κατηγορίαν τῶν «προβλημάτων τῶν 100 πτηνῶν» ποὺ εἴδομεν εἰς τοὺς Κινέζους, τοὺς Ἄραβας καὶ ἀκόμη εἰς τὸ Liber Abbaci. Τὸ δεύτερον καὶ τρίτον ἀνάγονται εἰς τὴν ἔρευναν ἀριθμοῦ, ὅταν γνωρίζωμεν τὰ ὑπόλοιπα τούτου διαιρουμένου διὰ δεδομένων ἀριθμῶν (κινεζικὸς κανὼν ta yen, § 119). Μερικὰ ἄλλα θὰ ἔλεγε κανεὶς ὅτι ἐνεπνεύσθη ὁ Regiomontano ἀπὸ τὸ Liber quadratorum τοῦ Fibonacci. Τὰ προβλήματα 9 καὶ 10 ἀποδεικνύουν ὅτι ἠγνόει τὴν ἀνάλυσιν παντὸς ἀριθμοῦ εἰς τέσσαρα τετράγωνα, τὴν ὁποίαν εἶχεν ἤδη διδάξει ὁ Διόφαντος. Δὲν εἶναι πάντως βέβαιον, ἂν ἦτο πράγματι εἰς θέσιν νὰ λύσῃ ὅλα αὐτὰ τὰ προβλήματα, μολονότι ὁ τρόπος τῆς ἐκφράσεώς του δίδει τὴν ἐντύπωσιν ὅτι ἠδύνατο. Ἐν πάσῃ περιπτώσει δὲν εἶναι μικρῆς τιμῆς ἄξιος, διότι ἐφείλκυσε τὴν προσοχὴν

τῶν μελετητῶν ἐπὶ ζητημάτων, τὰ ὁποῖα ἡ ἔκταφὴ τοῦ ἔργου τοῦ μεγάλου ἀλεξανδρινοῦ ἐπρόκειτο νὰ ἐπαναφέρῃ πολὺ συντόμως εἰς τὴν ἡμερησίαν διάταξιν.

Ἐὰν στρέψωμεν τώρα τὸ βλέμμα εἰς τὸ μαθηματικὸν ἔργον, τὸ ὁποῖον συνετελέσθη εἰς τοὺς τρεῖς αἰῶνας ποὺ ἠκολούθησαν τὴν ἐμφάνισιν τῶν ἔργων τοῦ Fibonacci, δὲν θὰ δυσκολευθῶμεν ν' ἀναγνωρίσωμεν, ὅτι αἱ ρόδιναι ἐλπίδες, τὰς ὁποίας φυσικὸν ἦτο νὰ γεννήσουν τὰ ἔργα ἐκεῖνα, κατὰ μέγα μέρος διεψεύσθησαν, παρὰ τὴν ἐπιμέλειαν μὲ τὴν ὁποίαν ἤρχισαν τότε νὰ μελετῶνται τὰ μαθηματικὰ ἔργα.* Δύο μόνον κεφάλαια τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης ὑπέστησαν κατὰ τὴν ὑπ' ὄψει περίοδον σημαντικὰς βελτιώσεις : α) ἡ τέχνη τοῦ ἀριθμητικοῦ λογισμοῦ, χάρις εἰς τὴν τελικὴν ἐπικράτησιν τῶν ἰνδο-αραβικῶν ψηφίων ἔναντι τῶν ρωμαϊκῶν καὶ β) ἡ τριγωνομετρία, ὡς ἀποτέλεσμα μιᾶς ζωογόνου πνοῆς ἀέρος ἐρχομένης ἐξ Ἀνατολῶν, ἤτοι τῆς μεθοδικῆς ἀντικαταστάσεως τῶν χορδῶν τῶν κυκλικῶν τόξων ὑπὸ τῶν ἡμιτόνων. Χάρις εἰς τὴν καινοτομίαν αὐτὴν ἡ τριγωνομετρία ἀπέκτησε πράγματι τὴν ἀναγκαίαν δύναμιν ν' ἀνταποκριθῇ εἰς τοὺς πολλαπλοῦς ρόλους, τοὺς ὁποίους ἐπεφύλαττον δι' αὐτὴν τόσον τὰ καθαρὰ ὅσον καὶ τὰ ἐφηρμοσμένα μαθηματικά.

Ἀντιθέτως, ἡ γεωμετρία παρέμεινε στάσιμος, καὶ μάλιστα εἰς μίαν στάθμην πολὺ χαμηλοτέραν ἐκείνης, εἰς τὴν ὁποίαν εἶχεν ἀρθῆ ὑπὸ τῶν Ἑλλήνων καὶ τῶν Ἀράβων. Διὰ ν' ἀποσπασθῇ ἀπὸ τὴν κατάστασιν τῆς νωχελείας καὶ τοῦ ληθάργου εἰς τὴν ὁποίαν εὑρίσκετο, δὲν ἐπέδρασαν ἰδέαι καθαρῶς θεωρητικοῦ χαρακτῆρος, ἀλλὰ κυρίως ἡ γοητεία νέων σπουδαίων ἐφαρμογῶν, περὶ τῆς ἐμφανίσεως τῶν ὁποίων θὰ κάμωμεν ἀμέσως λόγον εἰς τὸ ἑπόμενον κεφάλαιον.

* Ἀπόδειξις τῆς ἐπιμελείας αὐτῆς περὶ τὴν μελέτην τῶν μαθηματικῶν παρέχεται ἀπὸ ἕνα ὅμιλον Ἑβραίων, ποὺ ἔζησαν εἰς Lombardo - Veneto διαρκοῦντος τοῦ XV αἰῶνος, καὶ οἱ ὁποῖοι εὕρισκον εἰς τὴν ἤρεμον θεώρησιν τῶν ἐπιστημονικῶν ἀληθειῶν κάποιαν ἀνακούφισιν εἰς τὰς διώξεις, τῶν ὁποίων θύματα ἔπιπτον οἱ ὁμόθρησκοι. Ὡς ἀντιπροσωπευτικὸν πρόσωπον τῆς ὁμάδος δυνάμεθα ν' ἀναφέρωμεν τὸ μοναδικόν, τοῦ ὁποίου διεσώθη τὸ ὄνομα, Simon Motot. Αἱ λεπτομέρειαι τῆς ζωῆς του μᾶς εἶναι ἄγνωστοι, δύο ἔργα του ὅμως, εἶχον τὴν τιμὴν νὰ μεταφρασθοῦν καὶ νὰ ἐκτυπωθοῦν : 1. Un trattato di algebra (Μαθήματα ἀλγέβρας), στηριζόμενον ἐπὶ τῆς ἰταλικῆς μετα-λεοναρδικῆς βιβλιογραφίας, καὶ μὴ παρουσιάζον πρωτοτυπίαν. 2. Un opera sugli asintoti (Πραγματεία περὶ ἀσυμπτώτων), τὸ ὁποῖον ὁ συγγραφεὺς ἔχει ἐμπνευσθῆ ἀπὸ τὸ δόγμα τοῦ ἰουδαίου φιλοσόφου Μαϊμονίδου (1135 - 1204) «πᾶν ὅτι δυνάμεθα νὰ φαντασθῶμεν εἶναι δυνατόν, ὅ,τι δὲν δυνάμεθα νὰ φαντασθῶμεν εἶναι ἀδύνατον» καὶ τοῦ ὁποίου σκοπεῖ ν' ἀποδείξῃ τὴν ἀλήθειαν, στηριζόμενος εἰς τὸ παράδειγμα τῶν ἀσυμπτώτων μιᾶς ὑπερβολῆς. Αὐτὸ ἀποδεικνύει πάντως ὅτι ἀπὸ τοῦ XV αἰῶνος αἱ θεωρίαι τοῦ Ἀπολλωνίου ἤρχισαν νὰ γίνωνται πάλιν γνωσταὶ εἰς τὴν Εὐρώπην.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XIV

Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΕΙΣ ΒΟΗΘΕΙΑΝ ΤΗΣ ΖΩΓΡΑΦΙΚΗΣ

185. Ἡ ἐπιθυμία νὰ διαχωρίσουν τὴν ἀντικειμενικὴν πραγματικότητα ἀπὸ τὰς φαινομενικάς της ἐκδηλώσεις εἰς τὰ οὐράνια φαινόμενα ὤθησε τοὺς Ἕλληνας (ἴσως δὲ καὶ κάποιους ἀρχαιοτέρους πολιτισμοὺς) εἰς τὴν σπουδὴν τῶν φωτεινῶν φαινομένων. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἔλαβεν ἀρχὴν μία σειρὰ παρατηρήσεων καὶ ἐρευνῶν, τῶν ὁποίων τ' ἀποτελέσματα ἀποτελοῦν τὴν ὀπτικὴν τῶν ἀρχαίων καὶ τῆς ὁποίας ἡ αὐθεντικωτέρα σωζομένη ἔκθεσις ὀφείλεται εἰς τὸν Εὐκλείδη.

Εἰς τὸ ἔργον τοῦτο ὁ μέγας ἀλεξανδρινὸς γεωμέτρης, ἐκκινῶν ἀπὸ τὴν ἀρχὴν ὅτι τὸ φῶς διαδίδεται εὐθυγράμμως, ἀποκαθιστᾷ μίαν σειρὰν θεωρημάτων, τὰ ὁποῖα καὶ σήμερον θεωροῦνται ὡς οὐσιώδη καὶ ἀπαραίτητα εἰς οἱανδήποτε μαθηματικὴν πραγματείαν περὶ τοῦ φωτός. Μεταξὺ τῶν προτάσεων, τὰς ὁποίας ἀπέδειξεν ὁ Εὐκλείδης περιοριζόμεθα ν' ἀναφέρωμεν ἐκείνην, ἡ ὁποία παρέχει ἐξήγησιν τοῦ γεγονότος ὅτι εὐθεῖαι παράλληλοι φαίνονται συντρέχουσαι. Ἰσχυρὸν κίνητρον εἰς αὐτὰς τὰς ἐρεύνας ὑπῆρξε διὰ τοὺς Ἕλληνας ἡ στιγμή, καθ' ἣν ἐνεπλάκησαν εἰς τὸ πρόβλημα τῆς διὰ χρωμάτων διακοσμήσεως τῶν σκηνῶν εἰς τὰ θέατρα, διακοσμήσεως ἡ ὁποία ἔπρεπε νὰ παράγῃ εἰς τοὺς θεατὰς μίαν ψευδαίσθησιν πραγματικότητος. Διετηρήθη δὲ πράγματι ἡ μνήμη τοιούτων σοβαρῶν προσπαθειῶν πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος, αἱ ὁποῖαι ἀνάγονται εἰς τὴν ἐποχὴν (V αἰὼν π.Χ.), καθ' ἣν ἤρχισαν ν' ἀναβιβάζωνται εἰς τὰ θέατρα αἱ τραγῳδίαι τοῦ Αἰσχύλου.

Ἔρευναι πρὸς αὐτὴν τὴν κατεύθυνσιν ἐξηκολούθησαν καὶ κατὰ τὴν Ρωμαϊκὴν περίοδον, ἀκόμη δὲ κατὰ τὸν σκοτεινὸν Μεσαίωνα. Ἐδημιουργήθη τότε εἰς τὴν Εὐρώπην ὁ κλάδος, ὁ ὁποῖος ὠνομάσθη «Προοπτική», ἀφ' ἧς μετεφράσθη εἰς τὴν γλῶσσαν τοῦ Κικέρωνος μία σχετικὴ πραγματεία τοῦ Ibn Aitham (§ 147) ἢ Alhazen, κατὰ τὴν παραδεδεγμένην ἔκτοτε γραφὴν τοῦ ὀνόματος εἰς τὴν Εὐρώπην. Ἡ ἐν λόγῳ μετάφρασις, ὀφειλομένη πιθανῶς εἰς τὸν Γεράρδον τῆς Κρεμώνης, εἶχε μεγάλην διάδοσιν εὐθὺς ὡς ἐξετυπώθη (1572) ἐπιμελείᾳ τοῦ γάλλου μαθηματικοῦ P. de la Ramée (ἢ ἄλλως Ramus). Ἐδῶ ἀπαντᾶται διὰ πρώτην φορὰν ἡ γόνιμος ἀρχή,

κατὰ τὴν ὁποίαν ὁ ὀφθαλμὸς τοῦ παρατηρητοῦ ἀποτελεῖ τὸ κέντρον δέσμης φωτεινῶν ἀκτίνων ἐκπεμπομένων ἀπὸ τὰ διάφορα σημεῖα τοῦ θεωρουμένου σώματος.

Ἡ σημασία τῆς προοπτικῆς, ἀκόμη καὶ ὑπὸ τὴν καθαρῶς θεωρητικήν της μορφήν, ἐγένετο κατόπιν βαθμηδὸν ἀντιληπτή, ὅπως ἀποδεικνύεται ἐκ τοῦ γεγονότος ὅτι ἀπαντᾶται ἔκτοτε εἰς τὴν διδακτέαν ὕλην τῶν πανεπιστημιακῶν προγραμμάτων τοῦ Μεσαίωνος. Ὁ John Peckham (1242 - 1292), ἀρχιεπίσκοπος τοῦ Canterbury, ἔκρινε σκόπιμον νὰ συγγράψῃ μιὰν νέαν πραγματείαν προοπτικῆς πρὸς χρῆσιν τῶν ἀγγλικῶν σχολείων, ἡ ὁποία ὑπέστη μετ' ὀλίγον ἕνα νέον μετασχηματισμὸν ὑπὸ τοῦ συμπατριώτου του καὶ γνωστοῦ μας ἤδη T. Bradwardin.

Εἰς ἀναλόγους σκοποὺς ἀπέβλεπε καὶ τὸ ἔργον Perspectiva Vitellionis, ὀφειλόμενον εἰς ἕνα πολωνὸν πεπαιδευμένον τοῦ XIV αἰῶνος, Witelo, τὸ ὁποῖον ἐσημείωσε μεγάλην ἐπιτυχίαν, μολονότι δὲν ἦτο παρὰ μία διασκευὴ τοῦ ἔργου τοῦ Alhazen, καλυτέρα ὅμως ἀπὸ μίαν πρωτότυπον ἐπεξεργασίαν τοῦ θέματος.

186. Μὲ τὴν πάροδον τοῦ χρόνου καὶ τὴν ἐξέλιξιν τῶν ἰδεῶν ἡ λέξις «προοπτικὴ» μετέβαλλε βαθμηδὸν σημασίας. Ἐμπεδωθείσης τῆς ἰδέας, ὅτι ἡ ὅρασις λειτουργεῖ μέσῳ φωτεινῶν ἀκτίνων ἐκπορευομένων ἐξ ὅλων τῶν σημείων τοῦ διαστήματος καὶ συγκλινουσῶν εἰς τὸν ὀφθαλμὸν τοῦ παρατηρητοῦ, ἡ κόρη τοῦ ὀφθαλμοῦ ἐθεωρήθη ὡς κέντρον ἑνὸς «ὀπτικοῦ κώνου» ἤ, ἀκριβέστερον, μιᾶς στερεᾶς δέσμης ἀκτίνων.

Ἂς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι μεταξὺ τοῦ ὀφθαλμοῦ καὶ τοῦ ἀντικειμένου παρεμβάλλεται μία ἐπιφάνεια, ὑποτιθεμένη χάριν ἁπλότητος ἐπίπεδος, καλουμένη «πίναξ», ἐπὶ τοῦ ὁποίου λαμβάνονται ὅλα τὰ σημεῖα τομῆς τούτου μεθ' ἑκάστης ἀκτῖνος διατηροῦντα μάλιστα τὸ χρῶμα τῆς τελευταίας. Θὰ παραχθῇ τότε ἐπὶ τοῦ πίνακος ἕνα ποικιλόχρωμον σύνολον φυσικῶν σημείων, τὸ ὁποῖον θὰ προκαλέσῃ εἰς τὸν παρατηρητὴν τὴν ἰδίαν ἀκριβῶς ἐντύπωσιν οἵαν καὶ τὸ παρατηρούμενον ἀντικείμενον.

Ἀκριβῶς ἡ κατασκευὴ τοῦ περιγράμματος τοῦ ἐν λόγῳ σχήματος θεωρεῖται σήμερον ὡς σκοπὸς τῆς προοπτικῆς, ἡ ὁποία ἀποτελεῖ ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει τὸ θεωρητικὸν θεμέλιον τῆς ζωγραφικῆς. Τίποτε λοιπὸν τὸ παράδοξον, ἐὰν διάσημοι ἰταλοὶ ζωγράφοι ἐπεδόθησαν μὲ ἐπιμέλειαν εἰς τὴν καλλιέργειαν τοῦ κλάδου αὐτοῦ τῆς γεωμετρίας. Ὑπῆρξαν δὲ τούτων μαθηταὶ καὶ πέραν τῶν Ἄλπεων, διαπρέψαντες εἰς τὴν χρῆσιν τοῦ χρωστῆρος. Καθῆκον μας εἶναι νὰ κάμωμεν λόγον διὰ τοὺς μὲν καὶ τοὺς δέ.

Εἰς τὸν Filippo Brunelleschi, τὸν κορυφαῖον ἀρχιτέκτονα τῆς Ἀναγεννήσεως (γεννηθέντα εἰς Φλωρεντίαν τὸ 1377, ἀποθανόντα ἐκεῖ τὸ 1446) ἀνήκει ἡ τιμὴ ὅτι ἐκαλλιέργησε μὲ ζῆλον τὴν προοπτικὴν καὶ εἰδικώτερον

εἰσήγαγε τὴν σταθερὰν χρῆσιν τοῦ «ὀφθαλμοῦ» (ὀπτικὸν κέντρον) καὶ τοῦ «πίνακος» (προβολικὸν ἐπίπεδον). Ἀνάλογος τρόπος τοῦ σκέπτεσθαι ἀπαντᾶται καὶ εἰς τὸν μαθητήν του Paolo di Doni ἢ Uccello (1397 - 1472). Ὀλίγον ἔπειτα ὁ Leon Battista Alberti (λατινικὰ Albertus, γεννηθεὶς εἰς Γένοβαν τὴν 14ην ἢ 18ην Φεβρ. 1404, ἀποθανὼν εἰς Ρώμην τὸ 1472) εἰσήγαγε τὴν βασικὴν ἔννοιαν τῆς «προοπτικῆς σώματος», ὡς τομῆς τοῦ «ὀπτικοῦ κώνου» ὑπὸ τοῦ «πίνακος» καὶ τὰς πρώτας νύξεις περὶ τῶν ἰσοφώτων γραμμῶν, ἡ μεθοδικὴ θεώρησις τῶν ὁποίων ἀποτελεῖ τὴν βάσιν τῆς συγχρόνου σκιαγραφίας.

Ἀλλ' ὁ Alberti δὲν ἦτο μόνον μέγας καλλιτέχνης· ὑπῆρξεν ἐπίσης ἕνας ἀπὸ τοὺς κορυφαίους διανοουμένους τῆς Ἀναγεννήσεως ποὺ εἶχον ἐναγκαλισθῆ τὸ σύνολον τῶν γνώσεων τῆς ἐποχῆς ἐκείνης. Τὸ ἔργον του Della statua (Περὶ τοῦ ἀνδριάντος) μᾶς τὸν παρουσιάζει ὡς ἔμπειρον χειριστὴν τῆς μαρμαρογλυφίδος, τὸ ἄλλο ἔργον του Gli elementi della pittura (Τὰ στοιχεῖα τῆς ζωγραφικῆς) πιστοποιεῖ τὰς ἐπιδόσεις του εἰς μίαν ἄλλην τῶν μεγάλων τεχνῶν, τὸ δὲ μέγα ἔργον του De arte edificatoria (Περὶ οἰκοδομικῆς τέχνης, Φλωρεντία 1485) τοῦ προσεκόμισε τοιαύτην φήμην, ὥστε ἕνας ποιητὴς τὸν ἐξεθείασε μὲ στίχους, ὅπως οἱ ἀκόλουθοι :

«Οὔτε μικρότερος τοῦ Εὐκλείδη εἶν' ὁ Ἀλβέρτος·
καὶ τὸν Βιτρούβιο ξεπέρασε· ὅποιος ἔργα
μεγάλα θέλει πολὺ καὶ δυνατὰ νὰ στήσῃ
τὰ μνημεῖα τοῦ Μπατίστα μας ξανὰ ἂς μελετήσῃ».

Δὲν ἀρκοῦν αὐτά. Μὲ ἕνα ἄλλο ἔργον του Ludi matematici (Μαθηματικοὶ κόμβοι) παρέχει δείγματα τοῦ ἐνδιαφέροντός του διὰ τὴν καθαρὰν γεωμετρίαν. Τὸ ἔργον ἀφιεροῦται εἰς τὸν πρίγκηπα Meladusio, ἀδελφὸν τοῦ Leonello d' Este μαρκησίου τῆς Ferrara, ὁ ὁποῖος εἶχεν ἐκδηλώσει ἐνδιαφέρον νὰ μάθῃ τοὺς ἐφαρμοστέους κανόνας διὰ τὸν ἀναδασμὸν τῆς γῆς.

Οἱ κανόνες τοὺς ὁποίους ἐκθέτει ὁ Alberti δὲν εἶναι ἀκριβεῖς, οὔτε κἂν πρωτότυποι, ἀλλὰ δίδουν τὸ μέτρον τῶν γνώσεων τῆς ἐποχῆς του. Σημειώνομεν μεταξὺ τούτων μίαν μέθοδον ὑπολογισμοῦ τοῦ ἐμβαδοῦ F κυκλικοῦ τμήματος μέσῳ τῆς χορδῆς του 2a καὶ τοῦ βέλους b, ἡ ὁποία σήμερον θὰ διετυπώνετο μὲ τὸν ἑξῆς τύπον :

$$F = a\left(\frac{a^2+b^2}{2b} - b\right). \qquad (1)$$

Διὰ νὰ κρίνωμεν περὶ τοῦ βαθμοῦ τῆς ἐπιτυγχανομένης προσεγγίσεως ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν, ὅτι ἡ ἀκριβὴς ἔκφρασις τοῦ ἐμβαδοῦ κυκλικοῦ τμήματος, μὲ βάσιν 2a καὶ βέλος b, εἶναι :

$$F = \left(\frac{a^2+b^2}{2b}\right)^2 \text{τοξ ημ}\,\frac{2ab}{a^2+b^2} - \frac{a(a^2-b^2)}{2b}. \qquad (2)$$

Ὁ ἀφαιρετέος ὅρος εἶναι ταυτόσημος πρὸς τὴν ἔκφρασιν (1), ἐξ οὗ συνάγεται ἀμέσως τὸ ἐσφαλμένον αὐτῆς. Εἰς ἄλλην θέσιν ὁ Alberti διδάσκει τὴν μέτρησιν τοῦ ὕψους ἑνὸς πύργου ἢ τοῦ πλάτους ἑνὸς ποταμοῦ ἢ τοῦ βάθους ἑνὸς φρέατος ἢ τῆς περιμέτρου μιᾶς ἐκτάσεως. Ὁ τελευταῖος ἀπὸ τοὺς «κόμβους» ἀναφέρεται εἰς τὸ πρόβλημα τῆς ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους ἀνακαλύψεως τῆς νοθείας τοῦ στεφάνου τοῦ Ἱέρωνος. Τὸ ἔργον τοῦτο γενικῶς ὑπενθυμίζει περισσότερον ἐπίδρασιν τοῦ Ἥρωνος παρὰ τοῦ Εὐκλείδου.

Ἕνα σύντομον παράρτημα τοῦ ἰδίου ἔργου, περιλαμβάνει τὸν τετραγωνισμὸν τοῦ πρώτου ἐκ τῶν μηνίσκων τοῦ Ἱπποκράτους. Ὁ συγγραφεὺς τὸν ἐκθέτει ὡς ἐπιχείρημα διὰ τὴν ἀνασκευὴν τῆς γνώμης ἐκείνων, οἱ ὁποῖοι θεωροῦν ἀδύνατον τὸν τετραγωνισμὸν καμπυλογράμμων χωρίων περιοριζομένων ὑπὸ κυκλικῶν τόξων. Καὶ μέχρι τοῦ σημείου αὐτοῦ ἔχει δίκαιον. Παύει ὅμως νὰ τὸ ἔχῃ, ὅταν προσθέτῃ ὅτι, ὅπως εὑρέθη τρόπος νὰ τετραγωνισθῇ ὁ μηνίσκος, κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον εἶναι δυνατὸν νὰ τετραγωνισθῇ καὶ ὁ κύκλος.

187. Κατὰ χρονολογικὴν σειράν, τὸν L.B. Alberti ἀκολουθεῖ ὁ Pier de Franceschi ἤ, ὅπως γράφεται συνήθως, della Francesca (γεννηθεὶς εἰς S. Sepolcro τὸ 1406 ἢ 1416, ἀποθανὼν τὴν 13ην Ὀκτ. 1492), «μονάρχης τῆς ζωγραφικῆς τῶν χρόνων μας», ὅπως τὸν ἀπεκάλεσεν ὁ Luca Pacioli. Ἔγραψε, πιθανώτατα κατὰ τὴν δεκαετίαν 1470 - 1480, μίαν πλήρη πραγματείαν προοπτικῆς ὑπὸ τὸν τίτλον De perspectiva pingendi (Ἡ προοπτικὴ εἰς τὴν ζωγραφικήν), ἡ ὁποία ὑπῆρξε μοναδικὴ εἰς τὴν Ἰταλίαν καὶ τὸν ὑπόλοιπον κόσμον, διὰ τὴν τιμὴν τῆς ἐξακολουθητικῆς ἀνατυπώσεώς της μέχρι καὶ σήμερον, μολονότι τὸ χειρόγραφον ὑπέστη παντὸς εἴδους ἐκμεταλλεύσεις καὶ κακοποιήσεις. Διὰ τὴν συγγραφὴν ἑνὸς τοιούτου ἔργου ὁ διάσημος ζωγράφος ἦτο θαυμασίως παρεσκευασμένος, διότι ἀπὸ μικρᾶς ἡλικίας εἶχεν ἐπιδοθῆ εἰς τὴν σπουδὴν τῆς γεωμετρίας, ὁ δὲ Vasari δὲν ἐδίστασε νὰ τὸν ἀποκαλέσει «δεινὸν εἰς τὰς δυσκολίας τῶν κανονικῶν στερεῶν, εἰς τὴν ἀριθμητικὴν καὶ τὴν γεωμετρίαν», προσθέτων μάλιστα ὅτι «τὰ βιβλία ἀσφαλῶς τοῦ προσεπόρισαν τὸ ὄνομα τοῦ καλυτέρου γεωμέτρου τῆς ἐποχῆς μας».

Εἰς τὸ προαναφερθὲν ἔργον ὁ συγγραφεὺς ἐφήρμοσε καὶ ἀνέπτυξε τὴν ὑπὸ τοῦ Alberti εἰσαχθεῖσαν ἔννοιαν τῆς «προοπτικῆς ἑνὸς σώματος». Ἐχρησιμοποίησεν, ἔστω καὶ ὑπὸ ἐμβρυώδη μορφήν, μερικὰς μεθόδους αἱ ὁποῖαι μόνον εἰς τὴν σύγχρονον παραστατικὴν γεωμετρίαν εὗρον τὴν πλήρη ἀνάπτυξίν των (μᾶς ἀρκεῖ νὰ φέρωμεν ὡς παράδειγμα τὴν χρῆσιν περιστροφῶν τῶν σχημάτων τοῦ χώρου πρὸς διευκόλυνσιν τῆς χαράξεως τῶν προοπτικῶν των) καὶ τέλος —ἴσως πρῶτος— ἐξεμεταλλεύθη,

εἰς τὴν κατασκευὴν τῆς προοπτικῆς ἑνὸς στερεοῦ, τὰς ἀντιστοίχους προβολὰς μιᾶς σειρᾶς ἐπιπέδων τομῶν. Κατ' ἀκολουθίαν, προτοῦ ἐμπεδωθῇ ἡ γενικὴ ἔννοια τῆς περιβαλλούσης ἑνὸς συστήματος εὐθειῶν τοῦ ἐπιπέδου, εἶδεν ὅτι ὅλαι αἱ οὕτω προκύπτουσαι καμπύλαι εἶναι ἐφαπτόμεναι ὡρισμένης γραμμῆς, ἡ ὁποία κατόπιν ἀνεγνωρίσθη ὡς προβολὴ τῆς φαινομένης περιμέτρου τοῦ δοθέντος στερεοῦ.

Διὰ νὰ βεβαιώσωμεν κατὰ πόσον ἦτο σύμφωνος πρὸς τὴν ἀλήθειαν ἡ ὑπὸ τοῦ Vasari διατυπωθεῖσα κρίσις ὡς πρὸς τὴν μαθηματικὴν ἱκανότητα τοῦ Pier della Francesca, θὰ ρίψωμεν ἕνα βλέμμα εἰς τὸ ἔργον του De corporibus regularibus (Περὶ κανονικῶν στερεῶν), τὸ ὁποῖον, ἀφοῦ παρέμεινεν ἀνέκδοτον μέχρι τοῦ 1915, μετεφράσθη εἰς τὴν ἰταλικὴν ὑπὸ τοῦ Luca Pacioli καὶ ἐδημοσιεύθη ὡς ἰδικόν του ἔργον ὑπὸ τὸν τίτλον Divina proporzione (Θεία ἀναλογία).

Τὰ προβλήματα, ποὺ περιέχονται εἰς τὸ βιβλίον αὐτὸ ἀφοροῦν πολύγωνα καὶ πολύεδρα, σχήματα ἐπίπεδα περιβαλλόμενα ὑπὸ εὐθειῶν καὶ περιφερειῶν καὶ σχήματα στερεὰ περιοριζόμενα ὑπὸ ἐπιπέδων καὶ σφαιρῶν. Σκοπὸς τούτων εἶναι ἡ ἐπὶ τῇ βάσει ἀριθμητικῶν δεδομένων διεξαγωγὴ ὑπολογισμῶν πρὸς ἐκτίμησιν μηκῶν, ἐμβαδῶν καὶ ὄγκων. Εὑρισκόμεθα λοιπὸν καὶ πάλιν ἐνώπιον ἑνὸς μιμητοῦ τοῦ Ἥρωνος μᾶλλον παρὰ ἐνώπιον ἑνὸς μαθητοῦ τοῦ Εὐκλείδου.

Διὰ τὴν λύσιν τοιούτων προβλημάτων ἀρκοῦν συχνά, ἐκτὸς τῆς γεωμετρικῆς θεωρίας, ἁπλαῖ ἀριθμητικαὶ πράξεις, ἀλλ' εἰς ἀρκετὰ μεγάλον ἀριθμὸν περιπτώσεων εἶναι ἀνάγκη ν' ἀνατρέξωμεν εἰς ἐξισώσεις πρώτου ἢ δευτέρου βαθμοῦ. Δὲν ὑπάρχει καμμία ἔνδειξις, ἐπιτρέπουσα ν' ἀνιχνεύσωμεν τὰς πηγάς, ἐκ τῶν ὁποίων ἤντλησεν ὁ συγγραφεύς, διότι, ἐκτὸς τοῦ ὀνόματος τοῦ Εὐκλείδου, οὐδὲν ἄλλο ἀναφέρεται.

Παρὰ ταῦτα μία προσεκτικὴ ἀνάγνωσις ἄγει εἰς τὸ συμπέρασμα, ὅτι δὲν ἦσαν ἄγνωστα εἰς τὸν συγγραφέα μερικὰ ἔργα τοῦ Ἀρχιμήδους. Ἀρκοῦν νὰ τὸ ἀποδείξουν αἱ θεωρίαι, τὰς ὁποίας ἀναπτύσσει περὶ τῶν πέντε ἐκ τῶν δεκατριῶν ἡμι-κανονικῶν πολυέδρων. Σημειοῦται ἀκόμη ἡ παρουσία τοῦ στερεοῦ τοῦ γεννωμένου ἐκ τῆς ἀλληλοτομίας δύο ἴσων κυκλικῶν κυλίνδρων, τεμνομένων κατ' ἄξονα ὀρθογωνίως, τοῦ ὁποίου στερεοῦ τὸν ὄγκον εἶχεν ὑπολογίσει ἤδη ὁ Ἀρχιμήδης εἰς τὸ βιβλίον του «Ἡ Ἔ φ ο δ ο ς» (§ 43). Μερικοὶ διετύπωσαν τὴν γνώμην ὅτι ἐνδέχεται νὰ πρόκειται περὶ τυχαίας συμπτώσεως.

Δὲν δυνάμεθα, οὔτε μᾶς ἐπιτρέπεται νὰ παρασιωπήσωμεν τὸ γεγονὸς ὅτι ἡ διάταξις τῆς ὕλης εἶναι τοιαύτη, ὥστε πολλὰ θὰ ἠδύνατο νὰ ἐπιθυμήσῃ κανείς. Ἡ πρώτη ἐντύπωσις εἶναι ὅτι πρόκειται περὶ μιᾶς συλλογῆς προβλημάτων ὑπαγορευθέντων κατὰ τύχην εἰς τὸν λύτην καὶ τῶν ὁποίων ἐκεῖνος ἐκράτησεν ἁπλῶς σημείωσιν πρὸς διαφύλαξιν τούτων εἰς τὴν

μνήμην του. Προλαμβάνοντες τὰ ὅσα πρόκειται ν' ἀναπτύξωμεν εἰς τὸ προσεχὲς Κεφάλαιον, σημειοῦμεν ὅτι ὁ Luca Pacioli, μεταφράζων, δὲν ἐμερίμνησεν ἢ δὲν ἠδυνήθη νὰ ἐπιφέρῃ μίαν λογικὴν ἀνακατάταξιν τοῦ περιεχομένου.

188. Τελευταῖος κατὰ χρονολογικὴν σειράν, ἀλλὰ πρῶτος ὡς πρὸς τὴν δόξαν καὶ τὸ πνευματικὸν ἀνάστημα, μεταξὺ ὅλων τούτων τῶν ἰταλῶν καλλιτεχνῶν ἐπιστημόνων, ἔρχεται ὁ Leonardo da Vinci (γεννηθεὶς εἰς Τοσκάνην τὸ 1452, ἀποθανὼν εἰς Γαλλίαν τὴν 2αν Μαΐου 1519).

Τὸ ἔργον Trattato della pittura (Πραγματεία περὶ ζωγραφικῆς), τὸ ὁποῖον ἐδημοσιεύθη μὲ τὸ ὄνομά του, δὲν εἶναι ἔργον ὀργανικὸν συντεταγμένον ὑπὸ τοῦ ἰδίου, ἀλλὰ συμπίλημα ἀπὸ διάφορα ὑλικά, συγκεντρωθέντα χωρὶς νὰ ληφθῇ ὑπ' ὄψει κάποιο κριτήριον, τῶν ὁποίων ἡ πατρότης ἀνήκει κατὰ τεκμήριον εἰς τὸν διάσημον δημιουργὸν τῆς Gioconda. Προκύπτει ὅμως ἐξ αὐτοῦ μία ἄποψις, καὶ εἶναι ἰδέα προσωπικὴ τοῦ Leonardo, ὅτι δηλαδὴ εἶναι ἀνάγκη ὁ ζωγράφος νὰ διαθέτῃ πλουσίας ἀποσκευὰς ἐπιστημονικῶν γνώσεων. «Μελέτα πρῶτα τὴν ἐπιστήμην καὶ κατόπιν ἐπιδίδου εἰς τὴν πρακτικὴν τὴν ἀπορρέουσαν ἐξ αὐτῆς τῆς ἐπιστήμης» εἰσηγεῖτο εἰς τοὺς νέους ζωγράφους. Καὶ ὑπερθεματίζων προσέθετε: «Ἐκεῖνοι οἱ ὁποῖοι κατελήφθησαν ἀπὸ τὸν ἔρωτα τῆς πράξεως, χωρὶς τὴν διάνοιαν ἢ καλύτερα τὴν ἐπιστήμην, εἶναι ὅπως οἱ πλοίαρχοι οἱ ἀνοιγόμενοι εἰς τὸ πέλαγος ἐπάνω εἰς ἕνα πλοῖον, χωρὶς πηδάλιον ἢ πυξίδα, οἱ ὁποῖοι διὰ τοῦτο δὲν ἔχουν ἐπίγνωσιν ποῦ κατευθύνονται». Εἰδικώτερα: «Ἡ πρακτικὴ πρέπει πάντοτε νὰ στηρίζεται ἐπάνω εἰς μίαν καλὴν θεωρίαν, τῆς ὁποίας θύρα καὶ ὁδηγὸς εἶναι ἡ προοπτική. Ἡ προοπτικὴ εἶναι ὁ χαλινὸς καὶ τὸ πηδάλιον τῆς ζωγραφικῆς».

Ἀσφαλῶς δὲν ὑπῆρχε κανεὶς ἁρμοδιώτερος τοῦ Leonardo νὰ γράψῃ ἕνα ἐγχειρίδιον προοπτικῆς, εἰς τὸ ὁποῖον ν' ἀποδίδεται ἴσος σεβασμὸς πρὸς τὰς ἀπαιτήσεις τῆς θεωρίας καὶ τὰς ἀνάγκας τῆς πράξεως. Ποῖος ὅμως ἠδύνατο νὰ δαμάσῃ τὴν ἀνήσυχον μεγαλοφυΐαν του, ἡ ὁποία ἠρκεῖτο μόνον εἰς ἐκτυφλωτικὰς ἀστραπὰς μεγαλειωδῶν συλλήψεων, ἀδιαφοροῦσα διὰ τὴν ἀξίαν τῆς τετελεσμένης δημιουργίας;

Ἐκτὸς ὅμως τῆς Προοπτικῆς, τὴν ὁποίαν ἐμελέτησε κατὰ βάθος, ἐκτὸς τῆς Μηχανικῆς, τὴν ὁποίαν ἐχαρακτήρισεν ὡς «παράδεισον τῶν μαθηματικῶν», ἠσχολήθη ἄραγε ὁ Leonardo καρποφόρως καὶ μὲ τὰς ἐπιστήμας, τῶν ὁποίων γράφομεν τὴν ἱστορίαν; Δὲν εἴμεθα εἰς θέσιν νὰ δώσωμεν σήμερον ὁριστικὴν ἀπάντησιν. Τοῦτο θὰ καταστῇ δυνατὸν μόνον, ὅταν ὁλοκληρωθῇ ἡ ἔκδοσις ὅλων τῶν χειρογράφων του. Σήμερον τοῦτο ἠμπορεῖ νὰ φαίνεται ἀμφίβολον, διότι αἱ γεωμετρικαὶ θεωρίαι καὶ αἱ ἀκριβεῖς ἢ προσεγγιστικαὶ γεωμετρικαὶ κατασκευαί, αἱ ὁποῖαι ἀνευρέθησαν μέχρι τῆς στιγμῆς εἰς

τὸν περίφημον Ἀτλαντικὸν Κώδικα (Codex atlanticus) καὶ εἰς τὰ λοιπὰ χειρόγραφα, ποὺ ἐδόθησαν μέχρι τοῦδε εἰς τὸν τύπον, δὲν ἀρκοῦν, ἀκόμη καὶ ἂν ἦσαν ὅλαι πρωτότυποι, νὰ τοποθετήσουν τὸν Leonardo μεταξὺ ἐκείνων, οἱ ὁποῖοι προσέθεσαν κάποιαν σελίδα εἰς τὴν γεωμετρίαν, ποὺ ἐκληρονομήσαμεν ἀπὸ τοὺς ἀρχαίους Ἕλληνας (τὴν μόνην γνωστὴν ἐπὶ τῆς ἐποχῆς του).

Ἐπὶ πλέον ἡ ἰδέα τὴν ὁποίαν ἐξεδήλωσε πρὸς εὕρεσιν τοῦ μήκους τῆς περιφερείας διὰ κυλίσεως αὐτῆς ἐν εἴδει τροχοῦ ἐφ' ἑνὸς εὐθυγράμμου ἄξονος ἐπιβεβαιώνει τὴν γνώμην ὅτι ὁ Leonardo ἐνδιεφέρθη διὰ τὴν γεωμετρίαν μόνον ἐν ᾧ μέτρῳ δύναται αὕτη νὰ προσφέρῃ βοήθειαν εἰς τοὺς ζωγράφους καὶ τοὺς ἀρχιτέκτονας. Τὸ συμπέρασμα τοῦτο εὑρίσκει ἐπιβεβαίωσιν εἰς ἐφαρμογάς, τὰς ὁποίας ἔκαμεν ὁ ἴδιος, μερικῶν μηνίσκων τοῦ Ἱπποκράτους (§ 25), προκειμένου νὰ τετραγωνίσῃ πολύπλοκα σχήματα, αἰσθητικῶς μὲν προκαλοῦντα τὸνθαυμασμόν, ἀλλ' ἐστερημένα ἐπιστημονικῆς ἀξίας. Εἰς τὸν προσανατολισμὸν τοῦ Leonardo πρὸς τὴν γεωμετρίαν θὰ ἐπέδρασε χωρὶς ἀμφιβολίαν ἡ γνωριμία του μὲ τὸν Luca Pacioli, μετὰ τοῦ ὁποίου ἔζησεν ἐπὶ ἔτος περίπου εἰς τὴν αὐλὴν τοῦ Λουδοβίκου Σφόρτσα (τοῦ λεγομένου Μαύρου, 1451 - 1508), εἰς τὸ Μιλᾶνον. Μεγάλως θὰ ὠφελήθη ἐπίσης ἀπὸ τοὺς δύο θαυμασίους τόμους (εἰς μέγα φύλλον) τοῦ σοφοῦ καὶ μαχητικοῦ φιλολόγου Λαυρεντίου Βάλλα (Laurentio Valla, 1406 - 1457), δημοσιευθέντας μετὰ θάνατον εἰς Βενετίαν τὸ 1501, ὑπὸ τὸν τίτλον De expectendis et fugiendis rebus opus, διότι περιελήφθησαν εἰς αὐτοὺς ἀποσπάσματα λατίνων καὶ ἑλλήνων συγγραφέων (ὅπως ὁ Βοήθιος, ὁ Ἥρων, ὁ Ἱπποκράτης ὁ Χῖος κλπ.), τὰ ὁποῖα δὲν εἶχον μέχρι τότε ἔλθει εἰς τὸ φῶς τῆς δημοσιότητος.

189. Ἡ τεραστία φήμη, τὴν ὁποίαν ἀπέκτησαν οἱ ἰταλοὶ ζωγράφοι τοῦ XV αἰῶνος εἰς ὁλόκληρον τὴν Εὐρώπην, συνετέλεσε κατὰ τὸν ἀποτελεσματικώτερον τρόπον εἰς τὸ νὰ καταδειχθῇ πόσον χρήσιμος ὑπῆρξεν ἡ σταθερὰ συνεργασία τέχνης καὶ ἐπιστήμης. Ἡ Ἰταλία κατέστη ὁ κύριος στόχος τῶν περιηγήσεων ὅλων ἐκείνων, οἱ ὁποῖοι ἐφλέγοντο ἀπὸ τὴν εὐγενῆ φιλοδοξίαν νὰ μιμηθοῦν τοὺς ἰταλοὺς καλλιτέχνας. Μεταξὺ τῶν πρώτων φιλοξενηθέντων ξένων ἦτο ὁ γερμανὸς Albert Dürer, ἀπὸ τοῦ θανάτου τοῦ ὁποίου συμπληροῦνται ἤδη 4 αἰῶνες ἀκριβῶς τὴν ἡμέραν, καθ' ἣν ἐγράφη αὐτὴ ἡ σελίς. Ἐγεννήθη εἰς τὴν Νυρεμβέργην τὴν 20ην Μαΐου 1471 καὶ ἀπέθανεν ἐκεῖ τὴν 6ην Ἀπριλίου 1528.

Εἰς τὸ πατρικὸν ἐργαστήριον ἐξέμαθε τὴν τέχνην τοῦ χρυσοχόου καὶ τὰ στοιχεῖα τοῦ σχεδίου. Κατόπιν ἔλαβεν ἀπὸ τὸν πατέρα του τὴν ἄδειαν ν' ἀφιερωθῇ τελείως εἰς τὴν ζωγραφικήν. Τριακονταετὴς μετέβη εἰς Ἰταλίαν, ὅπου τὸ βενετικὸν περιβάλλον ἤσκησεν ἐπ' αὐτοῦ ἀνεξάλειπτον ἐπίδρασιν.

Ἀπαντῶμεν εἰς τὸ Βιβλίον I πολλὰς κατασκευάς, ἀκριβεῖς ἢ ἐπαρκοῦς προσεγγίσεως, πολυγωνικῶν καὶ ἄλλων διακοσμητικῶν σχημάτων. Ἀπαντῶμεν τὸν ὁρισμὸν μιᾶς νέας κογχοειδοῦς καὶ τὴν περιγραφὴν ἑνὸς ὀργάνου καταλλήλου πρὸς χάραξίν της διὰ συνεχοῦς κινήσεως. Πρόκειται περὶ καμπύλης 4ου βαθμοῦ ἐμφανιζομένης ὑπὸ τρεῖς διακεκριμένας μορφάς*.

Δὲν ἀπουσιάζουν αἱ κωνικαί, οὔτε ἡ κυκλικὴ στερεὰ ἕλιξ, οὔτε ἄλλαι στερεαὶ καμπύλαι πολυπλοκώτεραι. Ὅ,τι ὅμως εἶναι ἄξιον θαυμασμοῦ καὶ ἐπαίνου διὰ τὸν συγγραφέα εἶναι ἡ μεγάλη οἰκειότης καὶ δεξιοτεχνία του εἰς τὴν χρῆσιν πρώτης καὶ δευτέρας προβολῆς πρὸς κατασκευὴν καὶ ἀπεικόνισιν τῶν γραμμῶν αὐτῶν. Μὲ τὸν Dürer ἡ μέθοδος αὐτὴ χάνει τὴν ἁπλῆν στατικὴν ὄψιν ποὺ εἶχεν εἰς τὸν Βιτρούβιον, διὰ νὰ λάβῃ τελικῶς τὴν δύναμιν ἐκείνην, χάρις εἰς τὴν ὁποίαν κατέστη ἱκανὴ ὄχι μόνον ν' ἀναπαριστᾷ τὰ σχήματα, ἀλλὰ νὰ ἐπιτρέπῃ τὴν ἐκτέλεσιν γεωμετρικῶν πράξεων ἐπὶ τούτων. Ἐὰν λοιπὸν ὁ Dürer ἐθεωρήθη ὡς πρῶτος γερμανὸς ποὺ ἔγραψε παραστατικὴν γεωμετρίαν (Gerhart : Geschichte der Matematik in Deutscland, σ. 26, Μόναχον, 1877), τοῦτο, ἂν δὲν περιέχῃ κάποιαν ὑπερβολήν, δὲν στερεῖται ἐν πάσῃ περιπτώσει βάσεως.

Ἡ οἰκειότης ἄλλωστε τοῦ Dürer μὲ αὐτὸ ποὺ ὀνομάζομεν σήμερον μέθοδον τοῦ Monge ἐπιβεβαιοῦται εἰς τὸ Βιβλίον IV τοῦ ἔργου του, ὅπου διδάσκεται ἡ κατασκευὴ καὶ ἡ παράστασις τῶν κανονικῶν καὶ ἡμικανονικῶν πολυέδρων, γίνεται προοπτικὴ των ἀπεικόνισις καὶ λαμβάνονται τὰ ἀναπτύγματά των ἐφ' ἑνὸς ἐπιπέδου.

Παρατρέχομεν τὰς κατασκευὰς ποὺ ἐκθέτει ὁ Dürer διὰ τὸν διπλασιασμὸν τοῦ κύβου, ἀφοῦ ἀπαντῶνται ἤδη εἰς τὸν Πλάτωνα καὶ τὸν Ἥρωνα, τονίζομεν δὲ μᾶλλον τὸ γεγονός, ὅτι ἐφήρμοσε τὴν μέθοδον τῶν δύο ὀρθῶν προβολῶν ἀκόμη καὶ εἰς τὴν χάραξιν τῆς ἐπὶ τῶν προβολικῶν ἐπιπέδων ἐρριμμένης σκιᾶς τῶν πολυέδρων.

Δὲν ὑπάρχει ἀμφιβολία ὅτι, ἐὰν ὁ Dürer εὕρισκε συνεχιστὰς καὶ μαθητάς, αἱ μέθοδοι παραστάσεως τῶν σχημάτων δὲν θὰ ἐβράδυνον τρεῖς περίπου ἀκόμη αἰῶνας ν' ἀποτελέσουν ἕνα νέον καὶ σημαντικὸν κεφάλαιον τῆς γενικῆς γεωμετρίας. Ἐκεῖνοι οἱ ὁποῖοι ἦλθον μετὰ τὸν Dürer — καὶ δὲν ἦσαν Γερμανοί, ἀλλὰ Ἰταλοί, δὲν ἦσαν δὲ οὔτε καλλιτέχναι, ἀλλὰ ἐπιστήμονες—ἐπεδόθησαν περισσότερον εἰς τὸ νὰ καταστήσουν τελειοτέρας τὰς μεθόδους τῆς προοπτικῆς. Περὶ αὐτῶν θ' ἀσχοληθῶμεν ἐν συνεχείᾳ, ἀφοῦ πρῶτον, ἀνατρέχοντες μερικὰς δεκαετίας, περιγράψωμεν τὰς προόδους τῆς ἐπιστήμης τῶν ἀριθμῶν, τὰς συντελεσθείσας πρὸ τῆς λήξεως τοῦ XV αἰῶνος.

---

* Βλ. G. LORIA : Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven, Λειψία 1912.

Ὁ Dürer ἀναφέρεται εἰς τὴν ἱστορίαν τῶν μαθηματικῶν πρῶτον, διότι θεωρεῖται δικαίως ὡς ὁ πρῶτος γερμανὸς ποὺ ἔδειξεν ὅτι γνωρίζει τὰ μαγικὰ τετράγωνα. Μαρτυρεῖται δὲ τοῦτο ἀπὸ τὸ χαρακτικόν του ἔργον Μ ε λ α γ χ ο λ ί α (1514), εἰς μίαν γωνίαν τοῦ ὁποίου εὑρίσκονται ἐντὸς πλαισίου οἱ ἀκόλουθοι ἀριθμοί :

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1.

Οὗτοι ἀποτελοῦν, ὅπως βλέπομεν, μαγικὸν τετράγωνον, τὸ ὁποῖον ἀπαντᾶται εἰς τὸν Μοσχόπουλον (§ 98) μὲ τὴν μόνην διαφοράν, ὅτι αἱ στῆλαι δευτέρα καὶ τρίτη ἔχουν ἐναλλαχθῆ.*

Τὸ αὐτὸ ἔτος τοῦ θανάτου τοῦ Dürer ἐδημοσιεύθη ἕνα ἔργον, τοῦ ὁποίου ἤδη κατέχομεν ἰταλικὴν μετάφρασιν, προωρισμένον διὰ τοὺς καλλιτέχνας, ἀλλὰ ἄξιον μνείας εἰς τὴν ἱστορίαν μας, ἐπειδὴ ἔχει ὡς σκοπὸν νὰ καθορίσῃ ἀριθμητικῶς τὰς ἀναλογίας τοῦ ἀνθρωπίνου σώματος. Οἱ Ἰταλοὶ εἶχον ἤδη ἀποκαταστήσῃ μίαν συμμαχίαν μεταξὺ τέχνης καὶ γεωμετρίας. Ὁ διάσημος γερμανὸς ζωγράφος, ἀκολουθῶν ἀνάλογον κατεύθυνσιν, ἑδραίωσεν ἄλλην συμμαχίαν τῆς τέχνης μὲ τὴν ἀριθμητικήν!

Ἀλλὰ τὸ ἔργον ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον κατὰ τὸν σαφέστερον τρόπον ἐπισφραγίζει τὴν ἀξίαν τοῦ Dürer ὡς μαθηματικοῦ εἶναι τὸ δημοσιευθὲν τὸ 1525 καὶ τιτλοφορούμενον εἰς τὴν λατινικήν του μετάφρασιν, τὴν ὁποίαν ἔχομεν πρὸ ὀφθαλμῶν, Institutionem geometricarum Libri quatuor (Μαθημάτων γεωμετρίας βιβλία τέσσαρα). Πρόκειται περὶ γεωμετρικῆς πραγματείας ἐντελῶς διαφόρου τῆς περιεχομένης εἰς τὰ Σ τ ο ι χ ε ῖ α τοῦ Εὐκλείδου, διότι σκοπὸς αὐτῆς εἶναι νὰ καταστήσῃ οἰκείους τοὺς καλλιτέχνας μὲ τὰς γεωμετρικὰς θεωρίας καὶ κατασκευάς. Ἐκ τῶν τεσσάρων βιβλίων τὸ I πραγματεύεται τὰς καμπύλας, τὸ II τὰς ἐπιφανείας, τὸ III τὰ στερεά, ἐνῷ τὸ IV συμπεριλαμβάνει ποικιλίαν ζητημάτων.

* Μία ἀναπαραγωγὴ τοῦ ἀνωτέρω χαρακτηριστικοῦ ἔργου τοῦ Dürer εὑρίσκεται εἰς τὸν XVI τόμον «Opere» τοῦ G. Carducci, ὡς εἰκονογράφησις ἑνὸς ἐδαφίου τοῦ ἔργου του Degli spiriti e delle forme nella poesia di Giacomo Leopardi—Περὶ τῶν πνευμάτων καὶ τῶν μορφῶν εἰς τὴν ποίησιν τοῦ G.L.—Ἐκεῖ ὁ μέγας ποιητὴς ὠνόμασεν «ἀστρονομικὸν πίνακα» τὸν πίνακα αὐτῶν τῶν ἀριθμῶν. Φαίνεται ἐκ πρώτης ὄψεως, ὅτι ὁ πίναξ αὐτὸς οὐδεμίαν σχέσιν ἔχει μὲ τὴν ἐπιστήμην τῶν ἄστρων ἀλλά, ὅπως θὰ ἴδωμεν, ἦτο ἤδη γνωστὸς εἰς τὸν L. Pacioli, ὅστις ἀπέδιδεν εἰς αὐτὸν καὶ τὰ παρόμοια ἀστρολογικὰς ἰδιότητας, ὥστε ἡ δοθεῖσα ὑπὸ τοῦ ποιητοῦ ὀνομασία νὰ μὴν εἶναι τελείως αὐθαίρετος. Προσθέτομεν ὅτι ὁ Dürer ἔμαθε πιθανῶς τὸ μαγικὸν αὐτὸ τετράγωνον εἰς Βολωνίαν, ὅπου ἀκριβῶς ἐμαθήτευσεν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XV

ΠΡΩΤΑΙ ΕΚΔΗΛΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΣΥΓΚΕΚΟΜΜΕΝΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

Ἡ ἀριθμητικὴ τοῦ Treviso τοῦ 1478

190. Εἰς τὴν πρόοδον τῆς ἐπιστήμης μας, ὅπως ἄλλωστε καὶ εἰς τὴν πρόοδον τῶν ἄλλων κλάδων τῆς γνώσεως, καταφανῶς καὶ σπουδαίως συνέβαλεν ἡ ἐφεύρεσις τῆς τυπογραφίας μὲ τὰ κινητὰ στοιχεῖα, ἐμφανισθεῖσα κατὰ τὸ δεύτερον ἥμισυ τοῦ XV αἰῶνος καὶ συγκεκριμένως ἀφ' ὅτου τὸ 1456 ὁ Ἰωάννης Γουτεμβέργιος (1400 - 1468 περίπου) ἐξετύπωσεν εἰς τὴν Μαγεντίαν τὴν περίφημον Βίβλον ποὺ φέρει τὸ ὄνομά του.

Ἐνῷ μέχρι τότε ἡ κατοχὴ βιβλίων ἦτο προνόμιον ἐλαχίστων εὐνοουμένων τῆς τύχης, ἐφεξῆς τὸ τυπωμένον βιβλίον εἰσέδυσεν εἰς ὅλας τὰς οἰκίας διαδίδον ἀκόμη καὶ εἰς τοὺς ταπεινοὺς ἀνθρώπους τὰ φῶτα τῶν προϊόντων τῆς ἀνθρωπίνης σκέψεως. Ἀπὸ τότε ἤρχισεν ὁ ἐκδημοκρατισμὸς τῆς γνώσεως. Ἡ νέα ἐφεύρεσις — τῆς ὁποίας ἡ δύναμις εὐστόχως ἀλληγορεῖται μὲ τὸ γνωμικὸν «οὐδὲν ἀνθίσταται εἰς ἐμὲ», ποὺ ἐχαράχθη εἰς τὴν οἰκίαν τοῦ ἐφευρέτου — διεδόθη μὲ καταπληκτικὴν ταχύτητα, ὥστε προτοῦ ἀκόμη λήξῃ ὁ XV αἰών, εἰς τὴν Εὐρώπην ὑφίσταντο τοὐλάχιστον 70 τυπογραφεῖα.

Ἰδιαιτέραν δραστηριότητα εἰς τὸν νέον αὐτὸν τομέα ἀνέπτυξεν ἡ Βενετία μὲ τὰ 50 τοὐλάχιστον τυπογραφεῖα της (μεταξὺ τῶν ὁποίων τὸ διασημότατον τοῦ Aldo Manuzio) τὰ ὁποῖα παρήγαγον περίπου 3000 ἔργα. Ἂν λάβωμεν ὡς βάσιν 300 ἀντίτυπα δι' ἕκαστον ἔργον, θ' ἀναβιβάσωμεν περίπου εἰς ἕνα ἑκατομμύριον τὸν ἀριθμὸν τῶν τόμων, τοὺς ὁποίους ἡ βασίλισσα τῆς Ἀδριατικῆς διέσπειρεν ἐντὸς βραχυτάτου χρόνου ἀνὰ τὸν κόσμον.

Ὅσον ἀφορᾷ τὰς ἀκριβεῖς ἐπιστήμας, πρέπει νὰ σημειώσωμεν ὅτι ἀπὸ τοῦ 1482 ἐτιμήθησαν μὲ ἐκτύπωσιν τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου, τὰ ὁποῖα ἔκτοτε ὑπέστησαν τόσας ἀνατυπώσεις καὶ μεταφράσεις, ὥστε ὑπερέβησαν καὶ αὐτὴν τὴν Θείαν Κωμῳδίαν. Τὸν ἔνδοξον καθηγητὴν τοῦ Μουσείου δὲν ἐβράδυναν ν' ἀκολουθήσουν οἱ μεγαλύτεροι γεωμέτραι

τῆς Ἑλλάδος καὶ ἐν συνεχείᾳ πολλοὶ ἐκ τῶν μετριωτέρων ἐκείνων, οἱ ὁποῖοι ἠκολούθησαν τὰ ἔνδοξα ἴχνη των.

191. Δὲν ἀποτελεῖ μέρος τοῦ προγράμματός μας ἡ παρουσίασις ὀνομαστικοῦ καταλόγου ὅλων τῶν βιβλίων ποὺ εἶδον τότε τὸ φῶς τῆς δημοσιότητος. Θὰ μνημονεύσωμεν μόνον ὅτι τὸ 1478 εἶδε τὸ φῶς εἰς Treviso τὸ πρῶτον ἐγχειρίδιον ἀριθμητικῆς ποὺ γνωρίζομεν. Σήμερον ἀποτελεῖ μίαν ἀπὸ τὰς πολυτιμοτέρας βιβλιογραφικὰς σπανιότητας. Ὁ Boncompagni ἐγνώριζεν ἑπτὰ ἐν ὅλῳ ἀντίτυπα. Ἕνα ὄγδοον ἀνεκαλύφθη ἀργότερα εἰς τὴν πανεπιστημιακὴν βιβλιοθήκην τῆς Βολωνίας.

Πρόκειται περὶ ἀνωνύμου βιβλίου, τοῦ ὁποίου αἱ μετριοπαθεῖς ἐπιδιώξεις ἀναγγέλλονται εἰς τὸν πρόλογον τοῦ ἀγνώστου συγγραφέως ὡς ἑξῆς: «Ἐγκαινιάζει μίαν πρακτικὴν μέθοδον πολὺ καλὴν καὶ χρήσιμον εἰς ἐκείνους ποὺ ἐπιθυμοῦν νὰ μάθουν τὴν τέχνην τῶν ἐμπορικῶν συναλλαγῶν, κοινῶς καλουμένην τέχνην τοῦ ἄβακος».

Ὁ συγγραφεὺς ἀποκαλύπτει ἐν συνεχείᾳ τὸ κίνητρον, τὸ ὁποῖον τὸν ὤθησεν εἰς τὴν συγγραφὴν τοῦ βιβλίου του: «Παρακληθεὶς κατ' ἐπανάληψιν ἀπὸ μερικοὺς νεαροὺς πολὺ ἀγαπητοὺς εἰς ἐμέ, οἱ ὁποῖοι ἤθελον νὰ ἐπιδοθοῦν εἰς τὸ ἐμπόριον· καὶ πρὸς χάριν των ἀπεφάσισα νὰ κουρασθῶ ὀλίγον· νὰ δώσω εἰς αὐτοὺς γραπτῶς κάποιαν βάσιν γύρω ἀπὸ τὴν τέχνην τῆς ἀριθμητικῆς ποὺ ὀνομάζουν κοινῶς ἄβακα. Διὰ τὴν ἀγάπην των λοιπὸν καταγίνομαι καὶ εἰς ὠφέλειαν ἐπίσης ὅλων ἐκείνων ποὺ ἔχουν τὴν ἰδίαν ἐπιθυμίαν, ἀνάλογα μὲ τὴν μικράν μου ἀντίληψιν καὶ διάνοιαν· ἀπεφάσισα, ἂν ὄχι ἐν ὅλῳ, τοὐλάχιστον ἐν μέρει, νὰ ἱκανοποιήσω τὴν ἐπιθυμίαν των, ἵνα δυνηθοῦν ν' ἀντλήσουν ἐξ αὐτοῦ τὴν προσδοκωμένην ὠφέλειαν».

Πρέπει ἐδῶ νὰ σημειώσωμεν ὅτι ἐν γένει τὰ βιβλία ἀριθμητικῆς ποὺ ἐγράφησαν τὸν Μεσαίωνα ἢ ἦσαν ἀποκλειστικῶς θεωρητικοῦ χαρακτῆρος (διαμορφωμένα κατ' ἀπομίμησιν τῶν ἔργων τοῦ Νικομάχου καὶ τοῦ Βοηθίου, μὲ μερικὰς σπανίας εὐκλειδείους ἀναλαμπάς) ἢ σχεδὸν ἐξ ὁλοκλήρου πρακτικὰ (καλούμενα τότε μὲ τὸ ὄνομα algorismi ἢ algoritmi), ἢ τέλος ἀπέβλεπον εἰς σκοποὺς καθαρῶς ἐμπορικοὺς ἢ ἐκκλησιαστικοὺς (διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῶν ἡμερῶν, εἰς τὰς ὁποίας ἑκάστοτε ἀντιστοιχοῦν αἱ κινηταὶ ἑορταί). Ὁ συγγραφεὺς λοιπὸν τῆς Ἀριθμητικῆς τοῦ Treviso μὲ τὰς 62 σελίδας ἤθελε νὰ βοηθήσῃ τόσον τοὺς ἐμπορευομένους ὅσον καὶ τοὺς ἐκκλησιαστικούς. Σημαντικὸν μέρος πράγματι τοῦ βιβλιαρίου ἀφορᾷ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν τεσσάρων θεμελιωδῶν πράξεων τῆς ἀριθμητικῆς. Εἰδικώτερα διὰ τὴν ἐκτέλεσιν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως ἦσαν ἐν χρήσει διάφοροι τρόποι φέροντες εἰδικὰ ὀνόματα. Π.χ. ὁ πολλαπλασιασμὸς ἐξετελεῖτο «κατὰ στήλην», «κατὰ σταυρόν», «κατὰ ζατρίκιον». Διάφορα τεχνάσματα ἐπενοήθησαν ἀπὸ πρακτικούς, τὰ ὁποῖα συνίσταντο

ἀποκλειστικῶς εἰς τὸν τρόπον διατάξεως τῶν δοθέντων ἀριθμῶν ἢ τῶν ἀποτελεσμάτων τῶν μερικῶν πράξεων, εἰς τὰς ὁποίας ἀναλύεται ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ διαίρεσις ἐπὶ μεγάλων ἀριθμῶν. Μερικὰ ἐκ τῶν τεχνασμάτων τούτων διετηρήθησαν καὶ δὲν συντρέχει λόγος νὰ κάμωμεν ἰδιαίτερον λόγον, ἀφοῦ εἶναι εἰς ὅλους γνωστά. Ἄλλα ἐλησμονήθησαν ὡς μὴ παρουσιάζοντα πλέον σήμερον ἐνδιαφέρον, ἂν καὶ εὑρίσκοντο ἀκόμη ἐν χρήσει καθ' ὅλον τὸν XVI αἰῶνα καὶ πέραν*.

Ὅσον ἀφορᾷ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ «χρυσοῦ ἀριθμοῦ» (numerus aureus), ὁ ὁποῖος χρησιμεύει ὡς γνωστὸν εἰς τὸν προσδιορισμὸν τοῦ Πάσχα καὶ τῶν ἄλλων κινητῶν ἑορτῶν τοῦ ἐκκλησιαστικοῦ ἡμερολογίου, ὁ συγγραφεύς μας τὸν εὑρίσκει μὲ τὸν ἀκόλουθον κανόνα : προσθέτομεν τὴν μονάδα εἰς τὸ πηλῖκον διὰ 19 τοῦ μήκους τοῦ ἔτους, ὅπερ δεχόμεθα, κατὰ τὸ ἑβραϊκὸν σύστημα, ἀποτελούμενον ἀπὸ μῆνας τῶν 29 ἡμερῶν, 12 ὡρῶν καὶ 793 σημείων, ἑκάστου σημείου ὄντος ἴσου πρὸς τὸ 1080στὸν τῆς ὥρας.

Ἐν τέλει, ἀποχωριζόμενος τοὺς νεαροὺς ἐκείνους, οἱ ὁποῖοι ἔγιναν ἀφορμὴ νὰ ὑποβληθῇ εἰς τόσους κόπους, ὁ συγγραφεὺς παρατηρεῖ μὲ βενετικὴν ἁπλότητα : «Ἰδοὺ λοιπὸν ἀγαπητοί μου εἰς χεῖρας σας τὸ ἔργον ποὺ μοῦ ἐζητήσατε μὲ τόσην λαχτάρα. Τὸ ὁποῖον ἂν διεξέλθετε μελετῶντες μὲ τὸν ἴδιον φλογερὸν ζῆλον, μὲ τὸν ὁποῖον ἐγράφη τοῦτο πρὸς ἱκανοποίησιν τῶν πόθων σας, δὲν ἀμφιβάλλω ὅτι θὰ δρέψετε ἀπιστεύτους καρπούς».

Κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς δεκαετίας 1480 - 1490 ἐδημοσιεύθησαν εἰς τὴν Ἰταλίαν πολυάριθμα βιβλία πρακτικῆς ἀριθμητικῆς. Τὸ πλέον ἐκτεταμένον εἶναι τὸ φέρον ὡς τίτλον: Ἐδῶ ἀρχίζει τὸ εὐγενὲς ἔργον τῆς ἀριθμητικῆς, ἡ ὁποία πραγματεύεται ὅλα τὰ σχετικὰ μὲ τὸ ἐμπόριον, συνταχθεῖσα ὑπὸ τοῦ βενετοῦ Πέτρου Μπόργκι (Borghi ἢ Borgi). Τὸ βιβλίον αὐτὸ εἶχε μεγάλην ἐπιτυχίαν, ἀφοῦ εἰς τὴν Βενετίαν καὶ εἰς διάστημα ἑνὸς αἰῶνος ἐξετυπώθη τοὐλάχιστον 16 φορὰς (1484, 1488, 1491, 1505, 1509, 1517, 1528, 1534, 1540, 1550, 1551, 1560, 1561, 1567, 1577). Γραφὲν εἰς μίαν ἰτα-

* Τοῦτο συνάγεται ἀπὸ ἕνα χωρίον τοῦ ἔργου La piazza di tutte le professioni, τοῦ Tommasso Garzoni (1549-1589 Venezia), τὸ ὁποῖον χωρίον, ἀφορῶν τοὺς λογιστάς, ἀξίζει νὰ μνημονεύσωμεν : «ἀκολουθεῖ ἡ ἀριθμητικὴ τῶν λογιστῶν, ἡ ὁποία πραγματεύεται τὴν ἀρίθμησιν, τὴν πρόσθεσιν, τὴν ἀφαίρεσιν, τὸν πολλαπλασιασμὸν μὲ τοὺς τρόπους του : castello, colonna, scacchi crocetta, quadrato, gelosia, ripiego, scapezzo. Ἀκολουθεῖ ἡ διαίρεσις μὲ τοὺς τρόπους της : regola, danda, galea, schifare, ripiego. Κατόπιν ἔρχεται ἡ συνεχὴς ἢ ἀσυνεχὴς πρόοδος, ὁ μερισμός, ἡ ἀναγωγὴ εἰς μέρη, ἡ εὕρεσις ριζῶν. Καὶ τέλος ἡ βάσανος καὶ οἱ τρόποι της, διὰ τοῦ ἑπτά, τοῦ ἐννέα, τοῦ ἕνδεκα... Καὶ εἰς αὐτὸ τὸ ἐπάγγελμα περιλαμβάνεται ἡ τήρησις βιβλίου ἁπλοῦ ἢ διπλοῦ, ὅπως κάνουν οἱ ἔμποροι, διὰ τὰ πωλήσεις καὶ ἀγοράς των. Αὐτὴ εἶναι ἡ ἁπλῆ λογιστική, ὅπως τὴν διδάσκουν οἱ διδάσκαλοι τῆς λογιστικῆς οἱ ὁποῖοι εὑρίσκονται εἰς μέγαν ἀριθμὸν ἀνὰ τὰς πόλεις καὶ τοὺς πύργους κάθε περιοχῆς».

λικὴν γλῶσσαν βενετικοῦ ἰδιώματος, ἀποσπᾶται τελείως ἀπὸ τὰ ἔργα ἑλληνικοῦ τύπου, ὅπως ἐκεῖνα, ποὺ διέδωσεν ὁ Βοήθιος εἰς τὴν Εὐρώπην (§ 105). Τὸ βιβλίον ἀρχίζει μὲ ἕνα ἔμμετρον ἐγκώμιον, τοῦ ὁποίου παραθέτομεν μερικοὺς στίχους :

«Ὅποιος τὰ μαθηματικὰ ἀγαπᾶ
ποὺ πρῶτα τὴν ἀκρίβεια ζητοῦν
καὶ θέλει ἐμπρὸς νὰ πάει μ' αὐτὰ
στὸ ἔργο τοῦτο ἂς ρίξει τὴ ματιά,
γιατὶ ἔτσι σίγουρα θὰ ἰδεῖ,
ἂν κάνει λάθη στοὺς λογαριασμούς,
πῶς μὲ αὐτὸ σωστὰ θὲ ν' ἀσκηθεῖ
μ' ὅλους τοὺς τρόπους πράξεις νὰ ἐκτελεῖ...»

Θεωροῦμεν περιττὸν νὰ εἰσέλθωμεν εἰς λεπτομερῆ ἀνάλυσιν ἑνὸς ἔργου μὲ τόσον μετρίας προθέσεις.

Ἡ ἀριθμητικὴ τοῦ Bamberg τοῦ 1483

192. Ἡ ἀριθμητικὴ τοῦ Treviso, ὑπῆρξε τὸ πρῶτον ἐγχειρίδιον τοῦ εἴδους του, ποὺ ἐκυκλοφόρησεν εἰς τὸν κόσμον διὰ τοῦ τύπου. Τοῦτο ἠκολούθησεν ἄλλο παρόμοιον, τυπωθὲν τὸ 1482 εἰς Bamberg τῆς Βαυαρίας, τοῦ ὁποίου συγγραφεὺς ἦτο ὁ Ulrich Wagner, καθηγητὴς εἰς τὴν Νυρεμβέργην. Ἀτυχῶς δὲν εἶναι σήμερον γνωστὸν οὔτε ἕνα πλῆρες ἀντίτυπον. Εἰς τὴν βιβλιοθήκην ἐκείνης τῆς πόλεως εὑρίσκονται, ὡς πολύτιμα κειμήλια, μόνον ἐννέα περγαμηνὰ ἀποσπάσματα πλάτους τὸ πολὺ ἴσου πρὸς τὸ πλάτος ἑνὸς ἐπισκεπτηρίου.

Ἀλλὰ τὸ ἑπόμενον ἔτος εἶδε τὸ φῶς εἰς τὴν ἰδίαν πόλιν ἕνα ἄλλο ἐγχειρίδιον τοῦ αὐτοῦ περιεχομένου, τοῦ ὁποίου ἐγχειριδίου τοὐλάχιστον ἕνα ἀντίτυπον περιεσώθη ἀπὸ τὴν ἀδηφάγον μανίαν τοῦ χρόνου καὶ ἀποτελεῖ φυσικὰ σήμερον μίαν βιβλιογραφικὴν σπανιότητα. Κάποτε ὅμως τὸ ἔργον τοῦτο πρέπει νὰ εἶχεν εὐρεῖαν διάδοσιν, διότι ἀπὸ αὐτὸ ἤντλησαν ἀφθόνως ὅσοι εἰς τὴν Γερμανίαν ἔγραψαν βραδύτερον περὶ τῆς τέχνης τοῦ ἀριθμητικοῦ λογισμοῦ. Χρησιμοποιοῦμεν τὴν λέξιν «τέχνη» ἀντὶ τῆς λέξεως «ἐπιστήμη», διότι ἡ Ἀριθμητικὴ τοῦ Bamberg ἔχει καταφανῶς σκοπὸν ἀνάλογον πρὸς τὴν τοῦ Treviso, νὰ ἐξασκήσῃ δηλαδὴ τοὺς ἐμπορευομένους εἰς τὴν χρῆσιν τῶν ἀριθμῶν κατὰ τὰς συναλλαγάς των. Τὸ πρόγραμμα ὅμως τὸ ὁποῖον ἐκτυλίσσει εἶναι εὐρύτερον, ὅπως προκύπτει ἀπὸ τὸν πίνακα τῶν περιεχομένων εἰς τὰς 77 σελίδας ποὺ ἀποτελοῦν τὸ βιβλίον.

Δὲν εἶναι ἄσκοπον νὰ δώσωμεν ἐδῶ μίαν περίληψιν τῶν περιεχομένων,

λικὴν γλῶσσαν βενετικοῦ ἰδιώματος, ἀποσπᾶται τελείως ἀπὸ τὰ ἔργα ἑλληνικοῦ τύπου, ὅπως ἐκεῖνα, ποὺ διέδωσεν ὁ Βοήθιος εἰς τὴν Εὐρώπην (§ 105). Τὸ βιβλίον ἀρχίζει μὲ ἕνα ἔμμετρον ἐγκώμιον, τοῦ ὁποίου παραθέτομεν μερικοὺς στίχους :

«Ὅποιος τὰ μαθηματικὰ ἀγαπᾶ
ποὺ πρῶτα τὴν ἀκρίβεια ζητοῦν
καὶ θέλει ἐμπρὸς νὰ πάει μ' αὐτὰ
στὸ ἔργο τοῦτο ἂς ρίξει τὴ ματιά,
γιατὶ ἔτσι σίγουρα θὰ ἰδεῖ,
ἂν κάνει λάθη στοὺς λογαριασμούς,
πῶς μὲ αὐτὸ σωστὰ θὲ ν' ἀσκηθεῖ
μ' ὅλους τοὺς τρόπους πράξεις νὰ ἐκτελεῖ...»

Θεωροῦμεν περιττὸν νὰ εἰσέλθωμεν εἰς λεπτομερῆ ἀνάλυσιν ἑνὸς ἔργου μὲ τόσον μετρίας προθέσεις.

Ἡ ἀριθμητικὴ τοῦ Bamberg τοῦ 1483

192. Ἡ ἀριθμητικὴ τοῦ Treviso, ὑπῆρξε τὸ πρῶτον ἐγχειρίδιον τοῦ εἴδους του, ποὺ ἐκυκλοφόρησεν εἰς τὸν κόσμον διὰ τοῦ τύπου. Τοῦτο ἠκολούθησεν ἄλλο παρόμοιον, τυπωθὲν τὸ 1482 εἰς Bamberg τῆς Βαυαρίας, τοῦ ὁποίου συγγραφεὺς ἦτο ὁ Ulrich Wagner, καθηγητὴς εἰς τὴν Νυρεμβέργην. Ἀτυχῶς δὲν εἶναι σήμερον γνωστὸν οὔτε ἕνα πλῆρες ἀντίτυπον. Εἰς τὴν βιβλιοθήκην ἐκείνης τῆς πόλεως εὑρίσκονται, ὡς πολύτιμα κειμήλια, μόνον ἐννέα περγαμηνὰ ἀποσπάσματα πλάτους τὸ πολὺ ἴσου πρὸς τὸ πλάτος ἑνὸς ἐπισκεπτηρίου.

Ἀλλὰ τὸ ἑπόμενον ἔτος εἶδε τὸ φῶς εἰς τὴν ἰδίαν πόλιν ἕνα ἄλλο ἐγχειρίδιον τοῦ αὐτοῦ περιεχομένου, τοῦ ὁποίου ἐγχειριδίου τοὐλάχιστον ἕνα ἀντίτυπον περιεσώθη ἀπὸ τὴν ἀδηφάγον μανίαν τοῦ χρόνου καὶ ἀποτελεῖ φυσικὰ σήμερον μίαν βιβλιογραφικὴν σπανιότητα. Κάποτε ὅμως τὸ ἔργον τοῦτο πρέπει νὰ εἶχεν εὐρεῖαν διάδοσιν, διότι ἀπὸ αὐτὸ ἤντλησαν ἀφθόνως ὅσοι εἰς τὴν Γερμανίαν ἔγραψαν βραδύτερον περὶ τῆς τέχνης τοῦ ἀριθμητικοῦ λογισμοῦ. Χρησιμοποιοῦμεν τὴν λέξιν «τέχνη» ἀντὶ τῆς λέξεως «ἐπιστήμη», διότι ἡ Ἀριθμητικὴ τοῦ Bamberg ἔχει καταφανῶς σκοπὸν ἀνάλογον πρὸς τὴν τοῦ Treviso, νὰ ἐξασκήσῃ δηλαδὴ τοὺς ἐμπορευομένους εἰς τὴν χρῆσιν τῶν ἀριθμῶν κατὰ τὰς συναλλαγάς των. Τὸ πρόγραμμα ὅμως τὸ ὁποῖον ἐκτυλίσσει εἶναι εὐρύτερον, ὅπως προκύπτει ἀπὸ τὸν πίνακα τῶν περιεχομένων εἰς τὰς 77 σελίδας ποὺ ἀποτελοῦν τὸ βιβλίον.

Δὲν εἶναι ἄσκοπον νὰ δώσωμεν ἐδῶ μίαν περίληψιν τῶν περιεχομένων,

ἀφοῦ παρατηρήσωμεν, ὅτι ἐξ αὐτῆς γίνεται κατάδηλος ἡ ἐπίδρασις τῆς ἰταλικῆς λογιστικῆς καὶ εἰδικώτερα μάλιστα εἰς τὰς ἐμπορικάς της ἐφαρμογάς.

I. Ἀρίθμησις, II. Πρόσθεσις, δοκιμὴ διὰ τοῦ 7, III. Ἀφαίρεσις, IV. Πολλαπλασιασμός (κατὰ 5 τρόπους), ἕνας ἐκ τῶν ὁποίων ἔχει τὴν ἀκόλουθον διάταξιν :

```
    640180
    ------\
    640180 / 1
   5121440 / 8
   000000 / 0
  3200900 / 5
  000000 / 0
 4481260 / 7
 ------------
 451378754580
```

V. Διαίρεσις· ἀριθμητικαὶ καὶ γεωμετρικαὶ πρόοδοι· ἐφαρμόζονται οἱ τύποι :

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

$$1+q^2+\cdots+q^{n-1}=\frac{q^{n-1}-1}{q-1}+q^{n-1},$$

VI. Πολλαπλασιασμὸς ἀκεραίων ἐπὶ κλάσματα ἢ κλασμάτων μεταξύ των (τὸ κλάσμα παρίσταται τοποθετουμένων τῶν δύο ὅρων τοῦ ἑνὸς ἐπὶ τοῦ ἄλλου διὰ στοιχείων ὕψους ἴσου πρὸς τὸ ἥμισυ τῶν ἀκεραίων), VII. Πρόσθεσις κλασμάτων, VIII. Ἀφαίρεσις κλασμάτων, IX. Διαίρεσις κλασμάτων, X. «Χρυσοῦς κανὼν» (δηλαδὴ ὁ κανὼν τῶν τριῶν), XI. Ὑπολογισμοὶ ἀνταλλαγῆς νομισμάτων, XII. Ὑπολογισμοὶ κερδῶν καὶ ζημιῶν, XIII. Κανόνες ἑταιρείας, XIV. «Tolletrechnung» (λέξις ἀμετάφραστος, ἰταλικῆς πάντως προελεύσεως· διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἐτυμολογίαν της πρέπει νὰ ἐνθυμηθῶμεν ὅτι εἰς βενετικὴν διάλεκτον ἡ τράπεζα (tavola) λέγεται tola, ἐξ οὗ τὸ ὑποκοριστικὸν toletta. Οἱ ὑπολογισμοὶ τώρα οἱ ἐκτιθέμενοι, εἰς τὸ κεφάλαιον αὐτὸ τοῦ ἐγχειριδίου ἐκτελοῦνται μέσῳ πινακίδος καταλλήλως διατεταγμένης, τῆς ὁποίας τὴν χρῆσιν ἐδιδάχθησαν εἰς τὴν Βαυαρίαν κατὰ τὴν ζωηρὰν ἐμπορικὴν ἐπικοινωνίαν Βενετίας καὶ Νυρεμβέργης), XVI. Ὑπολογισμοὶ χρήσιμοι κατὰ τὴν ἀγορὰν μὴ νομισματοποιημένου χρυσοῦ, XVII. Ὑπολογισμοὶ ἐκτελούμενοι δι' ἐφαρμογῆς τοῦ κανόνος τῶν τριῶν, XVIII. Μετατροπὴ κλασμάτων φιορινίων καὶ σελινίων, XIX - XXI. Πίνακες χρήσιμοι κατὰ τὴν ἀνταλλαγὴν ἐμπορευμάτων.

Τὸ ἐγχειρίδιον λοιπὸν τοῦτο περιέχει πλέον καὶ ἔλαττον ἐκείνων ποὺ

περιέχονται εἰς τὴν ἀριθμητικὴν τοῦ Treviso. Οἱ ἔμποροι εὑρίσκουν περισσότερα. Ἀλλ' οἱ ἐνδιαφερόμενοι νὰ μάθουν πῶς εὑρίσκεται ἡ ἡμερομηνία τοῦ Πάσχα δὲν πρόκειται νὰ εὕρουν καμμίαν βοήθειαν. Ἔλλειψις ἰσοφαριζομένη ἀπὸ τὴν ἑνότητα καὶ ἀφθονίαν τῆς προσφερομένης ὕλης.

Ἡ «Τριμερὴς» ἀριθμητικὴ τοῦ N. Chuquet (1484)

193. Τῆς ἐπιδράσεως, τὴν ὁποίαν ἤσκησεν ἡ Ἰταλία εἰς τὸν τομέα τῆς ἀριθμητικῆς, κατὰ τοὺς χρόνους ποὺ ἠκολούθησαν τὴν ἐμφάνισιν τοῦ Liber Abbaci, ἔχομεν μίαν νέαν πειστικωτάτην ἀπόδειξιν εἰς ἕνα ἔργον γραφὲν τὸ 1484 ἀπὸ κάποιον Nicola Chuquet (πρόσωπον ἐντελῶς ἄγνωστον κατὰ τὰ ἄλλα), ὁ ὁποῖος, διὰ νὰ δηλώσῃ ὅτι τὸ ἔργον του διαιρεῖται εἰς τρία μέρη, τὸ ἐτιτλοφόρησε Le triparty en la science des nombres. Ἂν καὶ τὸ βιβλίον ἐγράφη εἰς καλὴν γαλλικὴν γλῶσσαν, δὲν εἶναι σπάνιοι μερικοὶ ἰταλισμοί, τῶν ὁποίων ἡ παρουσία ἐξηγεῖται εὐκόλως, ὅταν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν, ὅτι ἡ Λυών, ὅπου τὸ βιβλίον ἐγράφη, ἦτο ἕδρα μιᾶς ἐξαιρετικῶς ἀνθούσης ἰταλικῆς παροικίας.

Μίαν ἄλλην ἐπιβεβαίωσιν τῆς ἰταλικῆς ἐπιδράσεως ἔχομεν εἰς τὸ σύστημα ποὺ χρησιμοποιεῖ ὁ Chuquet διὰ τὴν γραφὴν ἀριθμῶν μὲ περισσότερα τῶν ἓξ ψηφία. Ἐνῷ οἱ Γάλλοι συνηθίζουν νὰ διαχωρίζουν τὰ σύνολα τῶν ψηφίων ἑνὸς πολυψηφίου ἀριθμοῦ κατὰ τριάδας ὁ Chuquet προτιμᾷ κατὰ ἑξάδας, ὅπως ἦτο ἡ συνήθεια τοῦ Fibonacci.

Μίαν γενικὴν ἰδέαν τῆς ὕλης τῆς «Τριμεροῦς ἀριθμητικῆς» δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ἀπὸ τὸν κατωτέρω συνοπτικὸν πίνακα τῶν περιεχομένων:

Μέρος I: 1. Ἀριθμοὶ ἀκέραιοι, 2. Ἀριθμοὶ κλασματικοί, 3. Περὶ προόδων· περὶ ἀριθμῶν τελείων καὶ φίλων. Ἀριθμοὶ ἀνάλογοι καὶ ἰδιότητες αὐτῶν, 4. Κανόνες τῶν τριῶν κλπ.

Μέρος II: Περὶ ριζῶν, 1. Ἀναγωγὴ ἑνὸς ἢ περισσοτέρων ἀνομοίων ριζῶν εἰς ἕνα, 2. Ἐξαγωγὴ ριζῶν, 3. Πρόσθεσις καὶ μετασχηματισμοὶ ριζῶν, 4. Ἀφαίρεσις ριζῶν, 5. Πολλαπλασιασμὸς ριζῶν, 6. Διαίρεσις ριζῶν.

Μέρος III: Ὑπὸ τὸν τίτλον «Règles des premiers» ἐκτίθεται ἡ λύσις ἁπλῶν ἐξισώσεων, τὰς ὁποίας καλεῖ ὁ συγγραφεὺς «equipolences des nombres».

Τὸ ἀξιολογώτερον γνώρισμα τοῦ ἔργου τούτου συνίσταται εἰς τὸ γεγονὸς ὅτι ἐδῶ κάνουν τὴν πρώτην των ἐμφάνισιν οἱ ἐκθέται. Οὗτοι χρησιμοποιοῦνται ὑπὸ τοῦ Chuquet μόνον πρὸς δήλωσιν τῶν ριζικῶν διαφόρων τάξεων. Οὕτω μὲ τὰ σύμβολα R^2 καὶ R^3 παριστάνονται ἀντιστοίχως ἡ τετραγωνικὴ καὶ ἡ κυβικὴ ρίζα. Ἐξ ἄλλου τὰ γράμματα p καὶ m χρησιμο-

περιέχονται εἰς τὴν ἀριθμητικὴν τοῦ Treviso. Οἱ ἔμποροι εὑρίσκουν περισσότερα. Ἀλλ' οἱ ἐνδιαφερόμενοι νὰ μάθουν πῶς εὑρίσκεται ἡ ἡμερομηνία τοῦ Πάσχα δὲν πρόκειται νὰ εὕρουν καμμίαν βοήθειαν. Ἔλλειψις ἰσοφαριζομένη ἀπὸ τὴν ἑνότητα καὶ ἀφθονίαν τῆς προσφερομένης ὕλης.

Ἡ «Τριμερὴς» ἀριθμητικὴ τοῦ N. Chuquet (1484)

193. Τῆς ἐπιδράσεως, τὴν ὁποίαν ἤσκησεν ἡ Ἰταλία εἰς τὸν τομέα τῆς ἀριθμητικῆς, κατὰ τοὺς χρόνους ποὺ ἠκολούθησαν τὴν ἐμφάνισιν τοῦ Liber Abbaci, ἔχομεν μίαν νέαν πειστικωτάτην ἀπόδειξιν εἰς ἕνα ἔργον γραφὲν τὸ 1484 ἀπὸ κάποιον Nicola Chuquet (πρόσωπον ἐντελῶς ἄγνωστον κατὰ τὰ ἄλλα), ὁ ὁποῖος, διὰ νὰ δηλώσῃ ὅτι τὸ ἔργον του διαιρεῖται εἰς τρία μέρη, τὸ ἐπιτλοφόρησε Le triparty en la science des nombres. Ἂν καὶ τὸ βιβλίον ἐγράφη εἰς καλὴν γαλλικὴν γλῶσσαν, δὲν εἶναι σπάνιοι μερικοὶ ἰταλισμοί, τῶν ὁποίων ἡ παρουσία ἐξηγεῖται εὐκόλως, ὅταν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν, ὅτι ἡ Λυών, ὅπου τὸ βιβλίον ἐγράφη, ἦτο ἕδρα μιᾶς ἐξαιρετικῶς ἀνθούσης ἰταλικῆς παροικίας.

Μίαν ἄλλην ἐπιβεβαίωσιν τῆς ἰταλικῆς ἐπιδράσεως ἔχομεν εἰς τὸ σύστημα ποὺ χρησιμοποιεῖ ὁ Chuquet διὰ τὴν γραφὴν ἀριθμῶν μὲ περισσότερα τῶν ἓξ ψηφία. Ἐνῷ οἱ Γάλλοι συνηθίζουν νὰ διαχωρίζουν τὰ σύνολα τῶν ψηφίων ἑνὸς πολυψηφίου ἀριθμοῦ κατὰ τριάδας ὁ Chuquet προτιμᾷ κατὰ ἑξάδας, ὅπως ἦτο ἡ συνήθεια τοῦ Fibonacci.

Μίαν γενικὴν ἰδέαν τῆς ὕλης τῆς «Τριμεροῦς ἀριθμητικῆς» δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ἀπὸ τὸν κατωτέρω συνοπτικὸν πίνακα τῶν περιεχομένων:

Μέρος I: 1. Ἀριθμοὶ ἀκέραιοι, 2. Ἀριθμοὶ κλασματικοί, 3. Περὶ προόδων· περὶ ἀριθμῶν τελείων καὶ φίλων. Ἀριθμοὶ ἀνάλογοι καὶ ἰδιότητες αὐτῶν, 4. Κανόνες τῶν τριῶν κλπ.

Μέρος II: Περὶ ριζῶν, 1. Ἀναγωγὴ ἑνὸς ἢ περισσοτέρων ἀνομοίων ριζῶν εἰς ἕνα, 2. Ἐξαγωγὴ ριζῶν, 3. Πρόσθεσις καὶ μετασχηματισμοὶ ριζῶν, 4. Ἀφαίρεσις ριζῶν, 5. Πολλαπλασιασμὸς ριζῶν, 6. Διαίρεσις ριζῶν.

Μέρος III: Ὑπὸ τὸν τίτλον «Règles des premiers» ἐκτίθεται ἡ λύσις ἁπλῶν ἐξισώσεων, τὰς ὁποίας καλεῖ ὁ συγγραφεὺς «equipolences des nombres».

Τὸ ἀξιολογώτερον γνώρισμα τοῦ ἔργου τούτου συνίσταται εἰς τὸ γεγονὸς ὅτι ἐδῶ κάνουν τὴν πρώτην των ἐμφάνισιν οἱ ἐκθέται. Οὗτοι χρησιμοποιοῦνται ὑπὸ τοῦ Chuquet μόνον πρὸς δήλωσιν τῶν ριζικῶν διαφόρων τάξεων. Οὕτω μὲ τὰ σύμβολα R^2 καὶ R^3 παριστάνονται ἀντιστοίχως ἡ τετραγωνικὴ καὶ ἡ κυβικὴ ρίζα. Ἐξ ἄλλου τὰ γράμματα p καὶ m χρησιμο-

ποιοῦνται ὡς σύμβολα τῆς προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως. Διὰ νὰ δείξωμεν καλύτερα τὸ συμβολικόν του σύστημα, ἂς λάβωμεν ὡς παράδειγμα τὴν ἔκφρασιν :

$$R^2 \cdot R^3 \cdot 13 \cdot p \cdot R^2 7 \cdot m \cdot R^3 10,$$

ἡ ὁποία εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τήν :

$$\sqrt{\sqrt[3]{13} + \sqrt{7} - \sqrt[3]{10}} \cdot$$

Παρὰ ταῦτα, χρησιμοποιοῦνται οἱ ἐκθέται ὑπὸ τοῦ ἰδίου καὶ ὑπὸ μίαν ἄλλην ἔννοιαν, ἡ ὁποία πλησιάζει περισσότερον τὴν σήμερον ἐν χρήσει, δηλαδὴ νὰ φανερώνουν τὰς διαδοχικὰς δυνάμεις τοῦ ἀγνώστου μιᾶς ἐξισώσεως, χωρὶς διόλου ν' ἀποκλείεται ἡ περίπτωσις ἀρνητικῶν ἐκθετῶν, ὡς προκύπτει ἀπὸ τὴν ἀκόλουθον φρᾶσιν : «8^3 πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ 7m ἀνέρχεται εἰς 56^2», ἡ ὁποία μὲ σύγχρονον ἀλγεβρικὴν γλῶσσαν θὰ γραφῇ ὡς ἑξῆς :

$$8x^3 \cdot 7x^{-1} = 56^2x.$$

Γραπταὶ παραστάσεις αὐτοῦ τοῦ εἴδους εἶναι βέβαια δύσχρηστοι καὶ δὲν συγκρίνονται μὲ τὴν ἁπλότητα τῶν σημερινῶν, ἀποτελοῦν ὅμως συμπτώματα ἀσφαλῆ τῆς συντελουμένης εἰς τὴν ἄλγεβραν μεταμορφώσεως διὰ τῆς μεταβάσεως ἀπὸ τὴν ρητορικὴν μορφὴν εἰς τὴν συγκεκομμένην. Ἐξ ἄλλου ἡ παρουσία τῶν ἀρνητικῶν ἐκθετῶν ἀποδεικνύει ὅτι ἀπὸ τότε εἶχεν ἀρχίσει νὰ ἐκδηλοῦται ἡ ἀνάγκη, ὅπως ἡ ἐπιστήμη τῶν ἀριθμῶν ἀναχθῇ εἰς πλήρη γενικότητα. Γεγονὸς ἐπιβεβαιούμενον ἐκ τῆς παρατηρήσεως ὅτι ὁ Chuquet δὲν ἀποκλείει τὴν δυνατότητα ἀναγνωρίσεως καὶ τῶν δύο ριζῶν μιᾶς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως.

Πρὸς διευκόλυνσιν τῆς ἐκτελέσεως πολλαπλασιασμῶν, ὁ συγγραφεὺς παρουσιάζει ἕνα μέτριον πίνακα πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἀριθμῶν 1,2,. . .,9, μεταξύ των, υἱοθετῶν ὅμως μίαν τριγωνικὴν διάταξιν τοῦ πίνακος, πολὺ ὀλιγώτερον ἐκφραστικὴν τῆς σήμερον ἐν χρήσει ὀρθογωνικῆς διατάξεως. Ἐξ ἄλλου πρὸς διευκόλυνσιν τῆς ἐξαγωγῆς τῶν ριζῶν, θέτει εἰς τὴν διάθεσιν τοῦ ἀναγνώστου τὰς πρώτας 10 δυνάμεις τῶν πρώτων 10 ἀριθμῶν τῆς φυσικῆς σειρᾶς, παρατηρῶν ὅτι τὸ τετράγωνον ἑνὸς ἀριθμοῦ δὲν δύναται ποτὲ νὰ λήγῃ εἰς 2, 3, 7, 8, ἐνῷ τὸ διτετράγωνον δὲν δύναται παρὰ νὰ τελειώνῃ μὲ ἕνα ἀπὸ τὰ ψηφία, 0, 1, 5, 6.

Διὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν καὶ τὴν διαίρεσιν ἀριθμῶν ἐχόντων σημεῖον, ὁ συγγραφεὺς δίδει ἀκριβεῖς κανόνας, τοὺς ὁποίους διατυπώνει ὡς ἑξῆς : «Ὁ πολλαπλασιάζων p (plus, σὺν) ἐπὶ p καὶ m (moin, πλὴν) ἐπὶ m εὑρίσκει p (σύν). Ὁ πολλαπλασιάζων p ἐπὶ m ἢ ἀντιστρόφως εὑρίσκει πάντοτε m (πλήν). Ὁ διαιρῶν p διὰ p ἢ m διὰ m εὑρίσκει p. Καὶ ὁ διαιρῶν p διὰ m ἢ m διὰ p εὑρίσκει m».

Αἱ ἐξισώσεις, τὰς ὁποίας πραγματεύεται, εἶναι γενικώτεραι ἐκείνων, τὰς ὁποίας συνηντήσαμεν μέχρι τοῦδε, ἀλλ' ὁπωσδήποτε εἶναι ἀναγώγιμοι εἰς δευτεροβαθμίους. Εἶναι ὅλαι σχεδὸν τριώνυμοι καὶ ἀνήκουν εἰς τοὺς ἑπομένους τέσσαρους τύπους :

$$ax^m = bx^{m+n}$$

$$ax^m + bx^{m+n} = cx^{m+2n}$$

$$ax^m = bx^{m+n} + cx^{m+2n}$$

$$ax^m + bx^{m+2n} = cx^{m+n}.$$

Ἀξιοσημείωτοι εἶναι αἱ φράσεις, μὲ τὰς ὁποίας κλείει τὸ ἔργον. Ἐκφράζει ὁ συγγραφεὺς τὴν πεποίθησίν του, ὅτι ἀργὰ ἢ γρήγορα θὰ καταστῇ δυνατὴ καὶ ἡ λύσις τῶν ἐξισώσεων βαθμοῦ ἀνωτέρου τοῦ δευτέρου. Πεποίθησιν τὴν ὁποίαν — ὅπως εἴδομεν ὁμιλοῦντες διὰ τοὺς Ἄραβας καὶ ὅπως θὰ ἴδωμεν ὁμιλοῦντες διὰ τὸν Pacioli — δὲν συνεμερίζοντο τότε ἁρμόδια πρόσωπα.

194. Αὐτὰ βεβαίως δὲν εἶναι ὅλα τὰ σημαντικὰ καὶ πρωτότυπα ποὺ ἀπαντῶνται εἰς τὴν Τ ρ ι μ ε ρ ῆ. Ἀλλὰ καὶ ὅσα ἐλέχθησαν μέχρις ἐδῶ φαίνονται ἐπαρκῆ διὰ νὰ θεμελιώσουν τὴν ἐντύπωσιν ὅτι αὐτὴ ὑπερέχει τῶν ἄλλων ποὺ ἐξητάσαμεν εἰς αὐτὸ τὸ Κεφάλαιον. Αὐτὰ τὰ ἄλλα δὲν ἦσαν παρὰ μέτρια ἐγχειρίδια προωρισμένα νὰ ἐξυπηρετήσουν τὸν ἐμπορικὸν κόσμον καὶ διὰ τοῦτο τὸ περιεχόμενόν των καθωρίζετο κυρίως ἀπὸ τὰς ἀνάγκας τῶν συναλλαγῶν, ἐνῷ ἡ Τ ρ ι μ ε ρ ὴ ς ἀριθμητικὴ παρουσιάζει τὸν χαρακτῆρα μιᾶς θεωρητικῆς πραγματείας. Ἐπὶ πλέον τὸ συμβολικὸν σύστημα ποὺ ἐφαρμόζει (περιωρισμένον, ἀλλὰ μὴ στερούμενον εὐφυΐας) καὶ ἡ καταφανὴς ἔφεσις πρὸς τὴν γενικότητα, ἀποδεικνύουν ὅτι μὲ τὴν Τ ρ ι μ ε ρ ῆ ἡ ἄλγεβρα ἔκαμεν ἀναμφισβητήτως ἕνα βῆμα πρὸς τὰ ἐμπρός. Ἀτυχῶς ὅμως, διὰ λόγους ἀγνώστους, ἡ Τ ρ ι μ ε ρ ὴ ς δὲν εἶχε τὴν τύχην καὶ τὴν τιμὴν ν' ἀξιωθῇ τῶν εὐεργημάτων τῆς θαυμασίας ἐφευρέσεως τοῦ Γουτεμβεργίου.

Εἶναι ἄξιον ἀπορίας, ὅτι τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος ἔργον δὲν περιέχει καμμίαν ἐφαρμογὴν τῶν ἐκτιθεμένων θεωριῶν εἰς τὴν λύσιν προβλημάτων πρακτικοῦ περιεχομένου, ὅπως ἐκεῖνα ποὺ συνηντήσαμεν εἰς ὅλα τὰ ἔργα τὰ δημοσιευθέντα μετὰ τὸ Liber Abbaci. Εἰς τὸ χειρόγραφον ὅμως τὸ περιέχον τὴν Τ ρ ι μ ε ρ ῆ, εὑρίσκεται προσηρτημένη μιὰ συλλογὴ 166 προβλημάτων τοῦ εἴδους τούτου, ἀναγομένη εἰς τὴν ἰδίαν ἐποχήν, διότι εἰς ἕνα χωρίον δηλοῦται ὅτι ἡ συλλογὴ ἐγράφη τὴν 2αν Μαΐου 1484. Ὅλα δίδουν τὴν ἐντύπωσιν ὅτι πρόκειται περὶ καρποῦ τῆς ἐργασίας τοῦ ἰδίου συγγραφέως, διότι πολὺ ὀλίγοι, εἰς τὴν ἐποχήν του, θὰ ἦσαν εἰς θέσιν νὰ υἱοθετήσουν μετὰ θάρρους τὴν ἀρνητικὴν λύσιν ἑνὸς προβλήματος καὶ μάλιστα νὰ

φθάσουν μέχρι τοῦ σημείου, ὥστε νὰ δώσουν λογικωτάτην ἑρμηνείαν, ὅπως πράγματι γίνεται εἰς ἕνα ἀπὸ τὰ λελυμένα προβλήματα τῆς συλλογῆς.

Δὲν ἐξήρθη μέχρι τοῦδε ἐπαρκῶς ὑπὸ τῶν ἱστορικῶν ἡ μοναδικὴ ἀξία τοῦ προβλήματος LXXVIII, τὸ ὁποῖον ἀνάγεται εἰς ἕνα σύστημα 4 ἐξισώσεων μὲ 4 ἀγνώστους τῆς ἀκολούθου μορφῆς:

$$x + y = 3(z+u) - 400$$
$$y + z = 4(u+x) - 530$$
$$z + u = 5(x+y) - 870$$
$$u + x = 6(y+z) - 1190.$$

Τὸ σύστημα τοῦτο εἶναι ὡρισμένον μόνον φαινομενικῶς, ἐνῷ ὁ Chuquet δίδει εἰς αὐτὸ τὰς δύο ἀκολούθους ἀκριβεστάτας λύσεις (x,y,z,u):

(100, 115, 115, 90)
(80, 135, 95, 110).

Τὸ μέγιστον μέρος τῶν ἐξεταζομένων ἐξισώσεων εἶναι τοῦ πρώτου βαθμοῦ. Δὲν ἀπουσιάζουν ὅμως καὶ ἐξισώσεις ἀνωτέρου βαθμοῦ, ὅπως δεικνύουν τὰ ἑξῆς παραδείγματα:

$$x^2 + 7 =$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 13$$
$$x^3 + y^3 + z^3 = 20.$$

Μερικῶν ἐξ αὐτῶν δύναται κανεὶς νὰ προσδιορίσῃ τὴν προέλευσιν, διότι ἢ ἀπαντῶνται μεταξὺ ἐκείνων, τὰς ὁποίας ἐγνωρίσαμεν ἤδη εἰς προβλήματα κληρονομιῶν βάσει τῆς ρωμαϊκῆς νομοθεσίας ἢ ἐλήφθησαν ἀπὸ τὰ ἔργα τοῦ Ἀλκουίνου καὶ τοῦ Fibonacci.

Μὲ ὀλίγας λέξεις ἡ περὶ ἧς γίνεται λόγος συλλογὴ ἀποτελεῖ πολύτιμον συμπλήρωμα τῆς Τ ρ ι μ ε ρ ο ῦ ς, ἡ ὁποία ἂν ἐτυπώνετο πράγματι ὁμοῦ μὲ αὐτὴν ὡς ἀποτέλεσμα θὰ ἔδιδε ἕνα διδακτικὸν ἔργον μεγάλης ἀξίας, ποὺ ἀσφαλῶς δὲν θὰ διέφευγε τῆς εὐνοίας τῶν ἁρμοδίων καὶ τοῦ κοινοῦ.

Δυστυχῶς ὅμως τὸ ἔργον τοῦ Chuquet δὲν εἶδε τὸ φῶς τῆς δημοσιότητος παρὰ τὸ ἔτος 1880 καὶ τοῦτο ὄχι χάριν τῶν σκοπῶν διὰ τοὺς ὁποίους ἐγράφη, ἀλλ' ἀποκλειστικῶς ὡς μία συμβολὴ εἰς τὴν ἱστορίαν τῶν μαθηματικῶν. Θὰ ἠδύνατο μάλιστα νὰ ἰσχυρισθῇ κανεὶς ὅτι, κατ' ἀντίθεσιν πρὸς πολλὰ ἄλλα, οὔτε ὡς χειρόγραφον ἔλαβεν ἀξιόλογον διάδοσιν, ἀφοῦ πρὶν παρέλθουν 40 ἔτη ἐλεηλατήθη τὸ κείμενον ἀτιμωρητὶ ἀπὸ κάποιον Στέφανον de la Roche, ὁ ὁποῖος πολλὰ παρέλαβεν ἐξ αὐτοῦ, διὰ νὰ γράψῃ τὸ βιβλίον του Aritmetique nouvellement composée (Paris, 1520, 2α ἔκδοσις, 1538). Τὸ βιβλίον αὐτὸ δὲν περιέχει τίποτε περισσότερον τῆς Τ ρ ι μ ε ρ ο ῦ ς καὶ ἂν γίνεται ἐδῶ μνεία τούτου, μολονότι ἀνήκει εἰς μεταγε-

νεστέραν ἐποχήν, εἶναι διὰ νὰ μὴ ἐπανέλθωμεν ἐπ' αὐτοῦ, ἀφοῦ τίποτε δὲν ἔχομεν νὰ προσθέσωμεν πέραν τῆς μομφῆς διὰ τὴν λογοκλοπίαν, τῆς ὁποίας εἶναι ἔνοχος ὁ συγγραφεύς του.

Johannes Widmann

195. Μέγας ἀριθμὸς χειρογράφων καὶ ἀνωνύμων ἔργων ὑφιστάμενος εἰς γερμανικὰς βιβλιοθήκας μαρτυρεῖ ποίαν εὐρύτητα ἔλαβον εἰς τὴν Γερμανίαν αἱ σπουδαὶ τῆς τέχνης τοῦ ἀριθμητικοῦ ὑπολογισμοῦ καὶ τῶν ἐφαρμογῶν του εἰς τὰς συναλλαγὰς καὶ εἰς τὴν γεωμετρίαν. Καὶ αὐτὸ τὸ ὄνομα «Coss» (ἐκ τοῦ ἰταλικοῦ cosa = πρᾶγμα), μὲ τὸ ὁποῖον ἐδηλοῦτο τὸ σύνολον τῶν μεθόδων τοῦ ἀριθμητικοῦ λογισμοῦ ἀποδεικνύει χωρὶς ἀμφιβολίαν ὅτι ἰταλικαὶ ἦσαν αἱ πηγαί, ἐκ τῶν ὁποίων ἤντλησαν οἱ συγγραφεῖς των. Εἰσήχθησαν τότε καὶ ἐγένοντο εὐρύτατα δεκτὰ μερικὰ εἰδικὰ σύμβολα, πρὸς παράστασιν τοῦ ἀγνώστου μιᾶς ἐξισώσεως καὶ τῶν πρώτων δυνάμεων αὐτοῦ, τὰ ὁποῖα ἀπαντῶνται ὑπὸ τὸ ὄνομα «κοσσικὰ σημεῖα» (δηλαδή : σημεῖα τοῦ ἀριθμητικοῦ λογισμοῦ : coss) εἰς τὴν γερμανικὴν μαθηματικὴν βιβλιογραφίαν ὅλου τοῦ XVI αἰῶνος.

Ὁ πρῶτος ὁ ὁποῖος, ἐξ ὅσων γνωρίζομεν, ἐδημοσίευσεν εἰς τὴν Γερμανίαν μὲ τὸ ὄνομά του μεθοδικὸν ἐγχειρίδιον ἐπὶ τοῦ θέματος καὶ κατέστησε τοῦτο ἀντικείμενον πανεπιστημιακῶν μαθημάτων (εἰς τὴν Λειψίαν) εἶναι ὁ Johannes Widmann τοῦ Eger (Βοημία). Ἄγνωστον εἶναι τὸ ἔτος τῆς γεννήσεως, ὡς καὶ τὸ ἔτος τοῦ θανάτου του. Γνωρίζομεν ὅμως ὅτι ἀκριβῶς εἰς τὴν Λειψίαν ἐνεγράφη εἰς τὰ μητρῷα τῶν σπουδαστῶν διὰ τὸ χειμερινὸν ἑξάμηνον τοῦ ἔτους 1480, ὅτι τὸν Σεπτέμβριον τοῦ 1482 ἔλαβεν ἐκεῖ τὸ δίπλωμα τοῦ bachelor, τὸν Δεκέμβριον 1485 προήχθη εἰς bachelor τῆς ἰατρικῆς, τὸν δὲ Ἰανουάριον τοῦ 1486 ἀπεφοίτησε μὲ τὸν βαθμὸν τοῦ «magister artium».

Τὸ ἔργον τὸ ὁποῖον τοῦ ἐξασφαλίζει μίαν θέσιν εἰς τὴν ἱστορίαν τῶν μαθηματικῶν ἐδημοσιεύθη τὸ 1489 μὲ τὸν τίτλον : Behend und hübsch rechnung auf allen Kauffmannschafften (Βλ. Rara aritmetica, τοῦ D. E. Smith, σελ. 36 - 40, Boston, 1908) ποὺ σημαίνει : Ταχὺς καὶ κομψὸς λογισμὸς δι' ὅλας τὰς ἐμπορικὰς τάξεις.

Εὑρισκόμεθα λοιπὸν ἐνώπιον ἑνὸς ἔργου, τὸ ὁποῖον, ὡς ἐκ τοῦ σκοποῦ του, εὑρίσκεται πλησιέστερον πρὸς τὴν ἀριθμητικὴν τοῦ Treviso καὶ τοῦ Bamberg παρὰ πρὸς τὴν Τ ρ ι μ ε ρ ῆ*. Τὸ βιβλίον διαιρεῖται εἰς τρία

* Θεωρεῖται ὅτι τόσον ἡ ἀριθμητικὴ τοῦ Bamberg ὅσον καὶ ἐκείνη τοῦ Widmann προέκυψαν ἀπὸ ἕνα κείμενον καλούμενον συνήθως μὲ τὸ ὄνομα Algorismus Ratisponensis, ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἐκτενεῖς πληροφορίαι παρέχονται εἰς τὸ ἄρθρον τοῦ E. Rath : Über ein deutsches Rechenbuch aus dem 15. Jahrhundert (Bibl. mathem. 3η σειρά, τόμος XIII, 1912—13).

νεστέραν ἐποχήν, εἶναι διὰ νὰ μὴ ἐπανέλθωμεν ἐπ' αὐτοῦ, ἀφοῦ τίποτε δὲν ἔχομεν νὰ προσθέσωμεν πέραν τῆς μομφῆς διὰ τὴν λογοκλοπίαν, τῆς ὁποίας εἶναι ἔνοχος ὁ συγγραφεύς του.

Johannes Widmann

195. Μέγας ἀριθμὸς χειρογράφων καὶ ἀνωνύμων ἔργων ὑφιστάμενος εἰς γερμανικὰς βιβλιοθήκας μαρτυρεῖ ποίαν εὐρύτητα ἔλαβον εἰς τὴν Γερμανίαν αἱ σπουδαὶ τῆς τέχνης τοῦ ἀριθμητικοῦ ὑπολογισμοῦ καὶ τῶν ἐφαρμογῶν του εἰς τὰς συναλλαγὰς καὶ εἰς τὴν γεωμετρίαν. Καὶ αὐτὸ τὸ ὄνομα «Coss» (ἐκ τοῦ ἰταλικοῦ cosa = πρᾶγμα), μὲ τὸ ὁποῖον ἐδηλοῦτο τὸ σύνολον τῶν μεθόδων τοῦ ἀριθμητικοῦ λογισμοῦ ἀποδεικνύει χωρὶς ἀμφιβολίαν ὅτι ἰταλικαὶ ἦσαν αἱ πηγαί, ἐκ τῶν ὁποίων ἤντλησαν οἱ συγγραφεῖς των. Εἰσήχθησαν τότε καὶ ἐγένοντο εὐρύτατα δεκτὰ μερικὰ εἰδικὰ σύμβολα, πρὸς παράστασιν τοῦ ἀγνώστου μιᾶς ἐξισώσεως καὶ τῶν πρώτων δυνάμεων αὐτοῦ, τὰ ὁποῖα ἀπαντῶνται ὑπὸ τὸ ὄνομα «κοσσικὰ σημεῖα» (δηλαδή : σημεῖα τοῦ ἀριθμητικοῦ λογισμοῦ : coss) εἰς τὴν γερμανικὴν μαθηματικὴν βιβλιογραφίαν ὅλου τοῦ XVI αἰῶνος.

Ὁ πρῶτος ὁ ὁποῖος, ἐξ ὅσων γνωρίζομεν, ἐδημοσίευσεν εἰς τὴν Γερμανίαν μὲ τὸ ὄνομά του μεθοδικὸν ἐγχειρίδιον ἐπὶ τοῦ θέματος καὶ κατέστησε τοῦτο ἀντικείμενον πανεπιστημιακῶν μαθημάτων (εἰς τὴν Λειψίαν) εἶναι ὁ Johannes Widmann τοῦ Eger (Βοημία). Ἄγνωστον εἶναι τὸ ἔτος τῆς γεννήσεως, ὡς καὶ τὸ ἔτος τοῦ θανάτου του. Γνωρίζομεν ὅμως ὅτι ἀκριβῶς εἰς τὴν Λειψίαν ἐνεγράφη εἰς τὰ μητρῷα τῶν σπουδαστῶν διὰ τὸ χειμερινὸν ἑξάμηνον τοῦ ἔτους 1480, ὅτι τὸν Σεπτέμβριον τοῦ 1482 ἔλαβεν ἐκεῖ τὸ δίπλωμα τοῦ bachelor, τὸν Δεκέμβριον 1485 προήχθη εἰς bachelor τῆς ἰατρικῆς, τὸν δὲ Ἰανουάριον τοῦ 1486 ἀπεφοίτησε μὲ τὸν βαθμὸν τοῦ «magister artium».

Τὸ ἔργον τὸ ὁποῖον τοῦ ἐξασφαλίζει μίαν θέσιν εἰς τὴν ἱστορίαν τῶν μαθηματικῶν ἐδημοσιεύθη τὸ 1489 μὲ τὸν τίτλον : Behend und hübsch rechnung auf allen Kauffmannschafften (Βλ. Rara aritmetica, τοῦ D. E. Smith, σελ. 36 - 40, Boston, 1908) ποὺ σημαίνει : Ταχὺς καὶ κομψὸς λογισμὸς δι' ὅλας τὰς ἐμπορικὰς τάξεις.

Εὑρισκόμεθα λοιπὸν ἐνώπιον ἑνὸς ἔργου, τὸ ὁποῖον, ὡς ἐκ τοῦ σκοποῦ του, εὑρίσκεται πλησιέστερον πρὸς τὴν ἀριθμητικὴν τοῦ Treviso καὶ τοῦ Bamberg παρὰ πρὸς τὴν Τ ρ ι μ ε ρ ῆ*. Τὸ βιβλίον διαιρεῖται εἰς τρία

* Θεωρεῖται ὅτι τόσον ἡ ἀριθμητικὴ τοῦ Bamberg ὅσον καὶ ἐκείνη τοῦ Widmann προέκυψαν ἀπὸ ἕνα κείμενον καλούμενον συνήθως μὲ τὸ ὄνομα Algorismus Ratisponensis, ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἐκτενεῖς πληροφορίαι παρέχονται εἰς τὸ ἄρθρον τοῦ E. Rath : Über ein deutsches Rechenbuch aus dem 15. Jahrhundert (Bibl. mathem. 3η σειρά, τόμος XIII, 1912—13).

μέρη. Τὸ I ἀφιεροῦται εἰς τὸν λογισμὸν μὲ ἀκεραίους ἀριθμοὺς καὶ εἰς τὰς ἀριθμητικὰς καὶ γεωμετρικὰς προόδους. Ὁ συνήθης πίναξ πολλαπλασιασμοῦ διατάσσεται ὑπὸ τοῦ Widmann κατὰ δύο τρόπους· τόσον ὑπὸ τριγωνικὴν μορφὴν (ὅπως εἶχε κάμει ὁ Chuquet), ὅσον καὶ ὑπὸ μορφὴν ὀρθογωνίου. Τὴν πρώτην ἀποδίδει εἰς κάποιον Beldomandi, ἐνῷ τὴν δευτέραν ἀνάγει εἰς ἕνα ἑβραϊκὸν ἔργον, χωρὶς ἄλλον καλύτερον προσδιορισμόν.

Τὸ II Μέρος, περιλαμβάνει τρία κεφάλαια. Τὸ πρῶτον ἀφιεροῦται εἰς τὸν λογισμὸν μὲ κλάσματα, τὸ δεύτερον εἰς τὰς ἀναλογίας καί, φυσικά, εἰς τὸν κανόνα τῶν τριῶν, ἐνῷ τὸ τρίτον περιέχει ἀρκετὸν ἀριθμὸν προβλημάτων ἐμπορικῆς ἀριθμητικῆς, ἐκ τῶν ὁποίων μερικὰ λύονται μὲ τὴν μέθοδον τῆς αὐθαιρέτου ἀφετηρίας (Regula falsi). Εἰς τὸ τελευταῖον τοῦτο κεφάλαιον ὀφείλει κυρίως τὴν θέσιν του ὁ Widmann εἰς τὴν ἱστορίαν τῆς Ἀλγέβρας, διότι ἐδῶ ἀπαντῶνται διὰ πρώτην φορὰν τὰ σημεῖα + καὶ — πρὸς δήλωσιν τῆς προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως. Ἐπειδὴ ὅμως ὁ συγγραφεὺς τὰ χρησιμοποιεῖ ὡς συντομογραφικὰ σύμβολα ποὺ ἦσαν ἤδη εἰς γενικὴν χρῆσιν, δὲν παρέχει καμμίαν ἔνδειξιν ἐπιτρέπουσαν νὰ λύσωμεν τὸ μέγα ζήτημα τῆς προελεύσεως τῶν δύο αὐτῶν συμβόλων. Ἐν πάσῃ περιπτώσει, ἡ παρουσία των ἀποδεικνύει ὅτι ἡ ἄλγεβρα περὶ τὸ τέλος τοῦ XV αἰῶνος εἶχεν ἤδη ἐπιτελέσει ἕνα νέον βῆμα πρὸς τὸ στάδιον τῆς συμβολικῆς ἐπιστήμης, εἰς τὸ ὁποῖον τελικῶς ἐπέπρωτο νὰ φθάσῃ μόνον κατὰ τὸν XVII αἰῶνα.

196. Τὸ III Μέρος τοῦ ἔργου τοῦ Widmann εἶναι γεωμετρικοῦ χαρακτῆρος, καὶ ἔχει ὡς σκοπὸν τὸν προσδιορισμὸν μηκῶν καὶ ἐμβαδῶν ἐπιπέδων σχημάτων μὲ ἀριθμητικὰ δεδομένα. Δέσμαι φωτὸς ἐναλασσόμεναι μὲ ζώνας σκιᾶς δίδουν λαβὴν εἰς τὴν ὑπόθεσιν, ὅτι ὁ συγγραφεὺς παρέλαβεν ἀβασανίστως ἐξ ἄλλων πηγῶν ὡρισμένους κανόνας, τῶν ὁποίων δὲν ἀντελήφθη τὴν ἀνεπάρκειαν. Οὕτω, διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ἐμβαδοῦ ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου χρησιμοποιεῖ τὸν τύπον ὁ ὁποῖος ἐκφράζει ἕνα τριγωνικὸν ἀριθμόν, ἀλλὰ διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς ἐπιφανείας ἑνὸς τριγώνου μὲ πλευρὰς 13, 14, 15 ἐφαρμόζει ὡς ἔδει τὸν γνωστὸν τύπον τοῦ Ἥρωνος. Ὁμοίως, ἐνῷ διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ἐμβαδοῦ ἑνὸς τετραπλεύρου μὲ ἀντικειμένας πλευρὰς a, c καὶ b, d ἐφαρμόζει τὸν παλαιὸν καὶ ἐσφαλμένον τύπον $1/2\ (a + c)(b + d)$, διὰ τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον μὲ ὑποτείνουσαν a καὶ καθέτους πλευρὰς b, c, δίδει τὴν ὀρθωτάτην ἔκφρασιν: $b + c - a$.

Τὰ πράγματα αὐτὰ ἐνδέχεται νὰ ἐδιδάχθη ἀπὸ συγγραφεῖς, τοὺς ὁποίους ἀναφέρει (Sacrobosco, Euclide, Campano, Boezio, Nemorario). Ὑπάρχει ὅμως καὶ ἕνα συμπέρασμα τοῦ ὁποίου, μέχρις ἀποδείξεως τοῦ ἐναντίου,

δύναται νὰ διεκδικήσῃ τὴν πατρότητα. Ὁμιλοῦμεν διὰ τὴν ἀκόλουθον ἔκφρασιν τῆς ἀκτῖνος τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τρίγωνον ABC κύκλου, εἰς τὴν περίπτωσιν ποὺ εἶναι γνωστὰ ἡ βάσις AC = b, τὸ ὕψος BE = h καὶ τὸ τμῆμα AD = k τῆς βάσεως τὸ ἐξικνούμενον μέχρι τοῦ σημείου D καθ' ὃ ἐφάπτεται τῆς βάσεως AC ἡ ἐγγεγραμμένη περιφέρεια :

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + \left(\frac{h^2 + \left(\frac{b}{2} - k\right)^2 - \frac{b}{4}}{h}\right)^2}\,.$$

Πῶς ἐξήχθη ὁ τύπος αὐτὸς εἶναι ἄγνωστον, διότι ὁ συγγραφεὺς τὸν ἐφαρμόζει, ὅπως καὶ τοὺς ἄλλους τῆς αὐτῆς φύσεως, χωρὶς νὰ δίδῃ ἀπόδειξιν. Καὶ εἶναι τοῦτο μία ἔνδειξις ὅτι ἡ γεωμετρία διὰ τὸν Widmann δὲν ἔχει ἄλλον προορισμὸν παρὰ νὰ τοῦ παρέχῃ προβλήματα, κατάλληλα πρὸς ἐφαρμογὴν τῶν κανόνων τοῦ ἀριθμητικοῦ λογισμοῦ.

Τέλος τὸ ἔργον τοῦ Widmann δίδει νέαν ἀφορμὴν νὰ ἐπαναλάβωμεν ὅτι ὁ σεβασμὸς τῆς πνευματικῆς ἰδιοκτησίας ἀποτελεῖ, φαίνεται, ἀρετὴν τῶν τελευταίων χρόνων, διότι ὁλόκληρα χωρία ἔχουν κατὰ λέξιν ἀντιγραφῆ ἀπὸ τὴν Ἀ ρ ι θ μ η τ ι κ ὴ ν τοῦ Bamberg. Ἄραγε ἡ λογοκλοπία παρέμεινεν ἀπαρατήρητος ἀπὸ τοὺς συγχρόνους ἢ ἁπλῶς δὲν ἐθεωρεῖτο ἀξιόμεμπτος ; Ἄλλοι ἂς ἀπαντήσουν. Ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον εἶναι βέβαιον εἶναι ὅτι τὸ ἁμάρτημα τοῦτο τοῦ Widmann δὲν ἠμπόδισε τὸ βιβλίον του νὰ ἐκδοθῇ τοὐλάχιστον δύο φοράς, τὸ 1508 καὶ 1526.

Luca Pacioli

197. Ὁ μαθηματικός, περὶ τοῦ ὁποίου πρόκειται τώρα νὰ ὁμιλήσωμεν, ἐγεννήθη ἀπὸ ταπεινὴν οἰκογένειαν, περὶ τὸ 1445, εἰς τὸ Borgo S. Sepolcro (Umbria). Τοῦτο ἐξηγεῖ διατί συχνὰ ἀποκαλεῖται λατινικὰ Lucas de Burgo. Νεαρὸς ἀκόμη μετέβη εἰς Βενετίαν ὑπὸ τὴν ἰδιότητα οἰκοδιδασκάλου καὶ ἀκριβῶς εἰς τὸν οἰκοδεσπότην του ἀφιέρωσεν (1470) ἕνα ἐγχειρίδιον ἀλγέβρας, τοῦ ὁποίου ἐχάθησαν τελείως τὰ ἴχνη. Εἰς τὴν Βενετίαν περιεβλήθη τὸ ἔνδυμα τοῦ Ἁγίου Φραγκίσκου καὶ ἐνετάχθη εἰς τὴν οἰκογένειαν τῶν «ἐλασσόνων». Ἀφοῦ συνεπλήρωσε τὴν ἐκπαίδευσίν του εἰς τὴν θεολογίαν καὶ φιλοσοφίαν, ὁ fra Luca ἤρχισε νὰ περιηγῆται τὴν Ἰταλίαν, ὡς ἐὰν ἦτο τιτλοῦχος μιᾶς περιοδευούσης καθηγητικῆς ἕδρας τῶν μαθηματικῶν. Τὸ 1475 ἐκλήθη εἰς Perugia ὡς δημόσιος ἐκπαιδευτικὸς λειτουργὸς εἰς τὰ μαθηματικά. Κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς τριετοῦς παραμονῆς του εἰς τὴν πόλιν αὐτὴν συνέγραψε δεύτερον βιβλίον, τὸ ὁποῖον ἀφιέρωσεν εἰς τοὺς μαθητάς του καὶ τὸ ὁποῖον ὑφίσταται μέχρι σήμερον χειρόγραφον εἰς τὴν βιβλιοθήκην τοῦ Βατικανοῦ.

δύναται νὰ διεκδικήσῃ τὴν πατρότητα. Ὁμιλοῦμεν διὰ τὴν ἀκόλουθον ἔκφρασιν τῆς ἀκτῖνος τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τρίγωνον ABC κύκλου, εἰς τὴν περίπτωσιν ποὺ εἶναι γνωστὰ ἡ βάσις AC = b, τὸ ὕψος BE = h καὶ τὸ τμῆμα AD = k τῆς βάσεως τὸ ἐξικνούμενον μέχρι τοῦ σημείου D καθ' ὃ ἐφάπτεται τῆς βάσεως AC ἡ ἐγγεγραμμένη περιφέρεια :

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + \left(\frac{h^2 + \left(\frac{b}{2} - k\right)^2 - \frac{b}{4}}{h}\right)^2}\,.$$

Πῶς ἐξήχθη ὁ τύπος αὐτὸς εἶναι ἄγνωστον, διότι ὁ συγγραφεὺς τὸν ἐφαρμόζει, ὅπως καὶ τοὺς ἄλλους τῆς αὐτῆς φύσεως, χωρὶς νὰ δίδῃ ἀπόδειξιν. Καὶ εἶναι τοῦτο μία ἔνδειξις ὅτι ἡ γεωμετρία διὰ τὸν Widmann δὲν ἔχει ἄλλον προορισμὸν παρὰ νὰ τοῦ παρέχῃ προβλήματα, κατάλληλα πρὸς ἐφαρμογὴν τῶν κανόνων τοῦ ἀριθμητικοῦ λογισμοῦ.

Τέλος τὸ ἔργον τοῦ Widmann δίδει νέαν ἀφορμὴν νὰ ἐπαναλάβωμεν ὅτι ὁ σεβασμὸς τῆς πνευματικῆς ἰδιοκτησίας ἀποτελεῖ, φαίνεται, ἀρετὴν τῶν τελευταίων χρόνων, διότι ὁλόκληρα χωρία ἔχουν κατὰ λέξιν ἀντιγραφῆ ἀπὸ τὴν Ἀριθμητικὴν τοῦ Bamberg. Ἄραγε ἡ λογοκλοπία παρέμεινεν ἀπαρατήρητος ἀπὸ τοὺς συγχρόνους ἢ ἁπλῶς δὲν ἐθεωρεῖτο ἀξιόμεμπτος ; Ἄλλοι ἂς ἀπαντήσουν. Ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον εἶναι βέβαιον εἶναι ὅτι τὸ ἁμάρτημα τοῦτο τοῦ Widmann δὲν ἠμπόδισε τὸ βιβλίον του νὰ ἐκδοθῇ τοὐλάχιστον δύο φοράς, τὸ 1508 καὶ 1526.

Luca Pacioli

197. Ὁ μαθηματικός, περὶ τοῦ ὁποίου πρόκειται τώρα νὰ ὁμιλήσωμεν, ἐγεννήθη ἀπὸ ταπεινὴν οἰκογένειαν, περὶ τὸ 1445, εἰς τὸ Borgo S. Sepolcro (Umbria). Τοῦτο ἐξηγεῖ διατί συχνὰ ἀποκαλεῖται λατινικὰ Lucas de Burgo. Νεαρὸς ἀκόμη μετέβη εἰς Βενετίαν ὑπὸ τὴν ἰδιότητα οἰκοδιδασκάλου καὶ ἀκριβῶς εἰς τὸν οἰκοδεσπότην του ἀφιέρωσεν (1470) ἕνα ἐγχειρίδιον ἀλγέβρας, τοῦ ὁποίου ἐχάθησαν τελείως τὰ ἴχνη. Εἰς τὴν Βενετίαν περιεβλήθη τὸ ἔνδυμα τοῦ Ἁγίου Φραγκίσκου καὶ ἐνετάχθη εἰς τὴν οἰκογένειαν τῶν «ἐλασσόνων». Ἀφοῦ συνεπλήρωσε τὴν ἐκπαίδευσίν του εἰς τὴν θεολογίαν καὶ φιλοσοφίαν, ὁ fra Luca ἤρχισε νὰ περιηγῆται τὴν Ἰταλίαν, ὡς ἐὰν ἦτο τιτλοῦχος μιᾶς περιοδευούσης καθηγητικῆς ἕδρας τῶν μαθηματικῶν. Τὸ 1475 ἐκλήθη εἰς Perugia ὡς δημόσιος ἐκπαιδευτικὸς λειτουργὸς εἰς τὰ μαθηματικά. Κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς τριετοῦς παραμονῆς του εἰς τὴν πόλιν αὐτὴν συνέγραψε δεύτερον βιβλίον, τὸ ὁποῖον ἀφιέρωσεν εἰς τοὺς μαθητάς του καὶ τὸ ὁποῖον ὑφίσταται μέχρι σήμερον χειρόγραφον εἰς τὴν βιβλιοθήκην τοῦ Βατικανοῦ.

Κατόπιν τὸν εὑρίσκομεν ἐπ' ὀλίγον εἰς τὴν Βενετίαν καὶ κατόπιν εἰς τὴν Zara, ὅπου ἔγραψεν (1481) ἕνα ἄλλο παρόμοιον ἔργον. Κατέλιπεν ἐνθύμια τῆς διαβάσεώς του εἰς τὴν Φλωρεντίαν (1487) καὶ ἔπειτα ἐπέστρεψεν εἰς Perugia. Ἀλλὰ μετ' ὀλίγον μετέβη εἰς τὴν Ρώμην (1489) ὑπὸ τὴν ἰδιότητα βοηθοῦ καθηγητοῦ (Lettore alla Sapienza). Οὔτε ὅμως καὶ ἐδῶ παρέμεινεν ἐπὶ μακρόν, λόγῳ προστριβῶν μὲ τοὺς ἀνωτέρους του. Ἔπειτα ἀπὸ βραχεῖαν παραμονὴν εἰς Νεάπολιν, μετέβη καὶ πάλιν εἰς Βενετίαν (1496) καὶ μετὰ δύο ἔτη, κατόπιν προσκλήσεως τοῦ Λουδοβίκου Σφόρτσα (τοῦ ἐπιλεγομένου Μαύρου), εἰς τὸ Μιλᾶνον. Ὅταν ὁ ἡγεμὼν οὗτος ἀπώλεσε τὴν ἐξουσίαν μὲ τὴν ἄφιξιν τῶν Γάλλων, ὁ fra Luca κατέφυγεν εἰς Φλωρεντίαν μετὰ τοῦ Leonardo da Vinci, μὲ τὸν ὁποῖον, ὅπως εἴπομεν καὶ ἄλλοτε, συνεδέετο μὲ ἀδελφικὴν φιλίαν. Κατὰ τὴν περίοδον 1500 - 1506 ἐχρημάτισε καθηγητὴς τοῦ Δημοσίου εἰς Πίζαν (ὅπου ἡ καθηγητικὴ ἕδρα ἱδρύθη ἀποκλειστικῶς δι' αὐτόν), εἰς Βολωνίαν, εἰς Βενετίαν ἐκ νέου (1508), εἰς Perugia (1510) καὶ εἰς Ρώμην (1514). Πιθανῶς ἀπέθανεν εἰς τὴν πόλιν αὐτὴν μετὰ τὴν 30ην Αὐγούστου 1514, ἄγνωστον πότε ἀκριβῶς.

198. Ἡ μεγάλη φήμη τοῦ Luca Pacioli στηρίζεται πρὸ πάντων ἐπὶ τῆς μνημειώδους μαθηματικῆς ἐγκυκλοπαιδείας, τῆς ὁποίας ὁ πλήρης τίτλος εἶναι: Summa di Aritmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalità καὶ κατὰ συγκοπὴν Summa (οὐσιῶδες σύνολον). Εἶναι τὸ πρῶτον ἔργον τοῦ εἴδους του, ποὺ ἐξεδόθη διὰ τοῦ τύπου (1η ἔκδοσις: Venezia 1494 2α ἔκδοσις: Tusculano sul Lago di Garda 1523), καὶ εἰς τὴν εὐτυχῆ αὐτὴν συγκυρίαν ὀφείλει ἐν μέρει τὴν τεραστίαν του διάδοσιν*. Εἶναι δὲ ἐμπνευσμένον ἀπὸ τὴν ἰδέαν (ἐφαρμοσθεῖσαν ἄλλωστε εἰς προγενέστερα ἔργα ἀναλόγου περιεχομένου) τῆς προσεγγίσεως ἢ καλύτερα συγχωνεύσεως τῆς θεωρίας καὶ τῆς πράξεως καὶ ἀπὸ τὸν θαυμασμὸν διὰ «τὴν εὐρεῖαν γενικότητα τῶν μαθηματικῶν, χάρις εἰς τὴν ὁποίαν δύνανται νὰ ἐφαρμόζωνται ἐπὶ παντὸς εἴδους πραγμάτων».

Καὶ ἀκριβῶς διὰ νὰ ἐξασφαλίσῃ εἰς τὸ ἔργον του τὴν μεγαλυτέραν δυνατὴν διάδοσιν μεταξὺ ὅλων τῶν κοινωνικῶν τάξεων ὁ fra Luca ἀπεφάσισε νὰ ἐγκαταλείψῃ τὸ λατινικὸν ἔνδυμα χάριν τῆς δημοτικῆς γλώσσης. Ἀλλὰ δὲν ἐπέτυχε τὸν σκοπόν του παρὰ μόνον ἐν μέρει, διότι εἰς τὴν πραγματικότητα ἐχρησιμοποίησεν ἀναμὶξ λέξεις λατινικὰς καὶ ἑλληνικάς, ἔτι δὲ ἰδιωματικοὺς τρόπους ἐκφράσεως, τοὺς ὁποίους ἔμαθεν εἰς τὰς διαφόρους πόλεις ὅπου διέμεινε. Τὸ προελθὸν ἑτερόκλητον ὕφος τοῦ λόγου ἐπλήγωσε τὴν εὐαισθησίαν τοῦ γνωστοτάτου λογίου ἀνδρὸς Annibal Caro,

* Ὀλίγον προηγουμένως (1491) εἶχον τυπωθῆ δύο βιβλία ἀριθμητικῆς, ἕνα τοῦ Pietro Borghi εἰς Βενετίαν (§ 458) καὶ ἄλλο τοῦ Filippo Calandri, εἰς Φλωρεντίαν, ἀλλὰ συγκρινόμενα πρὸς τὴν Summa ἐνθυμίζουν τὸν μῦθον τοῦ ψύλλου καὶ τοῦ βοδιοῦ.

ὁ ὁποῖος παρωμοίασε τὴν Summa πρὸς τὰ «χωνευτήρια τῶν χρυσοχόων, ὅπου τὰ μόρια τοῦ χρυσοῦ ἀναδύονται εἰς τὸ φῶς διὰ μέσου τεφρῶν καὶ σκωριῶν, ὑπὸ τὰς ὁποίας εἶναι τεθαμμένον τὸ πολύτιμον μέταλλον». Μία γνώμη ὄχι πολὺ διάφορος τῆς διατυπωθείσης ὑπὸ τοῦ καλυτέρου βιογράφου τοῦ Pacioli — ἐννοοῦμεν τὸν Bernardino Baldi — ὁ ὁποῖος παρετήρησεν ὅτι «ἡ γλῶσσα τοῦ βιβλίου εἶναι βαρβαρίζουσα, ἄρρυθμος, χονδροειδὴς καὶ ἀτυχής, προκαλοῦσα ναυτίαν εἰς ἐκείνους ποὺ μελετοῦν τὸ περιεχόμενον». Τὸ δὲ γεγονὸς ὅτι ἕνας μαθηματικὸς τῆς ἀξίας τοῦ Federico Commandino εἶχε συλλάβει τὴν πρόθεσιν ν' ἀνατυπώσῃ τὴν Summa, ἀφοῦ προηγουμένως βελτιώσῃ τὴν γλῶσσαν τοῦ κειμένου, ἀποδεικνύει ὅτι αἱ κριτικαὶ ἐκεῖναι δὲν ἦσαν ἀπόρροια φανατικῆς προσηλώσεως εἰς τὴν καθαρεύουσαν.

Ὁ fra Luca δὲν παρουσιάζεται ὡς πρωτότυπος συγγραφεύς. Ἀναγνωρίζει ὅτι ἤντλησεν ἐλευθέρως ἀπὸ τὸ Liber Abbaci, δηλώνων μάλιστα, ὅτι ἀντέγραψεν ὁλοκλήρους σελίδας χωρὶς νὰ κάμῃ ἰδιαιτέραν ἔνδειξιν. Ἐπὶ πλέον δὲν ἀρνεῖται ὅτι εὐρύτατα ὠφελήθη ἀπὸ τὰ ἔργα τοῦ Εὐκλείδου, τοῦ Βοηθίου, τοῦ Giordano (Nemorario), τοῦ Biagio da Parma (Pelacani), τοῦ Sacrobosco, τοῦ Prosdocimo de' Beldomani, τοῦ Bradwardin, τοῦ Regiomontano καὶ τοῦ Alberto di Sassonia, ὡς καὶ τῶν ἐξοχωτέρων ἀράβων ἀλγεβριστῶν.

Πρωτοτυπώτατος εἶναι ὅμως ὁ ἰδικός του τρόπος τοῦ γράφειν, διότι εἶναι ἀκριβῶς ἀντίθετος τοῦ γενικῶς νομιζομένου σήμερον ὡς ὀρθοδόξου. Ἐνῷ, πράγματι, παραλείπει σαφεῖς καὶ ἀκριβεῖς ὁρισμοὺς τῶν ἐννοιῶν του, αἰφνιδίως παρεμβάλλει εἰς τὰς ἀναπτύξεις θεωρητικοῦ χαρακτῆρος ἐξωμαθηματικὰς σκέψεις, τὰς ὁποίας ἐμπνέεται ἀπὸ ἀρχαίους συγγραφεῖς, ἐπὶ κεφαλῆς τῶν ὁποίων εὑρίσκεται ὁ Πλάτων, «ὁ ἀρχιμανδρίτης τῶν φιλοσοφούντων», αὐτοβιογραφικὰς σημειώσεις, ἱστορικὰ δεδομένα, πληροφορίας ἐπὶ τῶν ἐν χρήσει νομισματικῶν μονάδων καὶ τῶν ἐμπορικῶν συνηθειῶν, παροιμίας, φράσεις ἄλλων εἰς πεζὸν ἢ ποιητικὸν λόγον. Συνεπῶς ἡ Summa θὰ ἠδύνατο νὰ ληφθῇ ὡς ὑπόδειγμα ἀπὸ τοὺς διδασκάλους ἐκείνους τῶν μαθηματικῶν, οἱ ὁποῖοι ζητοῦν πῶς νὰ καταστήσουν ἑλκυστικὴν καὶ εὐχάριστον μίαν ἐπιστήμην, θεωρουμένην δυσπρόσιτον καὶ ξηρὰν εἰς τοὺς πολλούς.

Σπεύδομεν νὰ δηλώσωμεν ὅτι πολλαὶ ἐξωμαθηματικαὶ παρεκβάσεις τοῦ Pacioli, δὲν θὰ ἠδύναντο σήμερον νὰ ἐκτεθοῦν ἀπὸ ἕνα σοβαρὸν διδάσκαλον. Εἰς τὴν σχολαστικὴν κενολογίαν ἀνήκουν π.χ. αἱ θεωρίαι, μὲ τὰς ὁποίας ὁ Pacioli διανθίζει τὸ βιβλίον του γύρω ἀπὸ τὴν ἔννοιαν τοῦ τελείου ἀριθμοῦ, καὶ εἰς τὴν ἐκπνέουσαν κοσμοθεωρίαν τῶν νεοπυθαγορείων αἱ παρατηρήσεις βάσει τῶν ὁποίων, ὡς διατείνεται, ὑπάρχει στενὸς σύνδεσμος μεταξὺ τῶν ἰδιοτήτων τοῦ 5 καὶ τῆς ὑποστάσεως τῶν κανονικῶν

πολυέδρων, ὡς καὶ μεταξὺ τῶν χαρισμάτων τοῦ 7 καὶ τῶν μυστηρίων τῆς δημιουργίας. Τί πρέπει κατόπιν νὰ εἴπωμεν διὰ τὴν σοβαρὰν ἀμηχανίαν, εἰς τὴν ὁποίαν περιέρχεται ὁ συγγραφεὺς ἐν τῇ ἐπιθυμίᾳ του ν' ἀποκαταστήσῃ τὴν συμφιλίωσιν μεταξὺ τῆς βιβλικῆς ρήσεως «αὐξάνεσθε καὶ πληθύνεσθε» καὶ τοῦ γεγονότος ὅτι ὁ πολλαπλασιασμὸς ἀκεραίου ἐπὶ κλάσμα ἀποδίδει ἐξαγόμενον μικρότερον τοῦ πολλαπλασιαστέου!

199. Ἂς ἔλθωμεν τώρα εἰς λεπτομερείας περισσότερον συγκεκριμένας. Ἡ Summa ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο μέρη, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἕνα ἀφιεροῦται εἰς τὴν τέχνην καὶ τὴν ἐπιστήμην τοῦ λογισμοῦ, τὸ ἄλλο εἰς τὴν γεωμετρίαν. Καὶ τὸ ἕνα καὶ τὸ ἄλλο ὑποδιαιρεῖ ὁ συγγραφεὺς εἰς διακρίσεις (distinzioni), πραγματείας (trattati) καὶ ἄρθρα (articoli).

Τὸ Μέρος I ἀρχίζει μὲ μίαν θεωρητικὴν ἀνάπτυξιν τῆς ἀριθμητικῆς, συμφώνως πρὸς τὰς ἰδέας τοῦ Νικομάχου τοῦ Γερασηνοῦ καὶ τοῦ Θέωνος τοῦ Σμυρναίου. Ὁ Pacioli φαίνεται νὰ πιστεύῃ ὅτι οἱ τέλειοι ἀριθμοὶ τοῦ Εὐκλείδου εἶναι ὅλοι οἱ δυνατοὶ τέλειοι καὶ παρατηρεῖ ὅτι οὗτοι καταλήγουν ἐναλλὰξ εἰς τὰ ψηφία 6 καὶ 8, ὡς προκύπτει ἀπὸ ἕνα παρατιθέμενον ὑπὸ τοῦ ἰδίου μικρὸν πίνακα τοιούτων ἀριθμῶν.

Ἀκολουθεῖ ἡ λύσις μερικῶν προβλημάτων ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως, τὰ ὁποῖα, ὅπως δύναται νὰ συμπεράνῃ κανεὶς ἀπὸ τὰς ἐκτιθεμένας ἰδιότητας τῶν «ἰσοδυνάμων» ἀριθμῶν, πηγὴν τῆς ἐμπνεύσεως των ἔχουν τὸ Liber Quadratorum τοῦ Λεονάρδου Πιζᾶνο. Ὡς γέφυρα ἐπικοινωνίας μεταξὺ τῆς ἐκτιθεμένης θεωρίας καὶ τῶν πρακτικοῦ χαρακτῆρος ἐφαρμογῶν ὑπεισέρχεται ἡ ἔκθεσις τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμητικοῦ συστήματος (τὸ ὁποῖον ὁ fra Luca ἀποδίδει εἰς τοὺς Ἄραβας) ὡς καὶ μία προφανὴς μετάληψις ἐκ τοῦ ἔργου τοῦ Beda (§ 109), ἀφορῶσα τὴν διάλεκτον τῶν δακτύλων (loquela digitorum)*.

Ἀκολουθοῦν οἱ κανόνες τῶν ὑπολογισμῶν μὲ ἀκεραίους ἀριθμούς. Σημειοῦται ὅτι ὁ συγγραφεὺς ἀπομακρυνόμενος τοῦ Sacrobosco καὶ τοῦ Beldomandi καὶ ἀκολουθῶν μᾶλλον τὸ παράδειγμα τῆς Ἀριθμητικῆς τοῦ Treviso, ἀπαλείφει ἀπὸ τὸν κατάλογον τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων (§ 173) τὴν ἡμιάθροισιν (mediatio) καὶ τὸν διπλασιασμὸν (duplatio), ὀρθότατα παρατηρῶν ὅτι πρόκειται περὶ μερικῶν περιπτώσεων τῆς διαιρέσεως καὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Ἄλλο σημεῖον ἄξιον σημειώσεως εἶναι ὅτι διὰ τὴν ἐκτέλεσιν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ διδάσκει τοὐλάχιστον 8 τρόπους, ἐκ τῶν ὁποίων οἱ πλεῖστοι περιέχονται εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν τοῦ Treviso. Περισσοτέρους τοῦ ἑνὸς τρόπους διδάσκει ἐπίσης καὶ

* Ὁ πίναξ τῆς Summa, ὅπου εἰκονίζονται αἱ θέσεις τῆς χειρὸς αἱ παριστῶσαι τοὺς ἀριθμοὺς 1,2,...,9,10,20,...,90,100,200,...,900,1000,2000,...,9000 ἔχει ἀναπαραχθῆ εἰς τὴν σελίδα 57 τοῦ μνημονευθέντος ἤδη ἔργου Rara arithmetica τοῦ D.E. Smith (Boston, 1908).

διά τήν διαίρεσιν. Διά τόν ἔλεγχον τῆς ἀκριβείας τῶν ἀποτελεσμάτων, συνιστᾷ τήν βάσανον διά τοῦ 7, παρατηρῶν ὅτι ἡ διά τοῦ 9 δέν εἶναι ἀσφαλής, διότι δέν ἐπηρεάζεται ἐκ τῆς παραλείψεως μηδενικῶν, οὔτε ἐκ τῆς ἀντιμεταθέσεως ψηφίων εἰς τούς δοθέντας ἀριθμούς.

Τά κλάσματα γράφονται μέ τόν τρόπον πού εἶναι ἐν χρήσει σήμερον, δηλαδή μέ τόν «ἀριθμητήν» ὑπεράνω τοῦ «παρανομαστοῦ», χωριζομένους μέ μίαν μικράν ὁριζοντίαν γραμμήν, ἡ ὁποία ἐκαλεῖτο «ρίγα» (riga). Ἐξετάζονται περαιτέρω τά συνεχῆ ἀνιόντα κλάσματα καί δίδονται κανόνες μετατροπῆς ἑνός κοινοῦ κλάσματος εἰς κλάσμα τοιαύτης μορφῆς.

Ἀκολουθοῦν οἱ κανόνες ὑπολογισμοῦ τοῦ ἀθροίσματος ὅρων ἀριθμητικῆς καί γεωμετρικῆς προόδου, μέ τήν στερεότυπον ἐφαρμογήν πού συνδέεται μέ τά 64 τετραγωνίδια τοῦ ζατρικίου (σκάκι), μέ τό ὑπολογισμόν τοῦ ἀθροίσματος ὡρισμένου ἀριθμοῦ ὅρων τῆς φυσικῆς σειρᾶς 1,2,...., ἢ τῶν τετραγώνων ἢ τῶν κύβων αὐτῶν. Ἀρυόμενος τάς ἐμπνεύσεις του ἀπό τόν Fibonacci, ὁ Pacioli διδάσκει διαφόρους ἐφαρμογάς τῆς μεθόδου τῆς αὐθαιρέτου ἀφετηρίας (Regula falsi), ὑπό τόν ἀνατολικόν ὅρον «el catayml», πού ἔχομεν ἤδη συναντήσει εἰς τό Liber Abbaci (§ 161).

Μέγας ἀριθμός σελίδων τῆς Summa ἀφιεροῦται εἰς ἐφαρμογάς τῆς ἀριθμητικῆς εἰς διαφόρους τύπους συμφωνιῶν, ὑπό τήν προϋπόθεσιν ὅτι χρησιμοποιοῦνται τά παντός εἴδους νομίσματα πού εἶχον ἰσχύν εἰς τά διάφορα κρατίδια, εἰς τά ὁποῖα ἦτο τότε διῃρημένη ἡ Ἰταλία. Πολλαί ἀναπτύξεις ἀφιερώνονται εἰς τήν διπλογραφίαν (partita doppia), σύστημα εὐρύτατα ἐφαρμοζόμενον εἰς τήν Ἰταλίαν ἀπό τῶν ἀρχῶν τοῦ XV αἰῶνος καί εἰδικώτερον εἰς τά μεγάλα ἐμπορικά κέντρα τῆς Γένοβας καί τῆς Βενετίας. Αἱ σελίδες μάλιστα αὐταί τῆς Summa συνετέλεσαν ὥστε ν' ἀναγνωρισθῇ γενικῶς ὁ Pacioli ὡς μία αὐθεντία εἰς τόν τομέα τῆς λογιστικῆς. Πρᾶγμα ἐπιβεβαιούμενον ἄλλωστε καί ἀπό τούς κανόνας, τούς ὁποίους διδάσκει πρός κατασκευήν πινάκων διά τόν ταχύν ὑπολογισμόν τῶν τόκων, πρός μεγίστην ἐξυπηρέτησιν τῶν σχετικῶν ἀναγκῶν, λίαν αἰσθητῶν ἀπό τῆς ἐποχῆς ἐκείνης.

Μεταξύ ἄλλων, πραγματεύεται καί τό ἀκόλουθον πρόβλημα : «νά μοιρασθῇ ἀκριβοδικαίως μεταξύ δύο παικτῶν ἡ «πόστα», εἰς τήν περίπτωσιν, καθ' ἥν τό παιγνίδι (partita) διακοπῇ». Ἄν καί τό ἀποτέλεσμα εἰς τό ὁποῖον καταλήγει δέν φαίνεται σήμερον παραδεκτόν, ἐν τούτοις τό πρόβλημα τοῦτο παρουσιάζει τόν Pacioli ὡς ἕνα ἐκ τῶν πρώτων, πού ἠσχολήθησαν μέ τήν θεωρίαν τῶν πιθανοτήτων.

Ἀξιόλογον ἐπίσης εἶναι ἕνα ἄλλο χωρίον τῆς Summa, εἰς τό ὁποῖον ὁ συγγραφεύς θέτει τό ζήτημα : «μετά πόσα ἔτη θά διπλασιασθῇ κεφάλαιον ἀνατοκιζόμενον πρός r%;». Τό ζήτημα τοῦτο ἀνάγεται ὡς γνωστόν εἰς τήν λύσιν τῆς ἐκθετικῆς ἐξισώσεως:

$$\left(1 + \frac{r}{100}\right)^x = 2,$$

Ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν:

$$x = ln\,2 : ln\left(1 + \frac{r}{100}\right)$$

καὶ κατὰ προσέγγισιν:

$$x = \frac{100 \cdot ln\,2}{r}.$$

Λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι ὁ συγγραφεὺς τῆς Summa εὑρίσκει, ἀντὶ τοῦ ἐξαγομένου τούτου, τὴν προσέγγισιν:

$$x = \frac{72}{r},$$

ἀγόμεθα εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι οὗτος εὗρε τρόπον νὰ ἐκτιμήσῃ τὸν νεπέρειον λογάριθμον τοῦ 2 εἰς τὴν προσεγγιστικὴν τιμὴν $ln2 = 0{,}72$, ἡ ὁποία δύναται νὰ γίνῃ δεκτὴ ὡς μὴ ἀπέχουσα πολὺ τῆς ἀληθοῦς:

$$ln\,2 = 0{,}69314\ldots$$

200. Ἡ πραγματεία (trattato) V τῆς διακρίσεως (distinzione) VIII τοῦ I τμήματος (sezione) ἀρχίζει μὲ τὰς ἀκολούθους ἐνθουσιαστικὰς φράσεις: Ἐφθάσαμεν μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ Θεοῦ ἐκεῖ ποὺ πολὺ ἐπεθυμοῦμεν νὰ φθάσωμεν, δηλαδὴ εἰς τὴν «μάννα» ὅλων τῶν περιπτώσεων, ποὺ κοινῶς καλεῖται «κανὼν τοῦ ἀγνώστου» (regola della cosa) ἢ «τέχνη μεγάλη» δηλαδὴ πρακτικοθεωρητική, καὶ μὲ ἀραβικοὺς ὅρους «ἄλγεβρα» καὶ «ἀλμουκαβάλα», ποὺ εἰς τὴν γλῶσσαν μας ἰσοδυναμοῦν ἀντιστοίχως μὲ τὴν μεταφορὰν ὅρων ἀπὸ ἑνὸς μέλους ἰσότητος εἰς τὸ ἄλλο (restaurationis) καὶ μὲ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων (oppositionis).

Αἱ φράσεις αὐταὶ λέγουν μὲ ἀρκετὴν σαφήνειαν ποῖον εἶναι τὸ πεδίον, εἰς τὸ ὁποῖον ὁ συγγραφεὺς θέλει νὰ ὁδηγήσῃ τοὺς ἀναγνώστας του. Χωρὶς νὰ τὸν ἀκολουθήσωμεν βῆμα πρὸς βῆμα θ' ἀναφέρωμεν τὰ σημαντικώτερα ἐκ τῶν ζητημάτων τὰ ὁποῖα πραγματεύεται.

Τὸν ἄγνωστον ὀνομάζει κατ' ἀρχὴν «πρᾶγμα» (ἰταλικά: cosa). Ἂν ὅμως ὑπάρχῃ καὶ δεύτερος ἄγνωστος, τότε τὸν ὀνομάζει «μέγεθος». Αἱ δυνάμεις τοῦ ἀγνώστου δηλοῦνται μὲ εἰδικὰ ὀνόματα καὶ σύμβολα, τῶν ὁποίων ἰδοὺ τὰ πρῶτα:

cosa = co
censo = ce
cubo = cu
censo censo = ce ce
primo relato = p°. r°
secondo relato = 2° r°.

Μὲ τὰ γράμματα p καὶ m παριστᾷ τὰ σημασίας σ ὺ ν (πλέον = più) καὶ π λ ή ν (ἔλαττον = meno), ἐνῷ μὲ τὰ σύμβολα R^2 καὶ R^3(τὸ γράμμα R ἐτέμνετο μὲ λοξὴν γραμμὴν) παριστᾷ τὰς τετραγωνικὰς καὶ κυβικὰς ρίζας. Τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν προηγεῖται τὸ γράμμα m· ἂς σημειωθῇ ὅτι ὁ συγγραφεὺς σχετικῶς μὲ τοὺς ἀρνητικοὺς ἀριθμοὺς γράφει τοῦτο «καταφανὲς ὅτι m4 εἶναι ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ μηδενός». Οἱ κανόνες τοῦ λογισμοῦ μὲ προσημασμένους ἀριθμοὺς ἀποδεικνύονται διὰ γεωμετρικῆς ὁδοῦ, ἐκφωνοῦνται δὲ περίπου ὅπως καὶ σήμερον. Ἀριθμοὶ «sani» καὶ «rotti», δηλαδὴ «ἀκέραιοι» καὶ «κλάσματα» παρεμβαίνουν εἰς ὅλας τὰς πράξεις τῆς ἀριθμητικῆς μὲ τὴν μεγαλυτέραν εὐκολίαν. Εἰς τὸν χειρισμὸν ὅμως τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν ὁ fra Luca παραμένει πολὺ κατώτερος τοῦ N. Oresme (§ 177), διότι περιορίζεται μόνον εἰς ἐκείνους, ποὺ ἐξετάζει ὁ Εὐκλείδης εἰς τὸ Βιβλίον X τῶν Σ τ ο ι χ ε ί ω ν, τοῦ ὁποίου τὴν ὕλην ἐκθέτει ὑπὸ νέαν μορφήν, χωρὶς ὅμως νὰ τὴν ἐφαρμόζει πάντοτε μὲ τὴν δέουσαν προσοχήν.

Αἱ ὑπ' αὐτοῦ ἐξεταζόμεναι δευτεροβάθμιοι ἐξισώσεις ἀνήκουν εἰς ἕνα τῶν κατωτέρω τριῶν τύπων :

$$x^2 + ax = b,$$

$$x^2 = ax + b,$$

$$x^2 + b = ax,$$

(a, b πάντοτε θετικοὶ ἀκέραιοι). Οἱ κανόνες λύσεως τούτων δίδονται ὑπὸ τοῦ συγγραφέως εἰς τρία τετράστιχα λατινικά, τὰ ὁποῖα, κηδόμενοι τῶν ἀναγνωστῶν, δὲν θ' ἀναφέρωμεν, ἀφοῦ ἀσφαλῶς δὲν πρόκειται νὰ περιληφθοῦν ποτὲ εἰς συλλογὴν ὑποδειγμάτων ἐξαιρετικοῦ ὕφους.

Ὁ Pacioli ἀπαριθμεῖ κατόπιν ἄλλας μορφὰς ἐξισώσεων ἀνωτέρου βαθμοῦ, τουτέστι :

$$ax^4 = c \quad (1)$$

$$ax^4 = bx \quad (2)$$

$$ax^4 = cx^2 \quad (3)$$

$$ax^4 + cx^2 = bx \quad (4)$$

$$ax^4 + bx = cx^2 \quad (5)$$

$$ax + c = cx^2 \quad (6)$$

$$ax^4 + cx^2 = c \quad (7)$$

$$ax^4 = cx^2 + c. \quad (8)$$

Πλησίον τῶν ἐξισώσεων τῶν τύπων (4) καὶ (5) ἀναγράφεται ἡ λέξις «ἀδύνατος». Ἀλλὰ τί ἐννοεῖ ὁ Pacioli μὲ τὴν λέξιν αὐτήν ; Ὅτι ἡ ἐξίσωσις εἶναι ἀδύνατος πάντοτε ἢ ὑπὸ συνθήκας καὶ ποίας ; Ἡ ἀπάντησις φαίνεται νὰ

προκύπτῃ ἐκ τοῦ γεγονότος ὅτι ὁ ἴδιος ἔλυσε περαιτέρω μίαν ἐξίσωσιν τετάρτου βαθμοῦ καὶ συγκεκριμμένως τήν:

$$\frac{x(x+1)}{2} + \left[\frac{x(x+1)}{2}\right]^2 = 20400, \qquad (\alpha)$$

ὄχι μὲ τὸν τρόπον ποὺ θὰ ἐφήρμοζεν ἕνας σύγχρονος μαθηματικός, θέτων δηλαδὴ τὸ γινόμενον $(x+1)$, ὡς βοηθητικὸν ἄγνωστον, ἀλλὰ ἐκτελῶν ὅλας τὰς πράξεις καὶ τὰς ἀναγωγὰς ὁμοίων ὅρων διὰ νὰ καταλήξῃ εἰς τὴν ἐξίσωσιν:

$$x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x = 81600 \qquad (\beta)$$

καὶ τελικῶς εἰς τὴν ἰσοδύναμον:

$$(x^2 + x + 1)^2 = 81601. \qquad (\gamma)$$

Μετὰ τὴν ἐξαγωγὴν τῆς τετραγωνικῆς ρίζης ἀναγόμεθα εἰς δευτεροβάθμιον ἐξίσωσιν.

Ἀλλὰ τὸ πρόβλημα τοῦτο δίδει ἀφορμὴν εἰς μίαν ἄλλην παρατήρησιν. Ἡ ἐξίσωσις (α) ἀποτελεῖ τὴν ἀναλυτικὴν ἔκφρασιν τοῦ ἀκολούθου προβλήματος: «πόσους ὅρους τῆς φυσικῆς σειρᾶς 1,2,..., x πρέπει νὰ λάβωμεν, ἵνα τὸ ἄθροισμά των καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν κύβων των ὁμοῦ λαμβανόμενα δίδουν ἄθροισμα τὸν ἀριθμὸν 20400». Ὡς ἐκ τῆς φύσεως τοῦ προβλήματος ὁ ἀριθμὸς x πρέπει νὰ εἶναι ἀκέραιος. Ὁ Pacioli ὅμως δὲν δίδει προσοχὴν εἰς τὴν οὐσιώδη αὐτὴν συνθήκην· ἐφαρμόζει λοιπὸν τοὺς γνωστοὺς τύπους:

$$1 + 2 + \ldots + x = \frac{x(x+1)}{2} \qquad (\delta)$$

$$1^3 + 2^3 + \ldots + x^3 = \left[\frac{x(x+1)}{2}\right]^2, \qquad (\varepsilon)$$

λησμονῶν ὅτι οὗτοι ὑφίστανται μόνον ὅταν τὸ x εἶναι ἀκέραιος, φθάνων δὲ εἰς τὸ τέρμα δὲν συνάγει, ὡς ὤφειλε, ὅτι τὸ προταθὲν πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον νὰ λυθῇ, ἐφ' ὅσον ἡ ἐπιλύουσα (γ) δὲν ἔχει καμμίαν ρίζαν ἀκεραίαν. Εὑρισκόμεθα λοιπὸν ἐνώπιον μιᾶς τυφλῆς ἐφαρμογῆς τύπων, δηλαδὴ ἐνώπιον ἑνὸς φαινομένου, ὅμοιον τοῦ ὁποίου θὰ συναντήσωμεν πάλιν, ὑπὸ ὀξυτέραν μορφήν, κατὰ τὴν μετὰ τὸν Leibniz περίοδον, κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς ὁποίας οἱ μαθηματικοί, ἡγουμένου τοῦ Euler, ἐβάδιζον ἀδιστάκτως πρὸς τὰ ἐμπρός, ἔχοντες τυφλὴν ἐμπιστοσύνην εἰς τὴν ἀπεριόριστον γενικότητα τῶν τύπων τῆς ἀναλύσεως.

Προτοῦ ἐγκαταλείψωμεν τὸ ἀριθμητικο-αλγεβρικὸν μέρος τῆς Summa, θὰ σημειώσωμεν τὴν ἀκόλουθον ἐκθετικὴν ἐξίσωσιν:

$$x \cdot 2^x = 30, \qquad (\zeta)$$

λυομένην δοκιμαστικῶς. Θά παρατηρήσωμεν δὲ ἀκόμη, ὅτι ὁ Pacioli κατηγορήθη διὰ λογοκλοπίαν, ἐπειδὴ εἰς τὴν «πραγματείαν» XII τῆς «διακρίσεως» IX (ἡ ὁποία ἀφορᾷ ἐμπορεύματα καὶ συνηθείας διαφόρων τόπων) παρενέβαλεν ἕνα Τιμολόγιον τιμῶν ἰσχυουσῶν εἰς διάφορα κρατίδια τῆς Ἰταλίας, τὸ ὁποῖον τάχα παρέλαβεν ἀπὸ δημοσίευμα φέρον τὸ ὄνομα κάποιου Giorgio Chiarim (ὁ τίτλος ἀναφέρεται εἰς τὴν σελίδα 11 τῆς Rara Arithmetica τοῦ D.E. Smith, Boston 1908). Τοιαύτη κατηγορία ὅμως δὲν εἶναι δυνατὸν παρὰ νὰ προέρχεται ἐκ παρεξηγήσεως· τὸ Τιμολόγιον εἶναι κατ' οὐσίαν ἔργον ἀνώνυμον, ὀφειλόμενον εἰς συνεργασίαν διαφόρων προσώπων μὴ ἐχόντων συνείδησιν ὅτι καταβάλλουν πρωτότυπον καὶ προσωπικὴν συμβολὴν ἐκ τῆς ἐξακριβώσεως τῶν τιμῶν τῆς ἀγορᾶς.

Ἐπρόκειτο κατὰ συνέπειαν περὶ κτήματος μὴ ἔχοντος ἰδιοκτήτην, καὶ διὰ τοῦτο ἕκαστος εἶχε δικαίωμα νὰ τὸ ἐκμεταλλευθῇ πρὸς ὄφελός του, ὅπως ἀκριβῶς ἔκαμε καὶ ὁ Pacioli.

201. Ἀναλογιζόμενοι τὴν μακρὰν ὁδόν, τὴν ὁποίαν ἔχομεν ἀκόμη πρὸ ἡμῶν, ἀναγκαζόμεθα νὰ ἐγκαταλείψωμεν τὸ ἀριθμητικὸν μέρος τῆς Summa, διὰ νὰ στραφῶμεν πρὸς τὸ γεωμετρικόν. Κατὰ τὴν συγγραφὴν τοῦ μέρους τούτου, ὁ Pacioli διέθετεν ὑποδείγματα ἐξαίρετα εἰς τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου καὶ τὴν Practica Geometriae τοῦ Fibonacci, τῶν ὁποίων καὶ ἐπωφελήθη τόσον, ὥστε αἱ γεωμετρικαὶ σελίδες τῆς Summa νὰ παρουσιάζουν ἀκόμη ὀλιγωτέραν πρωτοτυπίαν τῆς τῶν ἀριθμητικῶν.

Ἡ ὕλη κατανέμεται εἰς ὀκτὼ τμήματα «εἰς ἔνδειξιν σεβασμοῦ πρὸς τὰς ὀκτὼ μακαριότητας». Ἰδοὺ ἕνας σύντομος πίναξ τῶν περιεχομένων κατὰ τμήματα.

I. Περὶ τριγώνων καὶ τετραπλεύρων, συμφώνως πρὸς τὰ βιβλία I, II, VI τοῦ Εὐκλείδου, μὲ τὴν προσθήκην τοῦ ὑπολογισμοῦ τοῦ ἐμβαδοῦ τριγώνου ἐκ τῶν πλευρῶν κατὰ Fibonacci καὶ τοὺς υἱοὺς τοῦ Muhammed ibn Musa.

II. Διάφοροι περιπτώσεις τοῦ ἑξῆς προβλήματος : «Δίδονται τὰ μήκη δύο πλευρῶν τριγώνου, ἐφ' ὧν φέρονται δεδομένα ἀνὰ ἕνα σημεῖον. Ποῖον τὸ μῆκος τῆς συνδεούσης ταῦτα εὐθείας;».

III. Ὑπολογισμὸς ἐμβαδῶν τετραπλεύρων καὶ ἄλλων πολυγώνων. Ἀλγεβρικὴ λύσις σχετικῶν προβλημάτων, μὲ συχνὴν χρῆσιν δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων.

IV. Θεωρία τοῦ κύκλου κατὰ τὸ VI Βιβλίον τοῦ Εὐκλείδου. Ὑπολογισμὸς τοῦ π μὲ τὴν θεώρησιν ἐγγεγραμμένων καὶ περιγεγραμμένων πολυγώνων κατὰ τὴν μέθοδον τοῦ Ἀρχιμήδους. Κατασκευὴ πίνακος χορδῶν κατὰ τὴν Πτολεμαϊκὴν παράδοσιν τῆς Ἀλμαγέστας.

V. Προβλήματα ἐπὶ τῆς διαιρέσεως τῶν ἐπιπέδων σχημάτων, κατὰ τὴν

παράδοσιν τῶν Fibonacci καὶ τοῦ Muhammed el Bagdadi (§ 135), εἰς τὸν ὁποῖον ὀφείλεται, ὅπως γνωρίζομεν, μία ἀνακατασκευὴ τοῦ ἀπολεσθέντος ἔργου τοῦ Εὐκλείδου ἐπὶ τοῦ ἰδίου θέματος (§ 38). Προστίθενται ἀνάλογα προβλήματα ἐπὶ τοῦ κύκλου VI. Ὑπολογισμὸς ὄγκων στερεῶν κατὰ τὸν Εὐκλείδη.

VII. Περιγραφὴ καὶ χρῆσις διαφόρων ὀργάνων χρησίμων διὰ τὴν μέτρησιν τῶν διαστάσεων τῶν στερεῶν.

VIII. Ὑπὸ τὸν τίτλον «Εἰδικὴ πραγματεία ἐπὶ τῶν κανονικῶν καὶ συνήθων στερεῶν σωμάτων» λύονται μὲ κάποιαν πρωτοτυπίαν 100 προβλήματα, μεταξὺ τῶν ὁποίων ἐξαίρομεν ὡς παραδείγματα τὰ κάτωθι:

a) Ἐκ δύο πλευρῶν τριγώνου καὶ τοῦ ἐμβαδοῦ του εὑρεῖν τὴν τρίτην πλευράν.

b) Ἐκ τοῦ ἐμβαδοῦ καὶ τῆς διαφορᾶς δύο πλευρῶν ὀρθογωνίου νὰ εὑρεθοῦν αἱ πλευραί του.

c) Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἀκτῖνες τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου εἰς τρίγωνον κύκλου.

d) Εἰς τρίγωνον ἰσοσκελὲς νὰ ἐγγραφοῦν δύο κύκλοι μεταξύ των ἴσοι ἐφαπτόμενοι μεταξύ των καὶ τῶν ὁποίων ἕκαστος νὰ ἐφάπτεται τῆς βάσεως καὶ μιᾶς πλευρᾶς.

e) Δοθέντος κύκλου νὰ γραφοῦν πέριξ αὐτοῦ 3 ἢ 4 ἢ 5 περιφέρειαι, ἴσαι, ἐφαπτόμεναι τούτου καὶ τῶν ἑκατέρωθεν ἑκάστης περιφερειῶν.

f) Δοθέντος τοῦ ἐμβαδοῦ τριγώνου καὶ τῆς σχέσεως τῶν πλευρῶν δηλουμένης διὰ τῶν τύπων $x, x+1, x+2$, νὰ ὑπολογιθοῦν αἱ πλευραί.

g) Ἐκ τῶν κορυφῶν τριγώνου ὑψοῦνται κάθετοι ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτοῦ» γνωστοῦ μήκους ἑκάστη. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τριγώνου σημεῖον, ἰσάκις ἀπέχον ἀπὸ τῶν περάτων τῶν τριῶν καθέτων.

h) Δοθέντος τριγώνου νὰ ἐγγραφῇ ἡμικύκλιον μὲ τὴν βάσιν αὐτοῦ ἐπὶ μιᾶς πλευρᾶς καὶ ἐφαπτόμενον τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν τοῦ τριγώνου.

k) Εἰς ἡμισφαίριον νὰ ἐγγραφῇ ὁ μέγιστος κύβος. Ἐδῶ βλέπομεν ὅτι ὁ συγγραφεὺς περιπίπτει εἰς ἀντιλογίαν: διότι ὁ ἐγγραφόμενος εἰς ἡμισφαίριον διαμέτρου D κύβος εἶναι μοναδικὸς καὶ ἔχει πλευρὰν $D/\sqrt{5}$, αὐτὴν ἀκριβῶς ποὺ εὑρίσκει καὶ ὁ Pacioli.

Εἰς τὸ σημεῖον αὐτὸ κλείομεν τὴν ἀνάλυσιν τοῦ περιεχομένου τῆς Summa, ἐξαναγκαζόμενοι ἀπὸ τὴν ἔλλειψιν χώρου καὶ ὄχι ἀπὸ τὴν ἔλλειψιν ὕλης, διότι, ἂν ἐκφρασθῶ μὲ τοὺς λόγους τοῦ ἁρμοδιωτάτου A. de Morgan, «θὰ ἐχρειάζετο ἕνας ὁλόκληρος τόμος διὰ νὰ κάμῃ κανεὶς μίαν προσήκουσαν ἀνάλυσιν τοῦ ἔργου»*. Παρατηροῦμεν πάντως, ὅτι παρ' ὅλας τὰς ἀναμ-

* A. de Morgan: Arithmetical Books from the Invention of Printing to the present Time, Λονδῖνον 1847.

κατεσκεύασε καὶ ἐξέθεσεν τὸ 1489 εἰς τὸ μέγαρον τοῦ καρδιναλίου Giuliano della Rovere εἰς τὴν Ρώμην, ἐνῷ ἐξ ἄλλου εἰς τὴν Divina Proportione δίδει νύξιν διὰ τρεῖς συλλογάς, ἑκάστη τῶν ὁποίων περιελάμβανεν ἑξήκοντα ὑποδείγματα, ὑφισταμένας εἰς Φλωρεντίαν, Μιλᾶνον καὶ Βενετίαν. Ἄγνωστος μᾶς εἶναι ἡ τύχη τῶν συλλογῶν αὐτῶν.

Τὸ II Μέρος τοῦ αὐτοῦ ἔργου ἀποτελεῖ μίαν ἀρχιτεκτονικὴν μονογραφίαν ἐμπνευσθεῖσαν ἀπὸ τὸ ἔργον τοῦ Βιτρουβίου καὶ ἐπὶ τῆς ὁποίας δὲν συντρέχει λόγος νὰ διατρίψωμεν.

Μακροτέρου λόγου ἄξιον θὰ ἦτο τὸ Μέρος III, τὸ ὁποῖον πραγματεύεται θέμα καθαρῶς γεωμετρικὸν καὶ δὴ τὴν θεωρίαν τῶν πολυέδρων, ἂν ἡ ὅλη ἔκθεσις δὲν ἦτο παρὰ μία μὴ ὡμολογημένη καὶ μὴ βελτιωμένη μετάφρασις ἑνὸς ἔργου τοῦ Pier della Francesca, περὶ τοῦ ὁποίου ἔχομεν ἤδη ὁμιλήσει (§ 187).

203. Ἕνα ἔργον τοῦ Pacioli ὑπὸ τὸν τίτλον Prospettiva (Προοπτική) παρέμενεν, ἐξ ὅσων τοὐλάχιστον γνωρίζομεν, εἰς τὸ στάδιον τοῦ σχεδίου. Μὲ τὴν ἐλευθεριότητα ποὺ ἐχαρακτήριζε τὸν Pacioli, δὲν ἀποκλείεται τὸ ἔργον ἐκεῖνο νὰ μὴ ἦτο παρὰ μία ἁπλῆ μετάφρασις τοῦ πολὺ γνωστοῦ ἔργου τοῦ Pier della Francesca (§ 187).

Ἕνα κείμενον ἐπὶ τοῦ γνωστοῦ παιγνιδίου, ποὺ λέγεται ζατρίκιον (σκάκι), ἀπετέλει μέρος ἑνὸς ἐκτενεστέρου ἔργου, φέροντος τίτλον De ludis ἢ Schifanoja, καὶ ἀφιερωμένου εἰς τὸν Francesco Gonzaga καὶ τὴν Isabella d' Este. Τοῦ ἔργου ὅμως τούτου ἐχάθησαν τὰ ἴχνη.

Ὑπὸ καλυτέρας συνθήκας εὑρισκόμεθα ὅσον ἀφορᾷ ἕνα ἄλλο ἔργον ὑπὸ τὸν τίτλον De viribus quantitatis (Περὶ δυνάμεων τῆς ποσότητος) τοῦ ὁποίου σώζεται ἕνα χειρόγραφον, σχεδὸν ἄρτιον, εἰς τὴν Βιβλιοθήκην τοῦ Πανεπιστημίου τῆς Βολωνίας. Πρόκειται περὶ μιᾶς συλλογῆς περιέργων προβλημάτων τοῦ τύπου τῶν Propositiones ad acuendos juvenes τοῦ Ἀλκουΐνου (§ 110). Εἶναι πιθανὸν τὴν συλλογὴν αὐτὴν νὰ ἐγνώριζε καὶ νὰ ἐχρησιμοποίησεν ὁ Bachet de Méziriac, ὁ ὁποῖος, θὰ ἴδωμεν, ὑπῆρξεν ὁ πρῶτος ἐκδότης ἐντύπου συλλογῆς περιέργων προβλημάτων. Διὰ νὰ δικαιολογήσῃ τρόπον τινὰ ὁ Pacioli τὸν ἑαυτόν του, διὰ τὴν προσπάθειαν ποὺ κατέβαλε νὰ συγγράψῃ τὸ ἔργον αὐτό, λέγει ὅτι ζητήματα τοῦ εἴδους τούτου προτείνονται συχνὰ εἰς τοὺς μαθητὰς τῶν δημοσίων σχολείων.

Τὸ ἔργον του De viribus ἀποτελεῖται ἀπὸ τρία μέρη, τῶν ὁποίων οἱ τίτλοι εἶναι οἱ ἀκόλουθοι:

I. Περὶ τῶν δυνάμεων εἰς τὴν ἀριθμητικήν.

II. Περὶ ἀξίας καὶ δυνάμεως εἰς τὴν μηχανικὴν καὶ τὴν γεωμετρίαν.

III. Ἠθικὰ τεκμήρια χρησιμώτατα.

Τὸ Μέρος I περιέχει 81 προβλήματα, τὰ ὁποῖα κατὰ μέγα μέρος ἔχουν

φισβητήτους ἀρετάς, τὰς ὁποίας ἔχει τὸ ἔργον αὐτό, παρέχει συγχρόνως καὶ τὴν ἀπόδειξιν ὅτι κατὰ τοὺς τρεῖς αἰῶνας ποὺ διέρρευσαν μεταξὺ Fibonacci καὶ Pacioli, ἡ ἐπιστήμη μας οὐδεμίαν πραγματικὴν πρόοδον ἐσημείωσεν *.

Τὸ πρᾶγμα εἶναι φανερὸν ὅσον ἀφορᾷ τὴν γεωμετρίαν, ἡ ὁποία — τὸ τὸ παρετηρήσαμεν ἤδη — ὄχι μόνον δὲν ὑπερέβη τὸ ἐπίπεδον, εἰς τὸ ὁποῖον εἶχε φθάσει κατὰ τὴν χρυσῆν περίοδον τῆς ἑλληνικῆς ἐπιστήμης, ἀλλ' οὔτε ἐπλησίασε τὸν βαθμὸν τῆς τελειότητος τῶν ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους καὶ τοῦ Ἀπολλωνίου (πρᾶγμα ἀντιθέτως, ποὺ ἐπέτυχον οἱ Ἄραβες). Ἀλλ' οὔτε ἡ ἄλγεβρα ὑπέστη οὐσιαστικὰς τελειοποιήσεις, εἴτε εἰς τὴν οὐσίαν εἴτε εἰς τὴν μορφήν.

Ὡς πρὸς τὴν οὐσίαν, αἱ ἐξισώσεις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ ἀπετέλουν πάντοτε τὰς Ἡρακλείους στήλας, πέραν τῶν ὁποίων οὐδεὶς ἦτο διατεθειμένος νὰ ριψοκινδυνεύσῃ. Ὡς πρὸς δὲ τὴν μορφὴν αἱ σποραδικαὶ τάσεις πρὸς τὴν συμβολικὴν ἄλγεβραν, τὰς ὁποίας διεγνώσαμεν εἰς τοὺς Chuquet καὶ Widmann, ἀκόμη δὲ καθαρώτερα εἰς τὸν Pacioli, ἠχοῦν ὡς μεμονωμέναι προσπάθειαι, ὡς φωναὶ βοώντων ἐν τῇ ἐρήμῳ.

Θὰ ἴδωμεν μετ' ὀλίγον πῶς ἡ ἄλγεβρα, ἂν καὶ ἔφθασε μετὰ πολλοῦ κόπου εἰς τὴν συγκεκομμένην μορφήν της, ἀπέδειξε, διαρκοῦντος τοῦ XVI αἰῶνος, ἀκόμη μίαν φορὰν διὰ συμβολῆς τοῦ ἰταλικοῦ πνεύματος, ὅτι ἦτο εἰς θέσιν νὰ προσεγγίσῃ εἰς τὴν λύσιν τῶν ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων, τὴν ἐσχάτην Θούλην[58], χωρὶς νὰ ζητήσῃ ἄλλα μέσα ἄγνωστα εἰς αὐτήν.

Ἀλλὰ προτοῦ εἰσέλθωμεν εἰς ἐξέτασιν τῆς ἐνδόξου αὐτῆς ἐποχῆς, ἔχομεν ὑποχρέωσιν νὰ συμπληρώσωμεν τὸ πλαίσιον τοῦ ἐπιστημονικοῦ ἔργου τοῦ Pacioli ἐξετάζοντες καὶ τὰ ἄλλα διασωθέντα ἔργα του.

202. Τὴν 11ην Αὐγούστου 1508 ὁ fra Luca ἔκαμεν εἰς τὴν ἐκκλησίαν τοῦ Ἁγίου Βαρθολομαίου τῆς Βενετίας μίαν διάλεξιν ἐπὶ τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, ὡς εἰσαγωγὴν μιᾶς σειρᾶς μαθημάτων ἐπὶ τοῦ V βιβλίου τοῦ ἀθανάτου ἔργου. Ὀλίγον προηγουμένως εἶχε δημοσιευθῇ εἰς Βενετίαν τῇ μερίμνῃ τοῦ ἰδίου μία νέα ἔκδοσις τῶν Στοιχείων, ἀναθεωρημένη καὶ

* Μία ἀπὸ τὰς αἰτίας (ἂν μὴ ἡ κυριωτέρα), διὰ τὰς ὁποίας περὶ τὰ τέλη τοῦ Μεσαίωνος ἐσημειώθη μία παρακμὴ τῶν μαθηματικῶν σπουδῶν, πρέπει ἴσως νὰ θεωρηθῇ ἡ μεγάλη ὑπόληψις τὴν ὁποίαν ἔτρεφον οἱ ἄνθρωποι πρὸς τὰς νομικὰς σπουδὰς καὶ τὴν ἰατρικὴν ἐπιστήμην. Τοιαύτη ἦτο ἡ ὁρμὴ τῆς νεολαίας πρὸς τὰς σχολὰς τοῦ δικαίου (εἰδικῶς μάλιστα τοῦ ἀστικοῦ δικαίου), ὥστε ἐδέησε νὰ ἐπέμβουν αἱ ἁρμόδιαι ἀρχαὶ πρὸς ἀναχαίτισιν τῆς τάσεως τῶν ἐκκλησιαστικῶν νὰ ἐγκαταλείπουν τὰς ἱερὰς ἐπιστήμας τρεπόμενοι πρὸς τὰς βεβήλους. Εἰς τὴν φιλοδοξίαν καὶ τὴν πλεονεξίαν τῶν ἀνθρώπων ἔδιδεν ἔναυσμα τὸ γνωμικὸν dat Galenus opes, dat Justinianus honores (ὁ Γαληνὸς δίδει πλοῦτον, ὁ Ἰουστινιανὸς τιμάς) καὶ πράγματι γενικὴ ἦτο ἡ διαπίστωσις ὅτι εἰς τοὺς ἰατροὺς ἐπεφυλάσσετο ὁ πλοῦτος, εἰς δὲ τοὺς νομομαθεῖς αἱ ὑψηλότεραι διοικητικαὶ θέσεις τοῦ κράτους. Τάσεις καὶ αἰσθήματα ἀσφαλῶς ὄχι ἀποκλειστικῶς ἀνήκοντα εἰς τὴν ἐποχὴν ποὺ ἐξετάζομεν, ἀλλὰ τῶν ὁποίων αἱ συνέπειαι ἦσαν τότε πολὺ δυσμενέστεραι.

βελτιωμένη ἐν συγκρίσει πρὸς τὰς παλαιοτέρας, τοῦ Campano καὶ Zamberti, εἰς τὴν ὁποίαν παρὰ ταῦτα δὲν ἀπέφυγε τὸ ὀλίσθημα νὰ ταυτίσῃ τὸν συγγραφέα τῶν Στοιχείων μὲ τὸν Εὐκλείδη τὸν Μεγαρικόν. Καὶ δὲν ἀρκεῖ τοῦτο· εἰς ἕνα ἔργον του ἀνέκδοτον, περὶ τοῦ ὁποίου θὰ ὁμιλήσωμεν εἰς τὴν ἑπομένην παράγραφον, ὁ Pacioli καυχᾶται ὅτι «ἔθεσε τελευταῖος τὴν χεῖρα εἰς μίαν ἐξαιρέτως πιστὴν μετάφρασιν ἐκ τῆς λατινικῆς εἰς τὴν καθομιλουμένην τοῦ μεγίστου Μονάρχου τῶν μαθηματικῶν ἐπιστημῶν Εὐκλείδου τοῦ Μεγαρικοῦ».

Τὸ ἑπόμενον ἔτος (1509) ἐδημοσίευσεν, ἐπίσης εἰς τὴν Βενετίαν, ἕνα ἄλλον τόμον, ὁ ὁποῖος, καθὼς καὶ ἡ Summa, ἀποτελεῖται ἀπὸ ὕλην, περισυλλεγεῖσαν ἐκ διαφόρων πηγῶν, φέρει δὲ τὸν τίτλον Divina Proportione· opera a tutti gl' ingegni perspicaci e curiosi necessaria (Θεία ἀναλογία· ἔργον χρήσιμον εἰς ὅλα τὰ ἔξυπνα καὶ περίεργα πνεύματα). Διαιρεῖται εἰς τρία μέρη, τὰ ὁποῖα θὰ ἐξετάσωμεν κεχωρισμένως.

Τὸ I, τὸ καὶ μοναδικὸν δικαιούμενον ἐξ ὁλοκλήρου τοῦ τίτλου Divina Proportione, ἐπερατώθη εἰς τὸ Μιλᾶνον τὴν 14ην Δεκεμβρίου 1497, τουτέστι ὅταν ὁ γεωμέτρης μας εὑρίσκετο εἰς τὴν ὑπηρεσίαν τοῦ Λουδοβίκου Σφόρτσα. Οὕτω ἐξηγεῖται τὸ γεγονὸς ὅτι τὰ θαυμάσια σχήματα, ποὺ κοσμοῦν τὸ βιβλίον τοῦτο, ὀφείλονται εἰς τὴν χεῖρα τοῦ Λεονάρδου ντὰ Βίντσι. Θέμα τοῦ μέρους τούτου εἶναι ἡ διαίρεσις εὐθυγράμμου τμήματος εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον, ἡ «θεία ἀναλογία» κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ Pacioli, ἡ «χρυσῆ τομή» κατὰ τοὺς νεωτέρους. Μετὰ τὴν διατύπωσιν μερικῶν ὁρισμῶν, ὁ συγγραφεὺς μακρηγορεῖ μὲ θεωρίας (ποὺ καταλαμβάνουν πέραν τῶν 66 σελίδων εἰς μέγα φύλλον) εἰλημμένας ἀπὸ τὴν φιλοσοφίαν τοῦ Πλάτωνος καὶ τὴν χριστιανικὴν θεολογίαν, διὰ νὰ δικαιολογήσῃ τὸ ἐπίθετον «θεία», μὲ τὸ ὁποῖον κοσμεῖ τὴν προνομιοῦχον αὐτὴν ἀναλογίαν. Ἐκθέτει κατόπιν σειρὰν θεωρημάτων, σχετικῶν μὲ αὐτήν, παραπέμπων διὰ τὰς ἀποδείξεις των εἰς τὸν Εὐκλείδη καὶ τὸν Campano, καὶ περιοριζόμενος μόνον εἰς τὴν εἰκονογράφησίν των ἐπὶ ἀριθμητικῶν παραδειγμάτων.

Μολονότι ἐκθέτει ἐφαρμογὰς τῆς χρυσῆς τομῆς εἰς τὴν ἀρχιτεκτονικήν, εἰς τὸν προσδιορισμὸν ἀναλογιῶν τοῦ ἀνθρωπίνου σώματος, ἀκόμη δὲ καὶ εἰς τὴν ἁρμονικὴν διαμόρφωσιν τῶν γραμμάτων τοῦ τύπου (stampatelli), δὲν παραλείπει νὰ τονίσῃ ὅτι αἱ σπουδαιότεραι ἐφαρμογαὶ ἀπαντῶνται εἰς τὴν κατασκευὴν τῶν κανονικῶν πολυέδρων, ἐπὶ τῶν ὁποίων διατρίβει μὲ ἰδιαιτέραν εὐχαρίστησιν. Μία εἰκών, ἀναπαραχθεῖσα πολλὰς φοράς, ὅπου ὁ fra Luca παρίσταται ἐνῷ ἐξηγεῖ ἕνα μαθηματικὸν πρόβλημα εἰς Guidobaldo I, δούκα τοῦ Urbino, καὶ εἰς μίαν γωνίαν τοῦ ὁποίου εἰκονίζεται ἕνα κανονικὸν πολύεδρον, μαρτυρεῖ ὅτι τὴν ἐποχὴν ἐκείνην εἶχον ἤδη κατασκευάσει ὑποδείγματα (μοντέλλα) τῶν κανονικῶν στερεῶν. Πράγματι δὲ ὁ Pacioli ὁμιλεῖ εἰς τὴν Summa περὶ τῶν «ὑλικῶν σχημάτων», τὰ ὁποῖα ὁ ἴδιος

σκοπὸν νὰ εὕρουν ἀριθμόν, τὸν ὁποῖον ἄλλοι ἐσκέφθησαν, ἐπὶ τῇ βάσει δεδομένων διαφόρου φύσεως. Δὲν ἀναφέρομεν παραδείγματα, χάριν τῆς συντομίας, ἀφοῦ ἄλλωστε κατὰ τὴν γνώμην μας, δὲν πρόκειται νὰ διδάξουν τίποτε τὸ νέον εἰς τοὺς ἀναγνώστας. Ἂς σημειώσωμεν μόνον ὅτι μερικὰ ἐξ αὐτῶν ἀπαντῶνται εἰς τὸ Liber Abbaci, καὶ ἐπανευρίσκονται εἰς ἔργα τοῦ Tartaglia ὡς καὶ εἰς μεταγενεστέρας δημοσιεύσεις. Μεταφραζόμενα εἰς ἀλγεβρικοὺς τύπους, ἀνάγονται εἰς γραμμικὰς ἐξισώσεις ὡρισμένας ἢ μή.

Περιέχονται ἀκόμη εἰς τὸ πρῶτον μέρος μερικὰ μὴ ἀριθμητικὰ ζητήματα, γνωστὰ εἰς ὅλους, ὅπως π.χ. ἐκεῖνο τῆς μεταφορᾶς διὰ λέμβου ἑνὸς λύκου, ἑνὸς ἐριφίου καὶ ἑνὸς λαχάνου ἢ τὸ ἄλλο τῆς διασώσεως ἑνὸς ἢ δύο ἀτόμων, ἐπιβαινόντων μετ' ἄλλων συνεπιβατῶν, καὶ ὑποκειμένων εἰς ἀποδεκατεύσεις. Εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν οἱ ἐπιβαίνοντες εἶναι 15 Χριστιανοὶ καὶ 15 Μωαμεθανοί, ὁ Pacioli δίδει εἰς στίχους τοὺς μνημοτεχνικοὺς κανόνας πρὸς διάσωσιν τῶν πρώτων, ὅταν ἡ ἐκλογὴ τῶν θυμάτων γίνεται διὰ μετρήσεως ἀνὰ 3,4,5 κλπ. μέχρι 12.

Μεγαλυτέραν σπουδαιότητα ἔχει ἀπὸ μαθηματικῆς ἀπόψεως τὸ χωρίον τὸ σχετικὸν μὲ τὰ μαγικὰ τετράγωνα. Ὁ μαθηματικός μας, συνδέων μὲ αὐτὰ τὰ οὐράνια σώματα, ἀποκαθιστᾷ τὴν ἀκόλουθον ἀντιστοιχίαν (n τὸ πλῆθος τῶν ἀπαρτιζόντων τὸ μαγικὸν τετράγωνον ἀριθμῶν):

n	*οὐράνια σώματα*
9	Κρόνος
16	Ζεύς
25	Ἄρης
36	Ἥλιος
49	Ἀφροδίτη
64	Ἑρμῆς
81	Σελήνη.

Ἐγκαταλείποντες τοιούτους φανταστικοὺς παραλληλισμοὺς περιοριζόμεθα εἰς τὴν παρατήρησιν ὅτι ὁ Pacioli εἶναι ὁ πρῶτος εὐρωπαῖος συγγραφεὺς ποὺ ἠσχολήθη μὲ τὰ μαγικὰ τετράγωνα. Τέλος, ὑπὸ ἄλλην μορφήν, παρουσιάζει τὸ καταπληκτικὸν ἀποτέλεσμα, ποὺ συνεδέθη μὲ τὴν ἐπινόησιν τοῦ ζατρικίου, καὶ διετυπώθη ἀπὸ τὸν Dante, δύο αἰῶνας προηγουμένως, ὡς «ἀναδιπλασιασμός, ποὺ ξεπερνᾶ τὰ ὅρια τοῦ νοῦ».

Τὸ Μέρος II τοῦ De viribus περιλαμβάνει 80 προβλήματα (ἢ δοκουμέντα, διὰ νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὸν ὅρον τοῦ συγγραφέως), ἀκολουθούμενα ἀπὸ 54 φυσικομηχανικὰ παίγνια. Μεταξὺ τῶν γεωμετρικῶν θεμάτων ποὺ πραγματεύεται ἄξια μνείας εἶναι τὰ ἀφορῶντα κατὰ προσέγγισιν γεωμετρικὰς κατασκευὰς κανονικῶν πολυγώνων μὲ 9, 11, 13 καὶ 17 πλευράς. Δυστυχῶς

τὸ σχετικὸν κείμενον, ποὺ ἀφορᾷ ἀκριβῶς τὸ τελευταῖον πολύγωνον, ἔχει φθαρῆ εἰς τοιοῦτον βαθμὸν ὥστε εἶναι ἀκατάληπτον· εἶναι λοιπὸν ἀδύνατον ν' ἀποφανθῶμεν κατὰ πόσον ὁ Pacioli ὑπῆρξεν εἰς τὸ ζήτημα τοῦτο πρόδρομος τοῦ Gauss. Ὅσον ἀφορᾷ τὴν πλευρὰν l_9 τοῦ ἐνναγώνου, ὁ fra Luca ἀποδεικνύει τὴν ἐξάρτησιν αὐτῆς ἀπὸ τὰς πλευρὰς τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου l_3 καὶ τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου l_6, ἐγγεγραμμένων εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον, διὰ τοῦ τύπου :

$$l_9 = \frac{1}{4}\,(l_3 + l_6).$$

Διὰ τὴν πλευρὰν l_{11} τοῦ κανονικοῦ ἐνδεκαγώνου ὁ συγγραφεὺς βεβαιώνει ὅτι εἶναι τὸ μεγαλύτερον ἐκ τῶν δύο τμημάτων εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζεται διὰ χρυσῆς τομῆς τὸ μέγεθος $1/3\ (l_3 + l_6)$. Τέλος ἡ πλευρὰ l_{13} λαμβάνεται, κατ' αὐτόν, διὰ χρυσῆς τομῆς τοῦ μεγέθους $5r/2$ (r = ἡ ἀκτὶς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου).

Τὸ Μέρος III στερεῖται ἐντελῶς ἐπιστημονικοῦ ἐνδιαφέροντος, λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι πρόκειται περὶ συλλογῆς ἀνεκδότων, παροιμιῶν, ποιημάτων κλπ. Ἀναφέρεται ἐκεῖ π.χ. καὶ ἡ γνωστοτάτη ἱστορία τοῦ «αὐγοῦ τοῦ Κολόμβου», τὴν ὁποίαν ὅμως ἀποδίδει ὁ συγγραφεὺς εἰς τὸν Brunelleschi, τὸν διάσημον ἰταλόν, ἀρχιτέκτονα καὶ γλύπτην τῆς Ἀναγεννήσεως (1377 - 1446).

Ἂν ἐξαιρέσωμεν τὸ τελευταῖον τοῦτο Μέρος, ὡς ξένον πρὸς τὸ ἀντικείμενον τῆς ἱστορίας μας, τὸ ἔργον De viribus quantitatis δὲν θὰ ἦτο ἀνάξιον τῆς τιμῆς τῆς ἐκτυπώσεως, μάλιστα δὲ πολὺ χρήσιμον θ' ἀπέβαινεν εἰς τὴν μαθηματικὴν ἐκπαίδευσιν τῆς νεολαίας ἐκείνης τῆς ἐποχῆς. Πάντως ὅμως δὲν θὰ ἐχρησίμευεν εἰς οὐσιαστικὴν μεταβολὴν τῆς κρίσεως, τὴν ὁποίαν πρόκειται νὰ ἐκφέρωμεν διὰ τὸν Pacioli. Ὑπῆρξεν ἄνθρωπος μεγάλης μορφώσεως καὶ διδάσκαλος εὐσυνείδητος καὶ ἐνθουσιώδης, ὁ ὁποῖος εἰς ὅλα τὰ δημοσιεύματά του ἀποδεικνύεται πλήρως ἐνήμερος τῆς ἐπιστήμης τῆς ἐποχῆς του καὶ πρόθυμος νὰ τὴν διαδώσῃ μεταξὺ τῶν νέων, οἱ ὁποῖοι προσέτρεχον εἰς τὰ μαθήματά του.

Ἐὰν δὲν συνεμερίσθη ὁ Pacioli τοὺς ἐνδόξους θριάμβους τῆς ἀλγέβρας, ποὺ πρόκειται τώρα νὰ περιγράψωμεν, εἶναι βέβαιον ὅτι τοὺς παρεσκεύασεν ἐπισημαίνων μὲ ἀκρίβειαν τὰ σημεῖα ἐξορμήσεως τῶν θαρραλέων καὶ ἐνδόξων πρωτοπόρων τοῦ XVI αἰῶνος, περὶ τῶν ὁποίων θὰ πραγματευθῶμεν εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ II Τόμου.

ΤΕΛΟΣ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΤΟΜΟΥ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΜΕΤΑΦΡΑΣΤΟΥ

1. Montucla, Jean Étienne. Γάλλος μαθηματικός γεννηθείς εἰς Λυὼν τῆς Γαλλίας (1725-1799). Τὸ πρῶτον αὐτοῦ πρωτότυπον ἔργον ἦτο «Ἱστορία τῶν ἐρευνῶν ἐπὶ τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου» (1754), δημοσιευθὲν ἀνωνύμως. Τὸ 1759 ἐδημοσίευσε, διὰ πρώτην φοράν, εἰς δύο τόμους τὴν ἐργασίαν του «Ἱστορία τῶν Μαθηματικῶν», ἡ ὁποία ὑπῆρξεν ἡ πρώτη καὶ ἐπὶ μακρὸν ἡ καλυτέρα συγγραφὴ τοῦ εἴδους της. Τὸ ἔργον τοῦτο συνεπληρώθη βραδύτερον ὑπὸ τοῦ Lalande καὶ ἐδημοσιεύθη εἰς τέσσαρας τόμους (1799-1802).

2. Ἐννοεῖ ὁ συγγραφεὺς τὸν πάπαν Καιλεστῖνον V (1215-1296), ὁ ὁποῖος ἀνακηρυχθεὶς πάπας τὸ 1294, ἐν ἀγνοίᾳ του καὶ μὴ δυνηθεὶς ἐκ τῆς ἀπειρίας του ν' ἀνταποκριθῇ εἰς τὰς βαρείας ὑποχρεώσεις τοῦ παπικοῦ θρόνου, παρητήθη τῆς ἐξουσίας μετὰ πεντάμηνον.

3. Περὶ τῆς ἐκπληκτικῆς συμβολῆς τοῦ Grotenfend εἰς τὴν ἀποκρυπτογράφησιν τῆς σφηνοειδοῦς γραφῆς βλ. C.W. Ceram «Götter, Gräber und Gelehrte», Hamburg, 1949, ἢ ἑλληνικὴν ἔκδοσιν Γεμεντζοπούλου, ἐν Ἀθήναις, ὑπὸ τὸν τίτλον: «Θεοί, τάφοι καὶ σοφοί», κατὰ μετάφρασιν Α. Παγκάλου (Κεφ. 20 καὶ 21).

4. Εἰς συμπλήρωσιν τῶν ὅσων ἀναφέρονται ὑπὸ τοῦ συγγραφέως, σχετικῶς πρὸς τὰς μαθηματικὰς γνώσεις τῶν Βαβυλωνίων, δύνανται νὰ χρησιμεύσουν τὰ ὅσα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ θέματος ἀναφέρει ὁ καθηγητὴς καὶ ἱστορικὸς τῶν Μαθηματικῆς Ἐπιστήμης, κ. Εὐάγγελος Σταμάτης εἰς πρόσφατον πραγματείαν του δημοσιευθεῖσαν εἰς τὸ περιοδικὸν τῆς Ε.Μ.Ε «Ὁ Εὐκλείδης» καὶ εἰδικῶς εἰς τὰ τεύχη Σεπτεμβρίου, Ὀκτωβρίου, Νοεμβρίου, 1968, εἰς τὰ ὁποῖα καὶ παραπέμπομεν.

Ἰδιαιτέραν σημασίαν ἔχουν αἱ ὑπὸ τοῦ κ. καθηγητοῦ κ. Ε. Σταμάτη διατυπούμεναι ἐκεῖ παρατηρήσεις, ὅτι δηλαδή: α) Δὲν ἔχει ἀποδειχθῆ ὁ χρόνος γραφῆς τοῦ κειμένου τῶν βαβυλωνιακῶν πινακιδίων μαθηματικοῦ περιεχομένου καὶ ἑπομένως ἡ τοποθέτησις τοῦ χρόνου αὐτοῦ περὶ τὸ 2000— 1500 π.Χ. εἶναι αὐθαίρετος, β) αἱ μαθηματικαὶ γνώσεις αἱ περιεχόμεναι εἰς τὰ πινακίδια, ἐὰν ἔχουν ἀναγνωσθῆ καλῶς, εἶναι ὅμοιαι πρὸς τὰς μαθηματικὰς γνώσεις τῶν Ἑλλήνων, τὰς ἀπαντωμένας εἰς τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου, τὰς πραγματείας τοῦ Ἥρωνος καὶ τὰ Ἀριθμητικὰ τοῦ Διοφάντου, δηλ. τὴν Ἄλγεβραν τῶν Ἀρχαίων Ἑλλήνων, ἔχουν δὲ γραφῆ κατὰ συνέπειαν τὰ πινακίδια μετὰ τὴν κατάληψιν τῆς Μεσοποταμίας ὑπὸ τοῦ Μεγάλου Ἀλεξάνδρου καὶ συνεπῶς περιέχουν γνώσεις ἑλληνικῆς προελεύσεως.

5. Τὸ σχετικὸν χωρίον τοῦ Ἡροδότου (II,109) ἔχει ὡς ἑξῆς: «Κατανεῖμαι δὲ τὴν χώραν Αἰγυπτίοις ἅπασι τοῦτον ἔλεγον τὸν βασιλέα (Σέσωστριν) κλῆρον ἴσον ἑκάστῳ τετράγωνον διδόντα, καὶ ἀπὸ τούτου τὰς προσόδους ποιήσασθαι, ἐπιτάξαντα ἀποφορὴν ἐπιτελέειν κατ' ἐνιαυτόν· εἰ δέ τινος τοῦ κλήρου ὁ ποταμός τι παρέλοιτο, ἐλθὼν ἂν πρὸς αὐτὸν ἐσήμαινε τὸ γεγενημένον· ὁ δὲ ἔπεμπε τοῖς ἐπισκεψομένοις καὶ ἀναμετρήσοντας ὅσῳ ἐλάσσω ὁ χῶρος γέγονε, ὅπως τοῦ λοιποῦ κατὰ λόγον τῆς τεταγμένης ἀποφορῆς τέλεοι· δοκέει δέ μοί γε ἐνθεῦτεν γεωμετρίη εὑρεθεῖσα εἰς τὴν Ἑλλάδα ἐπανελθεῖν».

6. Πληρεστέρας πληροφορίας διὰ τὸν πάπυρον τοῦ Rhind καὶ ἄλλα νεώτερα ἱστο-

ρικὰ δοκουμέντα τῆς ἐπιστήμης τῶν Αἰγυπτίων εὑρίσκομεν εἰς τὴν ἐργασίαν τοῦ καθηγητοῦ κ. Ε. Σταμάτη «Ἱστορία τῶν Μαθηματικῶν», περιοδικὸν τῆς ΕΜΕ «Ὁ Εὐκλείδης», 1968 καὶ πέραν).

7. Ἡ λέξις παράγεται ἐκ τοῦ «ἁρπεδόνη» ποὺ σημαίνει σχοινί, πρὸς παγίδευσιν ζώων ἢ πρὸς μέτρησιν μήκους, καὶ τοῦ «ἅπτομαι».

8. Γνωρίζομεν π.χ. ἐκ τῆς Εὐκλειδείου Γεωμετρίας τὸ θεώρημα: «Ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ μεγαλύτερον μέρος τῆς ἀκτῖνος τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου, διαιρεθείσης εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον».

9. Δάντη: Ἡ Θεία Κωμωδία, ἔμμετρος μετάφρασις Νίκου Καζαντζάκη, Ἀθῆναι 1965.

10. Ἐννοεῖ τὴν διατήρησιν τοῦ μερικοῦ λόγου ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, τὴν ἀναλογίαν μεταξὺ τμημάτων τῆς μιᾶς σημειοσειρᾶς πρὸς τὰ ἀντίστοιχα τῆς ἄλλης, τεμνομένων ὑπὸ δέσμης παραλλήλων εὐθειῶν.

11. Πρόκλος ὁ Λύκιος (412 - 485 μ.Χ.). Νεοπλατωνικὸς φιλόσοφος τῆς Ἀθηναϊκῆς Σχολῆς, διδάξας ἐπὶ 50ετίαν σχεδὸν εἰς τὰς Ἀθήνας (§62). Διὰ τὸν Πυθαγόραν λέγει ὁ Πρόκλος εἰς τὰ Σχόλιά του: «Τὴν περὶ γεωμετρίαν φιλοσοφίαν εἰς σχῆμα παιδείας ἐλευθέρου μετέστησεν, ἄνωθεν τὰς ἀρχὰς αὐτῆς ἐπισκοπούμενος καὶ ἀΰλως καὶ νοερῶς τὰ θεωρήματα διερευνώμενος, ὃς δὴ καὶ τὴν τῶν ἀλόγων (ἀσυμμέτρων) πραγματείαν καὶ τὴν τῶν κανονικῶν πολυέδρων σύστασιν ἀνεῦρεν».

12. «Ἔστι μὲν ἀρχαῖα, φασὶν οἱ περὶ τὸν Εὔδημον, καὶ τῆς Πυθαγορείων μούσης εὑρήματα ταῦτα, ἥ τε παραβολὴ τῶν χωρίων καὶ ἡ ὑπερβολὴ καὶ ἡ ἔλλειψις· ἀπὸ δὲ τούτων καὶ οἱ νεώτεροι (πρῶτος ὁ Ἀπολλώνιος) τὰ ὀνόματα λαβόντες μετήγαγον αὐτὰ καὶ ἐπὶ τὰς κωνικὰς λεγομένας γραμμάς, καὶ τούτων τὴν μὲν παραβολήν, τὴν δὲ ὑπερβολὴν καλέσαντες, τὴν δὲ ἔλλειψιν».

(Α. Ἀναστασιάδου: Ἱστορία τῶν Μαθηματικῶν παρὰ τοῖς Ἀρχαίοις Ἕλλησι, Ἀθῆναι 1929, Ἔκδοσις Ε.Μ.Ε).

13. Τὰ περὶ ὧν ὁ λόγος προβλήματα εὑρίσκονται εἰς τὰ Στοιχεῖα ὑπ' ἀριθμούς: I, 44 (παραβολή) VI, 28 (ὑπερβολή) VI, 29 (παραβολή) (βλ. Ἔκδοσιν Ε. Σαμάτη: Εὐκλείδου Γεωμετρία, Ἀθῆναι 1952—1957).

14. Ἐννοεῖ τὰς προτάσεις τῶν Στοιχείων:

VI,8: «ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ, τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις»

VI,31: «Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς εἶδος ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν εἴδεσι τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις».

15. Λέγει ὁ Ἀριστοτέλης εἰς τὰ «Ἀναλυτικὰ Πρότερα» 41a26: «Ἀσύμμετρος ἡ διάμετρος διὰ τὸ γίνεσθαι τὰ περιττὰ ἴσα τοῖς ἀρτίοις συμμέτρου τεθείσης. Τὸ μὲν οὖν ἴσα γίνεσθαι τὰ περιττὰ τοῖς ἀρτίοις συλλογίζεσθαι, τὸ δ' ἀσύμμετρον εἶναι τὴν διάμετρον ἐξ ὑποθέσεως δείκνυσιν, ἐπεὶ ψεῦδος συμβαίνει διὰ τὴν ἀντίφασιν. Τοῦτο γὰρ ἦν τὸ διὰ τοῦ ἀδυνάτου συλλογίζεσθαι, τὸ δεῖξαί τι ἀδύνατον διὰ τὴν ἐξ ἀρχῆς ὑπόθεσιν».

Περισσότερα ἐπὶ τῆς ἀποδείξεως τῆς περὶ ἧς ὁ λόγος ἱστορικῆς σημασίας προτάσεως βλ. εἰς εἰσαγωγικὰ σχόλια τοῦ καθηγητοῦ κ. Ε. Σταμάτη εἰς τὸν Τόμον II (1953) τῆς ὑπὸ τοῦ ἰδίου ἐκδόσεως τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου.

16. Ἡ ἀνακάλυψις τῶν ἀσυμμέτρων μεγεθῶν, χαρακτηριζομένη εὐλόγως ὡς «ζήτημα πρώτης τάξεως εἰς τὴν ἱστορίαν τοῦ πνεύματος καὶ τῆς λογικῆς», συνεκλόνισε τὴν πυθαγόρειον κοινότητα, λόγῳ τοῦ ἀνατρεπτικοῦ ἀντικτύπου, τὸν ὁποῖον εἶχεν ἐπὶ τῆς ἀριθμοθεωρίας των, ἔτι δὲ μᾶλλον ἐπὶ τῆς κοσμολογίας των, ἡ ὁποία εἶχεν ἀριθμητικὴν βάσιν. Ἔγινε λοιπὸν αἰσθητὴ ὡς μία βαρεῖα κρίσις, τῆς ὁποίας ἡ σκιὰ φθάνει

οὐσιαστικῶς μέχρι τῶν ἡμερῶν μας, ἀσχέτως πρὸς τὴν εὐφυῆ παράκαμψιν τῆς κρίσεως διὰ τῶν ἐργασιῶν τοῦ Εὐδόξου (V βιβλίον τῶν Στοιχείων) καὶ τῆς εἰσαγωγῆς τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν (Weierstrass, Dedekind, Cantor).

Σπουδαίαν συμβολὴν εἰς τὴν κατανόησιν τῆς ἀξίας τῶν ἑλληνικῶν ἐπιτευγμάτων πρὸς παράκαμψιν τῆς κρίσεως καὶ τῆς σημασίας τοῦ ζητήματος διὰ τὴν ἀνάπτυξιν τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης ἀποτελεῖ τὸ ἄρθρον τῶν Helmut hasse καὶ Heinrich Scholz «Ἡ κρίσις τῶν ἀρχῶν τῆς Ἑλληνικῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης», δημοσιευθὲν εἰς τὸ Δελτίον τῆς Ε.Μ.Ε (Τόμος ΙΔ, 1933), κατὰ μετάφρασιν Χρ. Καπνουκάγια καὶ Φ. Βασιλείου.

17. Τοῦτο ἀναφέρεται εἰς τὸν Θεαίτητον τοῦ Πλάτωνος 147 D.

18. Διὰ πληρεστέρας πληροφορίας ἐπὶ τοῦ Δηλίου προβλήματος βλ. Ε. Σταμάτη: Τὸ Δήλιον πρόβλημα καὶ ἡ τριχοτόμησις τῆς γωνίας, Ἀθῆναι, 1949, ἢ ἐπίσης ἄρθρον τοῦ ἰδίου ὑπὸ τὸν τίτλον «Δήλιον πρόβλημα» εἰς τὸν Ε' τόμον τοῦ Ἐγκυκλοπαιδικοῦ Λεξικοῦ «Ἥλιος».

19. Ὁ συγγραφεὺς φαίνεται συμμεριζόμενος τὴν γνώμην μιᾶς μερίδος ἐπιστημόνων καὶ τοῦ Ἀριστοτέλους, ὅτι τὰ ἐπιχειρήματα τοῦ Ζήνωνος τοῦ Ἐλεάτου ἔχουν πράγματι ἀναιρεθῆ καὶ ὅτι ἑπομένως δὲν ἀποτελοῦν παρὰ σοφιστικὰ παράδοξα. Τὴν ἐσφαλμένην αὐτὴν ἀντίληψιν ἑδραιώνει ἴσως τὸ γεγονός, ὅτι τὰ μαθηματικά, διὰ τὴν περίπτωσιν π.χ. τοῦ Ἀχιλλέως (ταχύτητος $υ_1$) καὶ τῆς χελώνης (ταχύτητος $υ_2$) προπορευομένης κατά τινα στιγμήν, ἀπόστασιν α, δίδουν ἀπάντησιν ἀνεπίδεκτον πάσης ἀμφισβητήσεως, ὅτι ὁ πρῶτος θὰ φθάσῃ τὴν χελώνην μετὰ χρόνον t ἐντελῶς ὡρισμένον :

$$t = \frac{\alpha}{\upsilon_1 - \upsilon_2}.$$

Ἀλλ' εἶναι προφανές, ὅτι τοῦτο δὲν ἦτο ἄγνωστον εἰς τὸν Ζήνωνα, ἀφοῦ ἐκ τῆς ἐμπειρίας του ἐγνώριζε καλῶς τὴν μαθηματικὴν βεβαιότητα τῆς συναντήσεως. Ἡ ἔννοια λοιπὸν τοῦ ἐπιχειρήματος δὲν εἶναι ἂν καὶ πότε ὁ Ἀχιλλεὺς θὰ φθάσῃ τὴν χελώνην, ἀλλὰ πῶς, διατί τὴν φθάνει.

Εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ ζήτημα τίθεται ὑπὸ τοῦ Ζήνωνος ἐπὶ φιλοσοφικοῦ ἐπιπέδου, ἡ δὲ ἀπάντησις ἐπὶ τούτου δὲν ἔχει ἀκόμη δοθῆ. Λέγει ὁ Κ. Γεωργούλης: «Καίτοι αἱ ἀπαντήσεις τοῦ Ἀριστοτέλους ἐπεκράτησαν καὶ ἀποτελοῦν, ὡς πρὸς τὰς ἐννοίας τοῦ ἀπείρου καὶ τοῦ ὁρίου τὴν βάσιν τοῦ διαφορικοῦ καὶ ὁλοκληρωτικοῦ λογισμοῦ, ἐν τούτοις τὰ προβλήματα ἅτινα ἔθεσεν ὁ Ζήνων, μετὰ πάροδον 2300 ἐτῶν παραμένουν, καὶ θεωροῦνται ἀναπάντητα καὶ ἄλυτα» (Ἐγκυκλοπαιδικὸν Λεξικὸν «ΗΛΙΟΣ», τόμος Ζ σελὶς 809). Σχετικῶς βλ. καὶ ἄρθρον τοῦ Ε. Σταμάτη : «Ζήνων ὁ Ἐλεάτης», εἰς τὸ αὐτὸ ἐγκυκλοπαιδικὸν λεξικόν.

20. Τὸ σχετικὸν χωρίον τοῦ Δάντη ἔχει ὡς ἑξῆς, κατὰ μετάφρασιν Νίκου Καζαντζάκη :

«Ξανοίγεται συχνά, καὶ μὲ ζημιά του,
ποὺ δίχως νοῦ ψαρεύει τὴν ἀλήθεια,
τί ὡς κίνησε δὲν ξαναγέρνει πίσω.
Τοῦτο τρανὰ στὸν κόσμο ἐφανερώθη·
ὁ Παρμενίδης, Μέλισσος καὶ Βρύσος
κι ἄλλοι, χωρὶς νὰ ξαίρουν ποῦ, κινῆσαν.»
(Παράδεισος, XIII, 123-126).

21. Εἰς τὸ πρωτότυπον (ἔκδοσις 1929) ἀναγράφεται : «...μεταξὺ Σωκράτους καὶ καταλύσεως τῆς ἑλληνικῆς ἀνεξαρτησίας». Πρόκειται προφανῶς περὶ πλάνης εἰς τὸ ἀρχικὸν κείμενον, καθ' ὅσον κατὰ τὴν προευκλείδειον ἐποχήν, ἥτις ἐκτείνεται μέχρι τοῦ

θανάτου τοῦ Εὐκλείδου (270 π.Χ.), ἡ Ἑλλὰς οὐδεμίαν ἀνεξαρτησίαν ἀπώλεσε. Πιθανῶς ὁ συγγραφεὺς νὰ ἐννοῇ ὡς ἀπώλειαν ἀνεξαρτησίας τὴν ὁμόσπονδον συμμαχίαν τῶν ἑλληνικῶν πόλεων ὑπὸ τὴν μακεδονικὴν ἡγεσίαν. Ἀλλὰ εἶναι γνωστὸν ἐκ τῆς Ἱστορίας, ὅτι ὁ Φίλιππος καθώρισεν ὁ ἴδιος τοὺς Μακεδόνας «συμμάχους» τῶν Ἑλλήνων, ὁ ὅρος δὲ οὗτος ἐτηρήθη λόγῳ καὶ ἔργῳ ὑπὸ τοῦ Μεγάλου Ἀλεξάνδρου, ὑπὸ τὴν ἡγεσίαν τοῦ ὁποίου ἀνοίγεται νέα μεγάλη ἱστορικὴ περίοδος, ἡ γνωστὴ ὡ κυριαρχία τοῦ ἑλληνισμοῦ. Διὰ τοὺς ἀνωτέρω λόγους ἐθεώρησα ἐπιβαλλομένην μίαν διόρθωσιν, προτιμήσας νὰ γράψω «...μεταξὺ Σωκράτους καὶ θανάτου τοῦ Μεγάλου Ἀλεξάνδρου».

22. Λογικὴ διασάφησις τῆς ἀναλυτικῆς μεθόδου, ὡς γενικοῦ τρόπου λειτουργίας τῆς νοήσεως, περιέχεται εἰς ἄρθρον, δημοσιευθὲν εἰς τὸ Δελτίον τῆς Ε.Μ.Ε, Τόμος ΚΘ Α', Β', Γ', 1955 ὑπὸ τὸν τίτλον: «Περὶ ἀντιστροφῆς καὶ ἀναστροφῆς τῶν ὑποθετικῶν σωρειτῶν» ὑπὸ Μιχ. Κ. Καβαίου.

23. Εἰς τὸν Πλάτωνα ἀπεδόθη ὑπὸ τῶν μεταγενεστέρων ἡ ἐπινόησις ὀργάνου λύοντος μηχανικῶς τὸ ζήτημα, ὅπερ, ὡς εἴδομεν ἀλλαχοῦ, συνδέεται στενώτατα μὲ τὸ πρόβλημα τοῦ διπλασιασμοῦ τοῦ κύβου. (§25).

24. Αἱ σχετικαὶ πρὸς τὴν συμβολὴν τῶν Ἀρχαίων εἰς τὴν Ἀστρονομίαν ἐργασίαι τοῦ διασήμου ἰταλοῦ ἀστρονόμου εἶναι:

α) Αἱ ὁμόκεντροι σφαῖραι Εὐδόξου, Καλίππου καὶ Ἀριστοτέλους (1873)

β) Οἱ πρόδρομοι τοῦ Κοπερνίκου κατὰ τὴν ἀρχαιότητα (1873).

25. Ἡ ἄποψις τοῦ συγγραφέως, ὅτι ὁ Εὐκλείδης ἐγεννήθη εἰς Ἀλεξάνδρειαν, ἀποτελεῖ ὑπόθεσιν, ὡς μὴ ἐξηκριβωμένη ἱστορικῶς. Ὁ τόπος καὶ ὁ χρόνος γεννήσεως καὶ θανάτου τοῦ Στοιχειωτοῦ παραμένουν ἄγνωστα. Ἀραβικαὶ πηγαί, πολὺ ὀλίγον ἀξιόπιστοι, ἀναφέρουν ὅτι ἐγεννήθη εἰς Τύρον τῆς Συρίας, διὸ καὶ Τύριος προσωνομάζετο, ἐκ πατρὸς ἕλληνος, Ναυκράτους καλουμένου, γεννηθέντος εἰς Δαμασκὸν καὶ διαβοῦντος εἰς Τύρον.

26. Πρόκειται περὶ τῆς προτάσεως ὑπ' ἀρ. 20 τοῦ IV βιβλίου τῶν Στοιχείων: «οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ πλείους εἰσὶ παντὸς τοῦ προτεθέντος πλήθους πρώτων ἀριθμῶν». (βλ. Ε. Σταμάτη: Εὐκλείδου Γεωμετρία).

27. Ἡ μέθοδος αὕτη ἀπορρέει ἀμέσως ἐκ τοῦ Θεωρήματος 36 τοῦ IX βιβλίου τῶν Στοιχείων, κατὰ τὸ ὁποῖον, ἐὰν θεωρήσωμεν τὴν γεωμετρικὴν πρόοδον,

$$1, 2, 4, 8, 16, \ldots,$$

σχηματίσωμεν δὲ τὰ μερικὰ ἀθροίσματα ταύτης μέχρις ὅτου μερικόν τι ἄθροισμα εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος, καὶ πολλαπλασιάσωμεν τὸ μερικὸν τοῦτο ἄθροισμα ἐπὶ τὸν τελευταῖον προσθετέον τοῦ μερικοῦ ἀθροίσματος, τὸ προκῦπτον γινόμενον εἶναι ἀριθμὸς τέλειος. Βλ. Ε. Σταμάτη: Εὐκλείδου Γεωμετρία, Τόμος ΙΙ (βιβλία V, VI, VII, VIII, IX), ἐπεξηγήσεις εἰς τὸ βιβλίον IX.

28. Ἤδη ὁ σχολιαστὴς Πρόκλος (412-485 μ.Χ.) ἀποφαίνεται ὑπὲρ τῆς γνώμης ταύτης ὁμιλῶν περὶ τοῦ Στοιχειωτοῦ εἰς τὸ ἀκόλουθον χωρίον: «Εὐκλείδης ὁ τὰ Στοιχεῖα συναγαγὼν καὶ πολλὰ μὲν τοῦ Εὐδόξου συντάξας, πολλὰ δὲ τῶν Θεαιτήτου τελειωσάμενος, ἔτι δὲ τὰ μαλακώτερον δεικνύμενα τοῖς ἔμπροσθεν εἰς ἀνελέγκτους ἀποδείξεις ἀναγαγών· γέγονε δὲ οὗτος ὁ ἀνὴρ ἐπὶ τοῦ πρώτου Πτολεμαίου· νεώτερος μὲν ἐστι, τῶν περὶ Πλάτωνα, πρεσβύτερος δὲ Ἐρατοσθένους καὶ Ἀρχιμήδους καὶ τῇ προαιρέσει δὲ Πλατωνικὸς ἐστὶ καὶ τῇ φιλοσοφίᾳ ταύτῃ οἰκεῖος, ὅθεν δὴ καὶ τῆς συμπάσης στοιχειώσεως τέλος προεστήσατο τὴν τῶν καλουμένων Πλατωνικῶν σχημάτων σύστασιν».

29. Ἡ ἐργασία αὕτη, φέρουσα τὸν τίτλον «Κατατομὴ Κανόνος» καὶ περιέχουσα στοιχεῖα θεωρίας τῆς μουσικῆς τοῦ Πυθαγόρου, ὑποστηρίζεται ὅτι δὲν εἶναι γνήσιον ἔργον τοῦ Εὐκλείδου. Κατ' ἄλλους ἀποτελεῖ περίληψιν γενικωτέρου, μὴ σῳζομένου,

ἔργου τοῦ Εὐκλείδου ὑπὸ τὸν τίτλον «Στοιχεῖα Μουσικῆς» (βλ. Ε. Σταμάτη: Εὐκλείδου Γεωμετρία, Τόμος Ι, Εἰσαγωγὴ σελ. 19).

30. Περὶ τοῦ τρόπου εὑρέσεως καὶ περὶ τοῦ περιεχομένου τοῦ σπουδαιοτάτου αὐτοῦ ἔργου τοῦ Ἀρχιμήδους «Περὶ τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς Ἐρατοσθένην ἔφοδος». βλ. ἄρθρον Κ. Δ. Γεωργούλη εἰς τὸ Ἐγκυκλοπαιδικὸν Λεξικὸν τοῦ «Ἡλίου» καὶ εἰς τὴν λέξιν «Ἀρχιμήδης». Ἐπίσης βλ. Ε. Σταμάτη «Ἀρχιμήδους τετραγωνισμὸς Παραβολῆς» Ἀθῆναι 1946.

31. Τὰ Λήμματα ἐσώθησαν εἰς ἀραβικὴν γλῶσσαν, ἐκ τῆς ὁποίας καὶ μετεφράσθησαν εἰς τὴν λατινικὴν ὑπὸ τὸν τίτλον Liber Assuptorum, ἐξεδόθησαν δὲ τὸ πρῶτον ἐν Λονδίνῳ κατὰ τὸ 1659 ὑπὸ τοῦ S. Foster. Βραδύτερον μετεφράσθησαν καὶ εἰς ἄλλας γλώσσας. Παρ' ἡμῖν ἐδημοσιεύθη διὰ πρώτην φορὰν ἑλληνικὴ μετάφρασις τῶν Λημμάτων εἰς τὸ Δελτίον τῆς Ε.Μ.Ε. τοῦ ἔτους 1965, ὀφειλομένη εἰς τὸν καθηγητὴν καὶ ἱστορικὸν τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης κ. Ε. Σταμάτη, ὅστις μάλιστα δὲν ἐφείσθη κόπων ν' ἀνακατασκευάσῃ μετὰ θαυμαστῆς ἐπιμελείας καὶ νὰ δημοσιεύσῃ παραλλήλως πρὸς τὸ νεοελληνικόν, καὶ τὸ ἀρχαῖον, ὑπ' αὐτοῦ ἀνακατασκευασθὲν κείμενον εἰς σικελικὴν δωρικὴν διάλεκτον (Δελτίον Ε.Μ.Ε, Νέα σειρά, 1965, Τόμος 6,ΙΙ, σελ. 265-297).

32. Σχετικῶς πρὸς τὴν ὀνομασίαν σάλινον, ὁ καθηγητὴς κ. Ε. Σταμάτη φρονεῖ ὅτι πρόκειται περὶ λάθους κατὰ τὴν ἀντιγραφὴν καὶ ὅτι ἡ ἑλληνικὴ λέξις ἦτο σελήνιον, ἤτοι μηνίσκος σελήνης, οὕτω δὲ εἶχε διορθώσει τὸ κείμενον καὶ ὁ Isaac Barrow, ὁ καθηγητὴς τοῦ Isaac Newton. Κατὰ τὸν T.L.Heath (Introduction to the works of Archimedes, 1897) ἡ λέξις προῆλθεν ἀπὸ ἐξελληνισμὸν τῆς λατινικῆς λέξεως salinum, ποὺ σημαίνει ἁλατοδοχεῖον, καὶ δὲν ὀφείλεται εἰς τὸν Ἀρχιμήδη, ἀλλὰ εἰς μεταγενεστέρους ἀντιγραφεῖς.

Ὅσον ἀφορᾷ τὴν σημασίαν τῆς λέξεως ἄρβηλος ἢ ἄρβηλον, ὁ Heath παραπέμπει εἰς σχόλια τοῦ Νικάνδρου, γραμματικοῦ, ποιητοῦ καὶ ἰατροῦ τοῦ Β' αἰῶνος π.Χ. περιεχόμενα εἰς τὸ ἔργον του Θηριακὰ 423: «ἄρβηλοι λέγονται τὰ κυκλοτερῆ σιδήρια, οἷς οἱ σκυτοτόμοι τέμνουσι καὶ ξέουσι τὰ δέρματα».

33. Κατὰ τὸν Πάππον, ἡ πραγματεία τοῦ Ἀπολλωνίου περιελάμβανε τὰς ἀκολούθους περιπτώσεις νεύσεων:

I. Δοθέντος (a) ἡμικυκλίου καὶ εὐθείας καθέτου ἐπὶ τὴν διάμετρον ἢ (b) δυὸ ἡμικυκλίων μὲ τὰς βάσεις ἐπ' εὐθείας, παρεμβαλεῖν μεταξὺ τούτων εὐθεῖαν δοθέντος μήκους νεύουσαν (ἤτοι διερχομένην) πρὸς μίαν γωνίαν τοῦ ἡμικυκλίου ἢ ἐντὸς τῶν ἡμικυκλίων ἀντιστοίχως.

II. Δοθέντος ρόμβου μὲ προεκταθεῖσαν τὴν μίαν πλευράν, παρεμβαλεῖν εὐθεῖαν δοθέντος μήκους εἰς τὴν ἐξωτερικὴν γωνίαν νεύουσαν πρὸς τὴν ἀντικειμένην κορυφὴν τοῦ ρόμβου.

III. Εἰς δοθέντα κύκλον παρεμβαλεῖν χορδὴν δοθέντος μήκους νεύουσαν πρὸς δοθὲν σημεῖον.

Τὸ βιβλίον I τοῦ Ἀπολλωνίου περιελάμβανε 4 περιπτώσεις τοῦ I (a), 2 περιπτώσεις τοῦ III καὶ 2 τοῦ II. Τὸ βιβλίον II περιεῖχε 10 περιπτώσεις τοῦ I (b).

(Βλ. T.L. Heath: A manual of Greek Mathematics, Dover publications, 1963).

34. Τὸ σύγγραμμα τοῦτο ἀναφέρει ὁ Πρόκλος· «καθάπερ Ἀπολλώνιος ἐν τῷ περὶ κοχλίου γράμματι δείκνυσι».

35. Ὁ Ἀπολλώνιος εἰς τὴν εἰσαγωγικὴν πρὸς Εὔδημον ἐπιστολήν του, ὁμιλῶν διὰ τὸ περιεχόμενον τῶν Κωνικῶν λέγει σχετικῶς πρὸς τὸν ἐπὶ τρεῖς καὶ τέσσαρας γραμμὰς τόπον τὰ ἑξῆς: «τὸ δὲ τρίτον (βιβλίον) πολλὰ καὶ παράδοξα θεωρήματα χρήσιμα πρός τε τὰς συνθήκας τῶν στερεῶν τόπων καὶ τοὺς διορισμούς, ὧν τὰ πλεῖστα καὶ κάλλιστα ξένα (δηλαδὴ νέα), ἃ καὶ κατανοήσαντες συνείδομεν μὴ

συντιθέμενον ὑπὸ Εὐκλείδου τὸν ἐπὶ τρεῖς καὶ τέσσαρας γραμμὰς τόπον, ἀλλὰ μόριον τὸ τυχὸν αὐτοῦ καὶ τοῦτο οὐκ' εὐτυχῶς· οὐ γὰρ ἦν δυνατὸν ἄνευ τῶν προσευρημένων ἡμῖν τελεωθῆναι τὴν σύνθεσιν».

36. Ὁ Halley ἐδημοσίευσε τὸ ἔργον εἰς λατινικὴν μετάφρασιν τὸ 1706, ὑπὸ τὸν τίτλον Sectio Rationis.

37. «Ἀπὸ τὰ σχόλια τοῦ Πάππου δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν ὅτι ἡ ἐργασία τοῦ Ἀπολλωνίου περιελάμβανεν ἐξονυχιστικὴν διερεύνησιν τοῦ προβλήματος. Ὁ προσδιορισμὸς τοῦ P μέσῳ τῆς ἐξισώσεως AP. CP = λ.BP. DP δὲν εἶναι καθ' ἑαυτὸν δυσχερής, διότι τὸ πρόβλημα δύναται ἀμέσως νὰ τεθῇ ὑπὸ ἐξίσωσιν τετραγωνικῆς μορφῆς, τὴν ὁποίαν οἱ Ἕλληνες δὲν εἶχον καμμίαν δυσκολίαν ν' ἀναγάγουν εἰς π α ρ α β ο λ ὴ ν χ ω ρ ί ο υ. Ἀλλ' ἐκ τῶν δεδομένων τοῦ Πάππου δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν, ὅτι ἡ διερεύνησις περιελάμβανε τὸν προσδιορισμὸν τῶν ὁρίων δυνατότητος, τὸν ἀριθμὸν τῶν λύσεων, κλπ. καὶ ὅτι ἡ ἀναπτυσσομένη θεωρία ὡμοίαζε πρὸς τὴν θεωρίαν τῆς ἐνελίξεως εἰς τὴν προβολικὴν γεωμετρίαν» (T.L. Heath : A. Manual of Greek Mathematics, Dover publications 1963, σ. 366).

38. Ὁ Περσεὺς φέρεται γεννηθεὶς εἰς Κίτιον τῆς Κύπρου κατὰ τὸν Β' π.Χ. αἰῶνα. Α ἱ σ π ε ι ρ ο ε ι δ ε ῖ ς τ ο ῦ Π ε ρ σ έ ω ς εἶναι καμπύλαι τετάρτου βαθμοῦ ἔχουσαι ἐξίσωσιν εἰς καρτεσιανὰς συντεταγμένας :

$$(x^2 + y^2 + R^2 + c^2 - r^2)^2 = 4R^2 (x^2 + c^2).$$

ἔνθα r ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου τοῦ γεννῶντος τὴν σπεῖραν, R ἡ ἀπὸ τοῦ ἄξονος ἀπόστασις τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου τούτου καὶ c ἡ ἀπὸ τοῦ ἄξονος περιστροφῆς ἀπόστασις τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου. Εἰδικαὶ περιπτώσεις τῶν καμπύλων τούτων εἶναι ὁ ἐ λ λ ε ι π τ ι κ ὸ ς λ η μ ν ί σ κ ο ς:

$$(x^2 + y^2)^2 = b^2x^2 + a^2y^2$$

(ποδικὴ τῆς ἐλλείψεως 2a,2b ἀπὸ τοῦ κέντρου) καὶ ὁ ὑ π ε ρ β ο λ ι κ ὸ ς λ η μ ν ί σ κ ο ς:

$$(x^2 + y^2)^2 = b^2x^2 - a^2y^2$$

(ποδικὴ τῆς ὑπερβολῆς 2a,2b ἀπὸ τοῦ κέντρου), ὅστις διὰ a=b καταντᾷ ὁ λ η μ ν ί σ κ ο ς τ ο ῦ Bernoulli $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

Εἰς τὴν γενικότητα, αἱ ἐπίπεδοι τομαὶ τῆς σπείρας ἐμελετήθησαν, κατὰ τὸν παρελθόντα αἰῶνα, ὑπὸ τοῦ Pagani (1824), τοῦ Darboux (1864) καὶ ἄλλων.

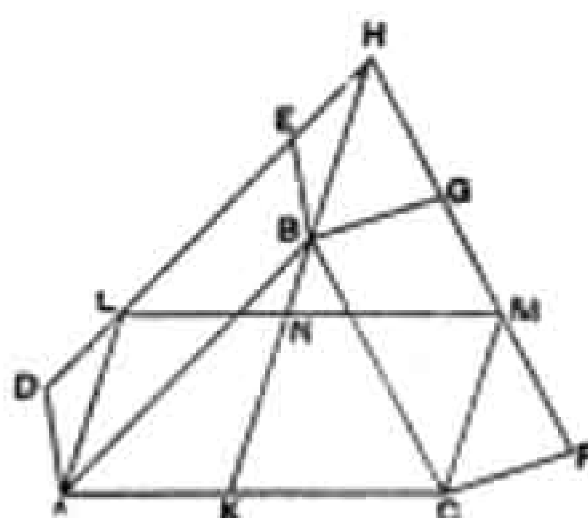
39. Ἡ ὑπὸ τοῦ Πάππου γενομένη σπουδαία γενίκευσις τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος διὰ πᾶν τρίγωνον (μὴ ἀναγκαίως ὀρθογώνιον) καὶ διὰ τυχόντα παραλληλόγραμμα (ἀντὶ τετραγώνων) ἐπὶ τῶν δύο πλευρῶν τοῦ τριγώνου ἔχει τὴν ἀκόλουθον διατύπωσιν:

«Ἐὰν ἐπὶ τῶν πλευρῶν AB καὶ BC τυχόντος τριγώνου ABC κατασκευασθοῦν τυχόντα παραλληλόγραμμα ABED καὶ BCFG, προεκταθοῦν δὲ αἱ πλευραὶ DE καὶ FG μέχρι τῆς τομῆς των H, ἀχθῇ δὲ καὶ ἡ HB, τότε τὰ δύο παραλληλόγραμμα ὁμοῦ εἶναι ἰσοδύναμα πρὸς τὸ ἐπὶ τῆς τρίτης πλευρᾶς AC κατασκευαζόμενον παραλληλόγραμμον, οὗτινος ἡ ἄλλη πλευρὰ AL ἴση καὶ παράλληλος πρὸς τὴν HB».

Τὸ καθαρῶς ἑλληνικὸν τοῦτο θεώρημα ἀποδίδεται συχνὰ εἰς τὸν ἀδελφὸν τοῦ διασήμου γάλλου μαθηματικοῦ Alexis Clairaut (1713-1765) καὶ ὑπὸ τὸ ὄνομα τοῦτο ἀναφέρεται εἰς πλεῖστα βιβλία Στοιχειώδους Γεωμετρίας (π.χ. F.G.-M, Exercices de Geometrie, Livre IV), ἀκόμη καὶ ἑλλήνων συγγραφέων (π.χ. Ν. Σακελλαρίου, Στοιχεῖα Γεωμετρίας, 1950, τεῦχος β' σ. 73, ὅπου τὸ θεώρημα ἀποδίδεται μάλιστα εἰς τὸν ἴδιον τὸν Alexis Clairaut, οὐχὶ δὲ εἰς ἕνα ἀδελφόν του, ἀποθανόντα εἰς ἡλικίαν 12 ἐτῶν καὶ διακριθέντα ἀπὸ ἡλικίας 9 ἐτῶν διὰ τῆς πραγματείας του Divers quatratures of circular elliptics).

Πρόκειται προφανῶς περὶ καταφώρου ἱστορικῆς ἀδικίας, διαπιστουμένης καὶ εἰς ἄλλα θεωρήματα τοῦ Πάππου, ὅπως π.χ. τὰ φερόμενα ὑπὸ τὸ ὄνομα τοῦ Guldin, τοῦ Stewart κλπ.

Τὸ θεώρημα τοῦ Varignon : «ὡς πρὸς ἓν κέντρον ἡ ῥοπὴ τῆς συνισταμένης ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ῥοπῶν τῶν συνιστωσῶν» ἀποτελεῖ ἁπλοῦν πόρισμα τοῦ ὡς ἄνω θεωρήματος τοῦ Πάππου, ἂν ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ὅτι τὰ ἐμβαδὰ τῶν παραλληλογράμμων ἐκφράζουν ἀπολύτως τὰς ῥοπὰς μιᾶς πλευρᾶς πρὸς μίαν ἀντικειμένην κορυφήν.



40. Ἡ καλυτέρα ἔκδοσις τῆς Μαθηματικῆς Συναγωγῆς εἶναι ἡ τοῦ F. Hultsch : Pappi Alexandrini collectionis quae supersunt (1876-78). Ἡ πρώτη ἔκδοσις, εἰς λατινικὴν μόνον γλῶσσαν, εἶναι ἡ γενομένη ὑπὸ τοῦ Commandinus τὸ 1588. Μία γαλλικὴ μετάφρασις ἐδημοσιεύθη τὸ 1933 εἰς 2 τόμους ὑπὸ τοῦ P. Ver Eecke.

41. Ὁ γάλλος φιλόσοφος καὶ συγγραφεὺς V. Cousin (1792-1867) εἰς τὸ σύγγραμμά του «Καθολικὴ Ἱστορία τῆς Φιλοσοφίας» ἀποφαίνεται περὶ τοῦ Πρόκλου διὰ κολακευτικωτάτων σχολίων, τὰ ὁποῖα ἀναφέρει ὁ ἱστορικὸς Κ. Παπαρρηγόπουλος εἰς τὸ σύγγραμμά του «Ἱστορία τοῦ Ἑλληνικοῦ Ἔθνους» : (Γα, 1932, σελὶς 130) «Ὁ Πρόκλος ἦτο ὁ ἐπιφανέστατος τῶν χρόνων ἐκείνων γεωμέτρης καὶ ἀστρονόμος καὶ κατέλιπε περὶ Εὐκλείδου καὶ Πτολεμαίου σχόλια, τὰ ὁποῖα περιλαμβάνουσι τὰ τελειότατα ἴσως συμπεράσματα τῆς ἀρχαίας μαθηματικῆς ἐπιστήμης. Εἶχε δὲ γνώσεις κατὰ τὸ μᾶλλον ἢ ἧττον ἀκριβεῖς ὅλων τῶν τότε θρησκευμάτων, τὰ ὁποῖα ἐτίμα ἐπὶ τοσοῦτον, ὥστε ἐκάλει αὐτὸς ἑαυτὸν τοῦ ὅλου κόσμου ἱεροφάντην. Τὰ σχόλια αὐτοῦ εἰς τοὺς περιφημοτέρους διαλόγους τοῦ Πλάτωνος, τὸν Ἀλκιβιάδην, τὸν Κρατύλον, τὸν Παρμενίδην, τὸν Τίμαιον, παρέχουσιν εἰδήσεις ἀνεξαντλήτους παντὸς εἴδους περὶ τῶν τελευταίων χρόνων τῆς ἀρχαίας φιλοσοφίας. Ὁ Πρόκλος γράφει εἰσέτι ὀρθῶς ὁπωσοῦν καὶ ἀκριβῶς, παρέστησε δὲ βέλτιον ἴσως ὅλων τῶν προκατόχων αὐτοῦ, καὶ τοῦ Πλωτίνου μὴ ἐξαιρουμένου, τὰ κυριώτατα φαινόμενα καὶ χαρακτηριστικὰ τῆς νεοπλατωνικῆς φιλοσοφίας· ὥστε διά τε τὴν ἀναλυτικὴν αὐτοῦ τέχνην, καὶ τὴν εὐρεῖαν ἐπιστήμην δυνάμεθα τῇ ἀληθείᾳ ν' ἀποκαλέσωμεν τὸν ἄνδρα Ἀριστοτέλην τῆς ἀλεξανδρινῆς φιλοσοφίας».-

42. Ἐκ τῆς ἑβραϊκῆς καὶ ἀραβικῆς τὸ ἔργον τοῦτο τοῦ Μενελάου μετεφράσθη τὸ πρῶτον εἰς τὴν λατινικὴν ὑπὸ τοῦ Γεράρδου τῆς Κρεμώνης (1114 - 1187). Νέαν μετάφρασιν, πολὺ κατωτέραν τῆς προηγουμένης, παρουσίασεν ὁ Μαυρόλυκος, ὅστις καὶ ἐξέδωσε ταύτην ἐν Μεσσήνῃ κατὰ τὸ 1558. Τέλος, κατὰ τὸ 1758, ἐξεδόθησαν εἰς τὴν Ὀξφόρδην τὰ «Σφαιρικὰ» μετὰ σχολίων ὑπὸ τοῦ ἀστρονόμου Halley(1656 - 1742).

(Κ. Γεωργούλη : Ἡ ἑλληνικὴ ἐπιστήμη, Τόμος Ζ «Ἑλλάς» τοῦ Ἡλίου, 1949).

43. Ἐπ' αὐτοῦ ὁ καθηγητὴς κ. Ε. Σταμάτης εἰς τὸ βιβλίον του «Ἑλληνικὴ ἐπιστήμη» (Ἀθῆναι 1968) ἀναφέρει τὰ ἑξῆς (σελ. 25) «Πρόκειται περὶ μεθόδου ἐπιλύσεως ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων, αἱ ὁποῖαι σήμερον ὀνομάζονται διοφαντικαὶ ἢ ἐξισώσεις ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως. Ἡ εὕρεσις τῶν τριάδων ἀκεραίων ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι ἐπαληθεύουν τὸ Πυθαγόρειον θεώρημα (καὶ εὑρέθησαν τὸ πρῶτον ὑπὸ τοῦ Πυθαγόρου) ἀποτελεῖ σπου-

δαίαν συμβουλὴν εἰς τὴν θεωρίαν τῶν διοφαντικῶν ἐξισώσεων. Φαίνεται ὅτι τῇ ὑποδείξει τοῦ διδασκάλου ὁ Θυμαρίδας εἶχεν εἰδικευθῆ εἰς τὸν μαθηματικὸν αὐτὸν κλάδον τῆς θεωρίας τῶν ἀριθμῶν. Ἡ λέξις ἐ π ά ν θ η μ α δὲν ἔχει ἰδιαιτέραν τινὰ σχέσιν πρὸς τὰ μαθηματικά, οὔτε ἐσώθη ἑρμηνεία της σχετίζουσα αὐτὴν πρὸς τὴν ἐπιστήμην τῶν μαθηματικῶν. Εἶναι πιθανὸν ὅτι ἡ συναφὴς ἐπινόησις τοῦ Θυμαρίδα διὰ τὴν ἐπίλυσιν διοφαντικῶν ἐξισώσεων ἔκαμε τὴν ἐποχὴν ἐκείνην μεγάλην ἐντύπωσιν καὶ παραμοιάσθη πρὸς ἄνθος, πρὸς ἀπαύγασμα μιᾶς πνευματικῆς προσπαθείας».

44. Βλ. Ε. Σταμάτη : Διοφάντου Ἀριθμητικὰ Ἀθῆναι 1963, Βιβλίον VI, σελ. 316-317.

45. Βλ. Ε. Σταμάτη : Διοφάντου Ἀριθμητικά, Ἀθῆναι 1963, σελ. 297 (Βιβλίον V, πρβλ. 30)

46. Ἡ μετάφρασις τούτου εἰς νέαν ἑλληνικὴν ἔχει ὡς ἑξῆς :

«Εἰς αὐτὸν ἐδῶ τὸν τάφον κεῖται ὁ Διόφαντος· τί θαυμαστὸς τάφος· καὶ δι' ἀριθμητικῆς τέχνης μᾶς λέγει τὴν ἡλικίαν του. Τὸ 1/6 τῆς ζωῆς του ἐχάρισεν ὁ Θεὸς νὰ εἶναι παιδί. Τὸ 1/12 δὲ μετὰ τοῦτο νὰ βγάλῃ τρίχας παρὰ τὰ μῆλα· μετὰ τὸ ἑπόμενόν δε 1/7 ἐνυφεύθη, πέντε δὲ ἔτη μετὰ τὸν γάμον τοῦ ἐχάρισεν υἱόν· ἀλλοίμονον, ἀργογεννημένο ἀτυχὲς παιδί. εἰς τὸ ἥμισυ τῆς ἡλικίας τοῦ πατρὸς ὅταν ἔφθασε, ἀφοῦ ἀπέθανε, κρύον πτῶμα ἐκάη· παρηγορῶν δὲ τὸ πένθος του ἀπὸ τότε ἐπὶ τέσσαρα ἔτη μὲ τὴν σοφίαν τῶν ἀριθμῶν, οὕτω ἐτερμάτισε τὸν βίον». (Ε. Σταμάτη : Διοφάντου Ἀριθμητικά, 1963, σελ. 395).

47. Κατὰ μετάφρασιν εἰς νέαν ἑλληνικήν :

«Ἡμίονος καὶ ὄνος φορτωμέναι σῖτον ὡδοιποροῦσαν· ὑπὸ τὸ βάρος ὅμως τοῦ φορτώματος, τὸ ὁποῖον ἔφερον ἐστέναζεν ἡ ὄνος. Ταύτην ἰδοῦσα βαρυστενάζουσαν ἡ ἡμίονος τὴν ἠρώτησε. Μητέρα γιατί θρηνεῖς κλαίουσα σὰν κορίτσι ; ἐὰν μοῦ ἔδιδες ἕνα σάκκον θὰ ἔφερα διπλάσιον ἀπὸ τὸ βάρος σου· ἐὰν δὲ ἐλάμβανες ἀπὸ ἐμὲ ἕνα θὰ εἴχομεν ἴσον. Εἰπὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν σάκκων ἄριστε γνῶστα τῆς γεωμετρίας».

(Ε. Σταμάτη : Διοφάντου Ἀριθμητικά, 1963, σελ. 402 - 403).

48. Τὸ πρωτότυπον εἶναι, ὡς βλέπομεν, στιχούργημα ἐκ 44 στίχων εἰς μέτρον ἐλεγειακὸν κατὰ τὴν συνήθειαν τῶν τότε ἐπιγραμματοποιῶν. Μετάφρασις τούτου εἰς τὴν νεοελληνικήν, ὀφειλομένη εἰς τὸν Κ. Γεωργούλην, δίδεται κατωτέρω.

«Μέτρησον, ὦ ξένε, τὸ πλῆθος τῶν βοῶν τοῦ Ἡλίου ἀφοῦ καταβάλῃς προσεκτικὴν σκέψιν, ἐὰν εἶσαι μέτοχος σοφίας, πόσον λοιπὸν εἰς τὰς πεδιάδας τῆς σικελικῆς νήσου Θρινακίας ἔβοσκε, διηρημένον εἰς τέσσαρας ἀγέλας, ἑκάστη τῶν ὁποίων εἶχε διαφορετικὸν χρῶμα. Ἡ μία μὲν ἀγέλη ἔλαμπεν ἔχουσα λευκὸν ὡσὰν γάλα χρῶμα, ἡ δὲ ἄλλη ἔχουσα χρῶμα κυανοῦν, ἡ τρίτη εἶχε χρῶμα ξανθόν, ἡ δὲ ἄλλη χρῶμα ἀνάμικτον. Εἰς ἑκάστη ἀγέλην ὑπῆρχον ταῦροι ἀνερχόμενοι εἰς ἀριθμὸν πολὺ μεγάλον, διαμοιρασμένον κατὰ τὴν ἀκόλουθον συμμετρίαν. Φαντάσου, ὦ ξένε, ὅτι οἱ λευκότριχες ταῦροι ἦσαν ἴσοι κατὰ τὸν ἀριθμὸν μὲ τὸ ἥμισυ τῶν κυανῶν ταύρων ηὐξημένον κατὰ τὸ τρίτον καὶ συγχρόνως μὲ τὸν συνολικὸν ἀριθμὸν τῶν ξανθῶν. Οἱ κυανοὶ ἀφ' ἑτέρου ἦσαν κατὰ τὸν ἀριθμὸν ἴσοι μὲ τὸ τέταρτον καὶ πέμπτον μέρος τῶν ἀναμίκτου χρώματος καὶ ἐπὶ πλέον μὲ τὸν συνολικὸν ἀριθμὸν τῶν ξανθῶν. Τοὺς δὲ ὑπολειπομένους ἀναμίκτου χρώματος ταύρους φαντάζου ὡς ἐξισουμένους κατὰ τὸν ἀριθμὸν μὲ τὸ ἕκτον καὶ ἕβδομον μέρος τῶν λευκῶν καὶ μὲ τὸν συνολικὸν ἀριθμὸν τῶν ξανθῶν. Ὡς πρὸς τὰς ἀγελάδας δὲ ὑπῆρχον αἱ ἀκόλουθοι σχέσεις. Αἱ λευκαὶ ἀγελάδες ἦσαν κατὰ τὸν ἀριθμὸν ἀκριβῶς ἴσαι μὲ τὸ τρίτον καὶ τὸ τέταρτον μέρος ὅλης τῆς κυανῆς ἀγέλης. Αἱ δὲ κυαναῖ ἦσαν ἴσαι κατὰ τὸν ἀριθμὸν μὲ τὸ τέταρτον καὶ πέμπτον μαζὶ μέρος τῶν ἐχουσῶν ἀνάμικτον χρωματιστόν, ὅταν ἤρχοντο ὅλαι μαζὶ μὲ τοὺς ταύρους εἰς τὴν βοσκήν. Αἱ ἀναμίκτου δὲ χρωματισμοῦ ἀγελάδες εἶχον ἀριθμὸν ἰσάριθμον καὶ ἀπὸ τὰ τέσσαρα μέρη, μὲ τὸ πέμπτον καὶ ἕκτον μέρος τῆς ἀγέλης τῶν ξανθοτρίχων. Αἱ δὲ

ξανθαὶ κατὰ τὴν ἀρίθμησιν εὑρίσκοντο ἴσαι μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ τρίτου μέρους ηὐξημένου κατὰ τὸ ἕβδοδον μέρος τῆς ἀγέλης τῶν λευκῶν. Σὺ δέ, ὦ ξένε, ἂν μοῦ εἴπῃς μὲ ἀκρίβειαν πόσοι ἦσαν οἱ βόες τοῦ Ἡλίου, χωριστὰ πόσοι ἦσαν κατὰ τὸν ἀριθμὸν οἱ καλοθρεμμένοι ταῦροι, χωριστὰ δὲ πάλιν πόσαι ἦσαν αἱ ἀγελάδες ἑκάστου χρώματος, δὲν θὰ χαρακτηρίζεσαι ὡς ἀνίδεος καὶ ὡς μὴ ἔχων γνῶσιν τῶν ἀριθμῶν. Ἀλλὰ δὲν θὰ εἶναι δυνατὸν νὰ συγκαταριθμηθῇς ἀκόμη μὲ τοὺς σοφούς. Ἔλα λοιπὸν σκέψου καὶ τὰς ἀκολούθους μεταξὺ τῶν βοῶν τοῦ Ἡλίου (ἀριθμητικὰς) σχέσεις. Ὅταν οἱ λευκότριχες ταῦροι ἀνεμίγνυον τὸ πλῆθος των μὲ τὸ πλῆθος τῶν κυανῶν, ἵσταντο εἰς ἕνα συμπαγῆ σχηματισμόν, ὅστις εἶχε τὸ αὐτὸ μέτρον καὶ κατὰ τὸ βάθος καὶ κατὰ τὸ πλάτος, αἱ δὲ πεδιάδες αἱ ἀπέραντοι τῆς Θρινακίας ἐγέμιζαν ἐξ ὁλοκλήρου ἀπὸ τὸ τετράγωνον αὐτό. Ἀπὸ τὸ ἄλλο δὲ μέρος οἱ ξανθοὶ καὶ οἱ ἀναμίκτου χρώματος συναθροιζόμενοι μαζί, ἐστέκοντο τοιουτοτρόπως, ὥστε νὰ ἀποτελοῦν, ἀποτελουμένης τῆς πρώτης γραμμῆς ἀπὸ ἕνα, βαθμηδὸν τὸ τρίπλευρον σχῆμα, χωρὶς νὰ εἶναι ἀπόντες οἱ ταῦροι τῶν ἄλλων χρωματισμῶν. Ἂν αὐτὰ τὰ εὕρῃς καὶ τὰ συμπεριλάβῃς μέσα εἰς τὴν σκέψιν σου, καὶ ἐκφράσῃς ὅλα τὰ μέτρα τῶν πληθῶν, ὦ ξένε, ἄπελθε ὑπερηφανευόμενος ὅτι ἀνεδείχθεις νικητὴς καὶ νὰ γνωρίζῃς ὅτι ἔχεις κριθῆ τέλειος εἰς αὐτὴν τὴν σοφίαν». (Κ. Γεωργούλη, ἄρθρον Ἀρχιμήδης εἰς τὸ Ἐγκυκλοπαιδικὸν Λεξικὸν ΗΛΙΟΣ, Τόμος Γ', σελ. 719).

49. Συνοπτική, ἀλλὰ σαφὴς ἔκθεσις τῆς θεωρίας καὶ τῶν κανόνων κατασκευῆς μαγικῶν τετραγώνων ἐδόθη εἰς τὸ κείμενον διαλέξεως τοῦ Δρος μαθηματικοῦ κ. Ι. Καλκάνη, δημοσιευθὲν εἰς τὸ βιβλίον: Μαθηματικαὶ Διαλέξεις, Τόμος Α', 1967, ἐκδόσεις ΕΜΕ. Δι' εὐρυτέραν ἀνάπτυξιν, βλ. M. Kraitchik, La mathématique des jeux ou récréations mathématiques, Bruxelles, 1930.

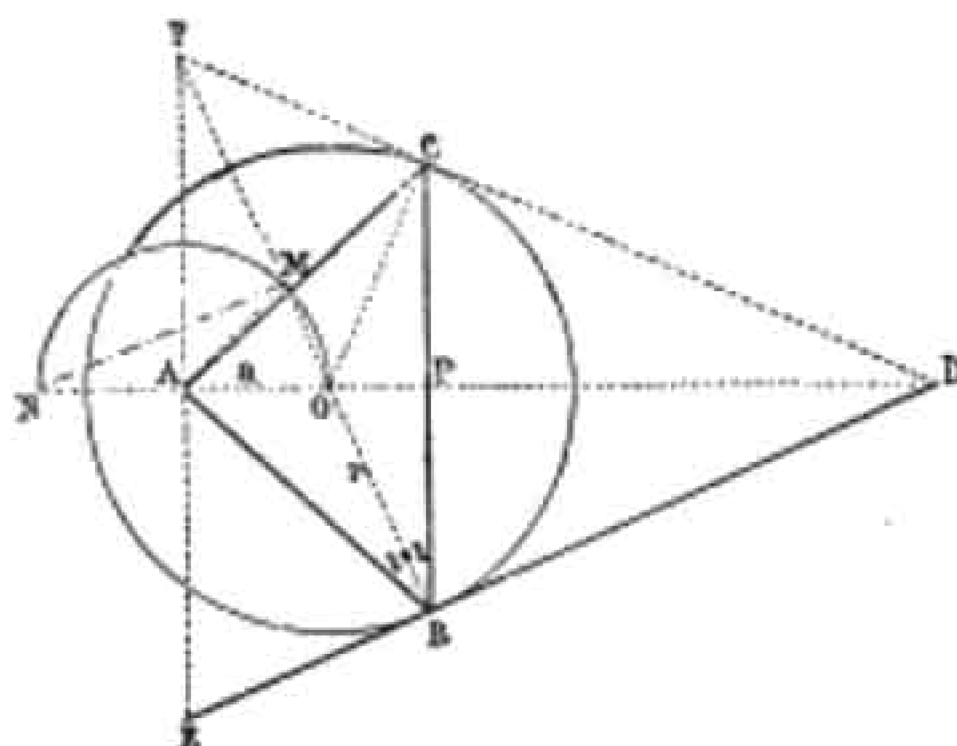
50. Ἡ ἀριθμομαχία παίζεται μεταξὺ δύο προσώπων Α καὶ Β. Ὁ πρῶτος ἐκλέγει ἕνα ἀριθμόν, μικρότερον ἑνὸς ἄλλου συμπεφωνημένου (π.χ. τοῦ 10), καὶ ὁ Β προσθέτει εἰς αὐτὸν ἄλλον ἀριθμὸν ἐπίσης μικρότερον τοῦ συμπεφωνημένου. Εἰς τὸ ἄθροισμα προσθέτει νέον ὁ Α, εἶτα ὁ Β κ.ο.κ. μέχρις ὅτου, ἕνας ἐκ τῶν δύο φθάσῃ πρῶτος συμφωνηθέντα ἀριθμόν, π.χ. 100.Βλ. M. Kraitchik,, La mathématique des jeux ou récréations mathématiques, Bruxelles, 1930, σ. 224.

51. Εἰς τὸν σημερινὸν σπουδαστὴν φαίνεται ἀπίστευτον, ὅτι μιὰ ἐξίσωσις τῆς μορφῆς $ax + b = 0$ θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ παρουσιάσῃ σοβαρὰς δυσκολίας εἰς τὴν λύσιν της. Καὶ ὅμως αὐτὴ εἶναι ἡ ἱστορικὴ ἀλήθεια. Οἱ πρῶτοι συγγραφεῖς, ἀρχῆς γενομένης ἀπὸ τῶν Αἰγυπτίων, κατέφευγον ἐπὶ πολλοὺς αἰῶνας εἰς τὴν χρῆσιν τῆς μεθόδου, ἡ ὁποία εἶναι γενικῶς γνωστὴ μὲ τὸν λατινικὸν ὅρον Regula Falsi (κανὼν τοῦ σφάλματος), ἢ τὸν ἰσοδύναμον Regula augmenti et diminutionis (§ 113, 145), παρ' ἡμῖν δὲ ὡς κανὼν τῆς «αὐθαιρέτου ἀφετηρίας», μὲ δύο παραλλαγὰς α) τοῦ ἁπλοῦ σφάλματος ἢ ἁπλῆς ἀφετηρίας β) τοῦ διπλοῦ σφάλματος ἢ διπλῆς ἀφετηρίας. Βλ. D. Smith : History of Mathematics, τόμος II, 1953, σ. 437 (Dover Publications).

52. Τὸ πρόβλημα τοῦτο ἐκφωνεῖται διαφοροτρόπως : α) Δίδεται κύκλος μὲ κατοπτρικὴν περιφέρειαν. Αἱ ἀπὸ δοθέντος φωτεινοῦ σημείου Α τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κύκλου ἐκπορευόμεναι φωτειναὶ ἀκτῖνες ἀνακλῶνται ὑπὸ τῆς περιφερείας. Ζητεῖται νὰ χαραχθῇ ἐκείνη, ἡ ὁποία θὰ διέλθῃ ἀπὸ δοθεῖσαν θέσιν Β τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κύκλου, (ὅπου ὑποτίθεται παρατηρητής), μετὰ ἁπλῆν ἢ διπλῆν ἀνάκλασιν.
β) Πρὸς ποίαν διεύθυνσιν πρέπει νὰ ἐκτοξευθῇ σφαῖρα Α ἐπὶ τῆς κυκλικῆς τραπέζης σφαιριστηρίου, ὥστε νὰ διέλθῃ μὲ ἁπλῆν ἢ διπλῆν ἀνάκλασιν διὰ δοθέντος σημείου Β.
γ) Δοθέντων δύο σημείων Α,Β ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου περιφερείας νὰ εὑρεθῇ ἐπ' αὐτῆς σημεῖον Γ τοιοῦτον, ὥστε ὁ δρόμος ΑΓ + ΓΒ νὰ εἶναι ἐλάχιστος.

δ) Νὰ ἐγγραφῇ εἰς κύκλον τρίγωνον ἰσοσκελές, τοῦ ὁποίου αἱ ἴσαι πλευραὶ νὰ διέρχωνται διὰ δοθέντων σημείων τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κύκλου.

(F. G.- M : Exercices de Géometrie, No 1545).



53 Ἡ Θούλη, ἡ βορειοτέρα νῆσος τῆς Εὐρώπης, ἐθεωρεῖτο ὑπὸ τῶν ἀρχαίων χώρα μυθικὴ ἀποτελοῦσα τὸ ἔσχατον ὅριον τοῦ τότε γνωστοῦ κόσμου (ultima Thule), ὅπου κατὰ τὸ θερινὸν ἡλιοστάσιον δὲν ὑπῆρχε νύκτα, κατὰ δὲ τὸ χειμερινὸν δὲν ὑπῆρχεν ἡμέρα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ I

1. L. G. DU PASQUIER, Le développement de la notion de nombre (Mém. de l' Univ. de Neuchâtel, t. III, 1925).
2. E. FETTWEIS, Das Rechnen der Naturvölker (Leipzig, 1927).

ΒΑΒΥΛΩΝΙΟΙ

3. A. H. LAYARD, Monuments of Niniveh (London, 1849 - 1853).
4. P. E. BOTTA Monument de Ninive decouvert et décrit (Paris, 1849 - 50).
5. A. H. SAYCE, The Astronomy and Astrology of the Babylonians, with Translations of the Tablets relating to the subject (Trans. of the Soc. of biblical Archeology, vol. III, parte I, London, 1874).
6. R. LEPSIUS, Die babylonisch - assyrisch Längenmaas nach der Tafel von Senkreh (Abh. der Berliner Akademie, 1877).
7. J. EPPING, Astronomisches aus Babylon, Unter Mitwirkung von P. J. R. Strossmayer (Freiburg 1889).
8. A. EINSELOHR, Ein altbabylonischer Feldplan, nach Mittheilungen von F. V. Scheil (Leipzig, 1896).
9. H. V. HILPRECHT, Mathematical, Metrological and Chronological Tablets from the Temple Librairy of Nippur (Cuneiform Texts published by the Babylonian Expedition, of the Univers, of Pennsylvania, ser. A, vol. XXX, parte I, 1906).

ΑΙΓΥΠΤΙΟΙ

10. R. LEPSIUS, Ueber eine hieroglyphische Inschrift am Tempel von Edfu (Abh. der Berliner Akademie, 1855).
11. A. EISENLOHR, Ein mathematisches Handbuch der alten Aegypter (Papyrus Rhind des British Museum) (Leipzig, 1877; II Ausgabe, ohne Tafeln, id., 1091).
12. L. RODET, Les prétendus problèmes d' algèbre du Manuel du calculateur (Journ. Asiatique, 1882).
13. W. M. FLIENDERS PETRIE, Illahum, Kahun, and Gureb (London, 1891; i frammenti ivi segnalati vennero publicati nel 1897 da F. L. Griffith).
14. J. BAILLET, Le papyrus mathématique d'Akhmim (Mém. publiés par le membres de la mission archéologique française au Caire, t. IX, 1892).
15. G. LORIA, Studi intorno alla logistica greco - egiziana (Giorn. di Matematiche, vol. XXVII, 1894).
16. H. SCHACK - SCHACKENBURG, Der Berliner Papyrus 6619 (Zeitsch. f. ägyptische Sprache, t. XXXVIII, 1900, e XL, 1902).

17. L. C. KARPINSKI, Michigan Mathematical Papyrus No. 621 (Isis, vol. V, 1923).
18. T. ERIC PEET, The Rhind Mathematical Papyrus, British Museum 10057 and 10058. Introduction, Transcription, Translation and Commentary (Liverpool, 1923).
19. O. GILAIN, La science égyptienne. L' arithmétique au Moyen Empire (Bruxelles 1927).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ II

1. Opere di PLATONE e ARISTOTELE; di cui esistono infinite edizioni e traduzioni in tutte le lingue.
2. H. DIELS, Die Fragmente der Vorsokratiker, 2a ed. (Berlin, 1906 - 07).
3. H. DIELS, Doxographi graeci (Berlin, 1879).
4. H. DIELS, Symplici in Aristotelis Physicorum Libros quattuor priores (Berolini, 1882).
5. F. RUDIO, Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und des Hippokrates, griechisch und deutsch (Leipzig, 1907).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

1. Euclidis Opera omnia, ediderunt I. L. HEIBERG et H. MENGE, Lipsiae Teubner. Vol. I, Elem., l. I-IV (1883); vol. II, Elem., l. V-IX (1884); vol. III, Elem., l. X (1886); vol. IV, Elem., l. XI - XIII (1885); vol. V, l. XIV - XV Scholia (1888); vol. VI, Data (1896); vol. VII, Optica et Catoptrica (1895); vol. VIII, Phaenomena, Scripta musica, Fragmenta (1916).
2. M. CHASLES, Les trois livres des porismes d'Euclide rétablis pour la première fois (Paris, 1860)
3. R. C. ARCHIBALD, Euclid's Book on Division of Figures, with a restoration based on Woepcke's Text and on the Practica geometriae of Leonardo Pisano (Cambridge, 1915).

ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ

4. Archimedis Opera omnia cum Commentariis Eutocii, ed. HEIBERG, 2a ed., Lipsiae, vol. I (1910); II (1913); III (1915).

ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ

5. Apollonii Pergaei Conicorum Lib. VIII, ed. HALLEY, Ononiae, 1710.
6. Apollonii Pergaei quae Graece extant cum Commentariis antiquis, ed. HEIBERG, Lipsiae, vol. I (1891); vol. II (1893).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

1. G. BERNHARDY, Erathostenica (Berolini, 1822).
2. H. BERGER, Die geographischen Fragmente des Erathostenes (Leipzig, 1880).
3. SERENI ANTINOENSIS Opuscula, ed. Heiberg (Lipsiae, 1896).
4. GEMINI, Elementa Astronomiae, ed. C. MANITIUS (Lipsiae, 1898).

5. PROCLI DIADOCHI in primum Euclidis Elementorum librum commentarii, ex rec. G. FRIEDLEIN (Lipsiae, 1873).
6. PAPPI ALEXANDRINI Collectionis quae supersunt, ed. F. HULTSCH (Berolini, 1876).
7. J. DUPUIS, Théon de Smyrne, philosophe platonicien, Exposition des connaissances mathématiques utiles pour la lecture de Platon (Paris, 1892).
8. H. SUTER, Der Kommentar des Pappus zum X Buche des Euklides aus der arabischen Uebersetzung des Abû'Othman al-Dimashki (Abhadl. zur Gesch, der Math., der Naturwissenschaften und der Medizin, Heft IV, 1922).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

1. TH. L. HEATH, Aristarchus of Samos, the ancient Copernicus. A History of Greek Astronomy to Aristarchus (Oxford, 1913).
2. AUTOLYCI, De sphaera quae movetur libri duo. De ortibus et occasibus libri duo unum cum Scholiis antiquis, edidit F. Hultsch (Lipsiae, 1886).
3. C. MANITIUS, Des Hypsikles Anaphorikos nach Ueberlieferung und Inhalt kritisch behandelt (Dresden, 1888).
4. J. L. HEIBERG, Theodosius Tripolites Sphaerica (Abh. der Gesell. der Wissenschaften zu Göttingen, Phil.-hist. Klasse, Neue Folge Bd. XIX, 1927).
5. PAUL VER EECKE, Les Sphériques de Théodose de Tripoli, Oeuvres traduites pour la première fois du Grec en Francais, avec une Introduction et des Notes (Bruges 1927).
6. HIPPARCHI in Arati et Eudoxi Phaenomena Commentarium, ed. Manitius (Lipsiae, 1894).
7. Composition mathématique de CLAUDE PTOLOMÉE, traduite pour la première fois du grec en français par HALMA, 2 vol. (Paris, 1813 e 1816; riprodotto nel 1927).
8. PTOLEMAEI, Planisphaerium; JORDANI, Planisphaerium; F. COMMANDINI Urbinatis in Ptolemaei Planisphaerium Commentarius (Venetiis, 1558)
9. C. PTOLEMAEI, Liber de Analemmate (Romae, 1552).
10. Traité de Géographie de CLAUDE PTOLEMAEI, trad. par HALMA (Paris, 1828).
11. Commentaire de THÉON sur le premier Livre de la Composition mathématique de Ptolemée, trad. par HALMA (Paris, 1821).
12. HERONIS ALEXANDRINI, Opera quae supersunt omnia. Vol. I: Herons von Alexandria Druckwerke und Automathentheater griechisch und deutsch herausgegeben von W. Schmidt (Leipzig, 1899). Vol. II: Herons von Alexandria Mechanik und Katoptrik herausgegeben und übersetzt von L. Nix und W. Schmidt (Leipzig, 1901). Vol. III: Herons von Alexandria Vermessungslehre und Dioptra, griechisch und deutsch von H. Schöne. Vol. IV: Heronis Definitiones cum variis Collectionibus copiis G. Schmidts usus, edidit J. L. Heiberg (Lipsiae, 1912). Vol. V: Heronis quae feruntur Geometrica et de Mensuris, edidit J. L. Heiberg (Lipsiae, 1914).
13. ANARITII in decem Libros priores Elementorum Euclidis Commentarii ex interpretatione Cherardi Cremonensis in Codice Cracoviensi 569 servata, edidit M. Curtze (Lipsiae, 1899).
14. Codex Leidensis 399, I, Arabive et Latine ediderunt R. O. BESTHORN et L. L. HEIBERG (Hauniae, 1893 - 1910).
15. A. A. BJÖRNBO, Studien über Menelao's Sphärik (Abh. zur Gesch. der Mathematik. Heft XIV, Leipzig, 1902).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI

1. Nicomachi Geraseni Pythagorai Introductionis arithmetic Libri II, ed. HOCHE (Lipsiae, 1866).
2. M. SIMON, Die ersten 6 Kapitel der Institutio Arithmetica del Nikomachos (Arch. f. die Gesch. d. Naturw. u. d. Techn., t. I, 1909).
3. Iamblichus de mathematici scientia liber, ed. FESTA (Lipsiae, 1891).
4. Iamblichus in Nicomachi arithmeticam Introductionem Liber, ed. PISTELLI (Lipsiae, 1894).
5. [Iamblichus] Theologumena arithmetica, ed. V. DE FALCO (Lipsiae, 1922).
6. Le Manuel d' introduction arithmétique de philosophe Domninos de Larissa, traduction par P. TANNERY (Mém. scientifiques, t. III, Paris, 1915).
7. Diophanti Alexandrini Opera omnia cum Graecis Commentariis, ed. IANNERY (Lipsiae, t. I, 1393; t. II, 1895).
8. G. WERTHEIM, Die Arithmetik und die Schrift über die Polygonalzahlen des Diophantus von Alexandrien (Leipzig, 1890; in appendice gli epigrammi dell' Antologia greca).
9. J. BAILLET, Le papyrus mathématique d' Akhmin (Mém. de la mission archéol. franç. au Caire, t. IX, fasc. 1, 1892).
10. J. F. HEIBERG, Der byzantinische Mathematiker Leon (Bibl. mathem., Nuova Serie, t. I, 1887).
11. P. TANNERY, Psellus sur les nombres. Psellus sur Diophante (Revue des études grecques, t. V, 1892, t. VII, 1894).
12. J. WASCHKE, Das Rechenbuch des Maximus Planudes aus dem grieshischen übersetzt (Halle, 1878).
13. BARLAAMI MONACHI, Logistica nunc primum Latine reddita à I. CHAMBERO (Parisiis, 1594).
14. G. FRIEDLEIN, Die Geometrie des Pediasimus (Ansbach, 1866).
15. P. TANNERY, Notices sur deux lettres arithmétiques de Nicolas Rhabdas, texte et traduction (Notices et extraits des manuscrits, t. XXXII, parte I, 1886).
16. E. MOSCOPULO, Opuscolo sui quadrati magici: S. GÜNTHER, Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathem. Wissenschaften (Leipzig, 1876) e P. TANNERY, Mem. scientifiques, t. IV (Paris, 1920).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII

1. Corpus Inscriptionum Latinarum (Berolini, 1883 - 1893).
2. M. VITRUVII, De Architectura Libri decem (Florentia, 1522): se ne conoscono innumerevoli altre ed. e trad. in tutte le lingue.
3. G. FRIEDLEIN, Der Calculus des Victorius (Zeitschr. f. Math. und. Phs., t. XVI, 1871).
4. Victorii Calculus ex Codice Vaticano editus (Bull. di bibl. e storia delle scienze mat. e fis., t. IV, 1871).
5. MARTIANI CAPELLAE, Satyricon, in quo de nuptiis Philologiae et Mercurii libri duo et de septem artibus liberalibus libri singulares, ed. U. Kopp (Frankfurt a. M., 1836).

6. F. BLUME, K. LACHMANN und A. RUDOLFF, Die Schriften der römischen Feldmesser herausgegeben und erläuter (Berlin 1848 e 1852).
7. VINCENT, Notices et extraits de la Bibliothèque impériale (t. XIX, parte 2a, Paris 1858).
8. M. CANTOR, Die römischen Agrimensoren und ihre Stellung in der Geschichte der Feldmesskunst (Leipzig, 1875).
9. M. CURTZE, Dir Handschrift No. 14836 der Kgl. Hof - und Staatsbibliothek zu München (Abhandl. zur Gesch. der Mathematik, Heft VII, 1895).
10. V. MORTET et P. TANNERY, Un nouveau Texte des traités d' arpentage et de géometrie d' Epaphroditus et de Vitruvius Rufus (Notices et Extraits des Manuscrits, t. XXV, partie 2, Paris, 1896).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VIII

1. A. M. T. SEVERINI BOETII, De institutione arithmetica libri duo, de institutione musica libri quinque, accedit Geometria quae fertur Boetii. E libris manu scriptis edidit G. Friedlein (Lipsiae, 1867).
2. P. TREUTLEIN, Intorno ad alcuni scritti inediti relativi al calcolo dell' abaco. Ttrattato di Gerlando «De Abaco» (Bull. di bibl. e storia, t. X, 1877).
3. MIGNE, Patrologiae latinae Cursus completus, t. LXIX, LXX, LXXI, l. XXXIV (volumi contenenti le opere di Cassiodoro e Isidoro).
4. R. PIPER, Fortolfi Rythmimachie (Abhand. zur Gesch. der Mathem., t. III, 1880)
5. VENERABILIS BEDAE, Opera quae supersunt omnia, 12 vol. (London, 1843 - 44).
6. Monumenta Alcuiniana (Berlin, 1873).
7. M. CURTZE, Die Handschrift No. 14836 der Kgl. Hof - und Staat Bibl. zu München. (Abh. zur Gesch. der Mathematik, t. VII, 1895).
8. GERBERTI postea SILVESTRI II papae, Opera matematica, ed. Bubnow (Berlin, 1899).
9. C. HENRY, Prologus Ocreati in Helceph ad Adelardum Batensem magistrum suum. Fragment sur la multiplication et la division publié pour la première fois (Abh. zur Gesch. der Mathematik, III Heft, 1880).
10. M. CURTZE, Practica geometriae. Ein anonymer Tractat aus dem Ende des zwölften Jahrhunderts (Monatshefte f. Math. u. Phys., t. VIII, 1897).
11. TANNERY et CLERVAL, Une correspondance d' ecolâtres du XI siècle (Notices et extraits des manuscrits, t. XXXVI, 1900).
12. A NAGL, Der arithmetische Trakiat von Rudolph von Laon (Abhr. zur Gesch. der Math., t. V, 1890)
13. M. CURTZE, Ein «Tractatus de abaco» aus der Wende des XII und XIII Jahrhunderts. Nach Codex Vindob. Palat. 901 fol. 87 - 96 (Zeitschr. f. Math. u. Phys., t. 43, 1898).
14. WINTERBERG, Der Traktat Franco's von Lüttich «de quadratura circuli» (Abh. zur Gesch. der Math., t. IV, 1882).
15. M. CURTZE, Urkunden zur Geschichte der Trigonometrie im christlichen Mittelalter (Bibl. Matem., 3a serie, vol. I, 1900; contiene estratti del Liber Embadorum del Savasorda).
16. M. CURTZE, Der Liber Embadorum des Abraham bar Chija Savasorda in der Ubersetzung des Plato von Tivoli (Abh. zur Gesch. der Mathematik, XII Heft, 1902).

17. M. GUTTMANN, Chibbur ha-Meschcha weha-Tischbereth. Lehrbuch der Geometrie des Abraham bar Chija, herausgegeben und mit Anmerkungen versehen (Berlin, 1913).
18. M. SILBERBERG, Das Buch der Zahl des Rabbi Abraham ibn Esra (Frankfurt a. M., 1895).
19. ABRAHAM IBN ESRA, Buch der Einheit. Aus dem Hebräischen übersetzt nebst Parallelstellen und Erläuterungen zur Mathematik Ibn Esras von Ernst Müller (Berlin, 1921).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IX

1. A. WYLLIE, Jettings on the Science of the Chinese. North China Herald, Shangai,1852.
2. K. L. BIERNATZKI, Die Arithmetik der Chinesen, G. di Crelle, t. LII, 1856.
3. H. CORDIER, L' imprimerie Sino-Européenne en Chine, Paris, 1901.
4. G. VACCA, Sulla matematica degli antichi Cinesi, Boll. di bibl. e storia ecc., t. VIII, 1905.
5. YOSHIO MIKAMI, The Developement of Mathematics in China and Japan (Abhand. zur Geschichte der Mathematik, XXX Heft, 1912).
6. G. VACCA, Note Cinesi: III. Un problema del matematico I. Hang. Rivista di studi Orientali, vol. VI, 1913.
7. VANHÉE, Problems chinois du second degré, T'oung-Pao, t. XII, 1911, p. 557-562; Algébre chinoise, ivi, t. XIII 1914, p. 291-300; Les cent volailles ou l' analyse indéterminée en Chine, ivi, t. XIV, 1915, p. 11-26 e 203-210; Li-Ye, mathématicien chinois du XIII Siécle, Id., p. 537-568; Bibliotheca mahtematica Sinensis, Pé-fou, Id., t. XV, 1914; La notation algébrique en Chine au XIII Siècle (Revue des questions scientifiques, 3a serie, t. XXIV, 1913, p. 574-587; The Arithmetic Classic of Hoia-Hou Yang (The Amer. Monthly, t. XXXI, 1924, p. 235-7; The Chéon. Jen Chuan of Yüan Yüan (Isis, t. VIII, 1926, p. 103-118).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ X

1. Corpus inscriptionum Indicarum (London, 1888).
2. Epigraphia Indica, t. I-IX (pubblicazione ufficiale del Governo inglese).
3. E. STRACHEY, Bija ganita or the Algebra of the Hindus (London, 1813).
4. J. TAYLOR, Lilavati or a Treatise of Arithmetic and Geometry by Bhascara Acharya (Bombay 1816).
5. H. T. COLEBROOKE, Algebra With Arithmetic and Mensuration (London, 1817).
6. E. BURGESS and G. WHITNEY, The Surya Siddhanta (Journ. of the American Orientalist Society, t. VI, 1855).
7. Translation of the Surya Siddhanta by BAPU DEVA SASTRI and of the Siddhanta Siromani by the late F. WINKINSON revised by BAPU DEVA SASTRI (Calcutta, 1861).
8. H. KERN, The Aryabhatiya edited with Commentary (Leiden, 1874).
9. G. THIBAUT, On the Sulvasutras (Journ. of the Asiatic Society of Bengal, 1875).
10. Sulvasutra of Baudhayana with the Commentary of Dvarakana thanayva, traslated into English by G. THIBAUT (The Pandit, t. IX-X, Benares, 1875).
11. R. HOERNLE, The Bakshali Manuscript (The Indian Antiquary, vol. XIII, 1888).

12. Pancasiddhantaka of Varaha - Mihira trans. by G. THIBAUT and M. S. DVIVEDI (Benarges, 1889).
13. A. BÜRK, Das Apastamba - Sulba - Sutra (Zeitschr. der deutschen morgenland. Ges., vol. LV e LVI).
14. The Ganita - sara - sangraha of Mahaviracarya with english translation and notes by M. RANGACAYRA (Madras , 1912).
15. D. E. SMITH, The Ganita - Sara - Sangraha of Maharaviracarya (Bbil. mathem. 3a serie, t. IX, 1909).
16. N. RAMANUJACHAIRA anf G. KAYE, The Trisatika of Sridharacarya (Bibliotheca mathematica, 3a serie, t. XIII, 1912 - 13).
17. G. R. KAYE, The Bakhshali Manuscript. A study in mediaeval Mathematics (Calcutta, 1927).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΧΙ

1. De superficierum divisionibus Liber Machometo Bagdedino adscriptus nunc primum JOANNIS DEE et FEDERICE COMMANDINI URBINATE opera in lucem editus (Pisauri, 1570).
2. F. ROSEN, The algebra of Monammed ben Musa (London, 1831; alcune modificazioni a questa versione trovansi suggerite nella importante memoria di F. RUSKA, Zur ältesten arabischen Algebra und Rechenkunst, Sitzungsber. der Akad. zu Heidelberg, 1917).
3. L. A. SÉDILLOT, Traité des connues géometriques d' Idhn Al - Haitham (Journ. asiatique, t. XIII, 1834; cfr. dello stesso autore Matériaux pour servir à l' histoire comparée des sciences mathématiques chez les Grecs et les Orientaux, Paris, 1845,t. I, p. 379 - 400).
4. G. LIBRI, Histoire des sciences mathématiques en Italie, t. I (Paris, 1843). Note XII Liber Maumeti filii Moysii alchoarismi de algebra et almuchabala. Note XIV: Liber augmenti et diminutionis.
5. G. H. L. NESSELMANN, Essenz der Rechenkunst von Mohammed Beha - eddin ben Alhosain aus Amul, arabisch und deutsch (Berlin, 1843).
6. F. WEOPCKE, L' algèbre de Omar Alkayyami (Paris, 1851).
7. F. WOEPCKE, Notices sur des traductions arabes de deux ouvrages perdus d' Euclide (Journ. asiatique 4a serie, t. XVII, 1851).
8. F. WOEPCKE, Notice sur une théorie ajoutée par Thabit ben Korrah à l' arithmétique spéculative des Grecs (Id., t. XX, 1852).
9. F. WOEPCKE, Extrait du Fakhri, traité d' algèbre par Abou Bekr Mohamed Ben Alhaçon Alkarkhi (Paris, 1853)..
10. F. WOEPCKE, Recherches sur l' histoire des sciences mathématiques chez les Orientaux d' après des manuscrits inédits arabes et persans. I Article: Notice sur les notations algébriques employées par les Arabes (Journ. Asiatique, 5a serie, t. IV, 1854).
11. F. WOEPCKE, Recherches sur l' histoire, etc, II Article: Analyse et extrait d' un recueil de constructions geométriques d' About Wafa (Id., 5a serie, t. V. 1855).
12. F. WOEPCKE, Essai d' une restitutiom de travaux perdus d' Apollonius sur les quantités irrationnelles d' après les indications tirées d' un manuscrit arabe (Mém. prés. par divers savants, t. XIV, Paris, 1856).
13. B. BONCOMPAGNI, Trattati d' aritmetica. Fasc. I: Algoritmi de numero Indorum (Roma, 1857).

14. F. WOEPCKE, Recherches sur plusieurs ouvrages de Léonard de Pise. I. Traduction d' un chapitre des Prolégomènes d' Ibn Khaldum relatif aux sciences mathématiques (Atti Accad. Nuova Lincei, t. X, 1856 - 57). II Traduction du traité d' arithmétique d' Aboul Hacan Ali Ben Mohammed Alkalçadi (Id., t. XII, 1858 - 59). III. Traduction d'un fragment anonyme sur la formation des triangles rectangles en nombres entiers, et d' un traité sur le même sujet de Abou Dja'far Mohammet ben Aloçain (Id., t. XIV, 1860 - 61).
15. A. MARRE, Le Mossahat de Mohammed ben Moussa al Kharezmi. Extrait de son algèbre (Annali di matematica, t. VII, 1865).
16. A. MARRE, Le Talkhis d' Ibn Albanna (Atti Accad. Nuovi Linei, t. XVII, 1864 - 65).
17. A. MARRE, Manière de compter des anciens avec les doigts de la main, d' après le petit poème arabe de Choms - Eddin el Massouli et le Tratado de matématicas de Juan Perez de Moya imprimé à l' Alcala de Henares en 1573 (Bull. di bibl. e storia, t. I 1868).
18. A. MARRE, Extrait du Kitab al Morabek d' Abu'l Wafa al Djencini, transcrit d' après le ms. 1912 du supplement arabe de la Bibliothèque nationale de Paris et traduit pour la première fois en français (Id., t. VII, 1874).
19. F. WOEPCKE, Trois traités arabes sur le compas parfait (Notices et extraits des munuscrits etc., I, XXII, 1874).
20. A. HOCHHEIM, Kafi fil Hisab des Abu Beckr Mohammed ben Alhusein Alkarchi (Halle, 1879 - 80).
21. H. ZOTENBERG, Traduction arabe bu Traité des corps flottants d' Archimède (Journal asiatique, 7a serie, t. XIII, 1879).
22. M. CURTZE, Liber trium fratrum de geometria (Nova Acta k. Leopold. Akad., t. XLIX, 1885).
23. L. NIX, Das fünfte Buch der Conica des Apollonius im der arabischen Uebersetzung des Thabit ibn Corrah (Leipzig, 1889).
24. A. KARATHÉODORY, Traité du quadrilatère attribué a Nassireddin el - Toussy (Constantinople, 1892).
25. CARRA DE VAUX, L' Almageste d' Abu'l Wefa al Buzdjani (Journal asiatique, 8a serie, t. XIX, 1892).
26. H. SUTER, Das Mathematiker - Verzeichniss in Fihrist des Ibn Jakub an - Nadim (Abhandl. zur Gesch. der Mathem., t. VI, 1892).
27. R. O. BESTORN e J. L. HEIBERG, Codex Leidensis 399, I Euclidis Elementa ex interpretatione Al - Hadschdschadschii cum interpretatione Al - Narizii (Hauniae, 1893-1910).
28. G. SACERDOTE, Il trattato del pentagono e del decagono per la prima volta pubblicato in Italiano (Steinschneider's Festschrift, Leipzig, 1896).
29. CARRA DE VAUX, Une solution du problème de deux moyennes proportionnelles entre deux droites (Bibl. mathem., 1898).
30. M. CURTZE, Anaritii in decem Libros priores Elementorum Euclidis Commentarii ex interpretatione Cherardi Cremonensis in Codice Cracoviensi 569 servata (Lipsiae, 1899).
31. H. SUTER, Die Kreisquadratur des Ibn al - Haitam. Zum ersten Mal nach den Manuskripten in Berlin und des Vatikans harausgegeben und übersetzt (Zeitsch. f. Math. u. Phys., t. XLIV, 1899, hist - lit. Abtheil).
32. C. A. NALLINO, Al - Battani sive Albatenii Opus astronomicum. Ad fedem Codi-

cis Escurialensis arabiche editum, latine versum, adnotationibus instructum (Mediolani: t. I, 1903: t. II, 1907; t. III, 1899).
33. H. SUTER, Ueber die Geometrie der Söhne des Musa ben Schakri (Bibl. mathem., 3a serie, t. III, 1902).
34. H. SUTER, Das Rechenbuch des Abu Zakarija al Hassan (Id., t. II, 1901).
35. CARRA DE VAUX, Les Mécaniques ou l' Elévateur de Heron d' Aléxandrie publiées pour la première fois sur la version arabe de Qosta ibn Luqa et traduites en francais (Journ. Asiatique, ser. 9a, t. I - II, 1904).
36. H. SUTER, Ueber den Kommentar des Muhammeh ben Abdelaqui zum zehnten Buche des Euklides (Bibl. mathem., ser. 3a, t. VII, 1906—07).
37. H. SUTER, Ueber das Rechenbuch des Ali ben Ahmed al - Nasawi (Id.).
38. H. SUTER, Einige geometrische Aufgaben bei arabischen Mathematikern (Id., t. VIII, 1907 - 08).
39. H. SUTER, Die Abhandlung Qosta ben Lucas und zwei andere anonyme über die Rechnung mit zwei Fehlern und mit der angennomen Zahl (Id., t. IX, 1908 - 09).
40. H. SUTER, Zur Trigonometrie der Arabern (Id., t. X, 1909 - 10).
41. J. L. HEIBERG und E. WIEDEMANN, Ibn Haitans Schrift über parabolische Hohlspiegel (Ivi).
42. H, SUTER, Die Abhandlung des Abu Kamil Shoga b. Aslam über das fünfeck und Zehneck (Ivi).
43. H. SUTER, Das Buch der Seltenheiten der Rechenkunst von Abu Kamil el - Misri (Id., t. XI, 1910 - 11).
44. H. SUTER. Das Buch der Auffindung der Sehnen im Kreis von Abu'l Raihan Muhammed el - Biruni (Ivi).
45. F. C. KARPINSKI, The algebra of Abu Kamil Shoja (Id., t. XII, 1911 - 12.)
46. H. SUTER, Die Abhandlung über die Ausmessung des Paraboloids von el - Hasan b. el - Hasan b. el - Haitham (Ivi).
47. E. WIEDEMANN, Die Schrift über den Quarastum (Ivi).
48. H. SUTER Die astronomischen Tafeln des Muhammed ibn Musa al - Khowarizmi in der Bearbeitung des Maslena ibn Ahmed al - Madriti uud latein. Uebersetzung des Adelard of Batd und auf Grund der Vorarbeiten von A. BJÖRNBO und R. BESTHORN (Mém. de l' Académie de Danemark, Setc. de Lettres, ser. 7a, t. III, 1914).
49. L. C. KARPINSKI, Robert of Chester's Latin Translation of the Algebra of al - Khowarizmi (New York, 1915).
50. H. SUTER, Die Abhandlung Thabit b. Kurras und Abu Sahl al - Kuhis über die Ausmessung der Paraboloide (Erlanger Sitzunsber., t. XLVIII, 1916).
51. H. SUTER, Ueber die Ausmessung der Parabel von Thabit B. Kurra al - Harrani (Ivi).
52. J. SANCHEZ PEREZ, Compendio de algebra de Abenbeder (Madrit, 1916).
53. H. SUTER, Abhandlungen über die Ausmessung der Parabel von Ibrahim b. Sinan b. Thabit. Aus dem arabischen übersetzt und kommentiert (Zürcher Vierteljahrschr. t. XLIII, 1918).
54. F. BUCHNER, Die Schrift über den Quarastun von Thabit b. Qurra (Erlangener Sitzungsber. 1922, t. LII, 1920).
55. H. SUTER, Ueber die Projektion der Sternbilder und der Länder von Al - Biruni (Abhandl. zur Gesch. der Naturw. und Medizin, IV Heft 1922).
56. H. SUTER, Das Buch der geometrischen Konstruktionen des Abull Wefa (Ivi).

57. H. KOHL, Zur Geschichte der Dreiteilung des Winkels (Erlangener Sitzungsber., t. LIV, 1922).
58. A. BJÖRNBO, Thabits Werk über den Transversalensatz (liber de figura sectore). Mit Bemerkungen H. SUTER (Abhandl. zur Gesch. der Naturw. und der Medizin, Heft VII, 1924).
59. C. SCHOY, Beiträge zur arabischen Trigonometrie (Isis, vol. V, 1923).
60. C. SCHOY, Die trigonometrischen Lehren des Persischen Astronomen Abu'l Raihan Muh. ibn Ahmeh al-Biruni, dargestellt nach al-Quanum al-Masudi. Nach dem Tode des Verfassers herausgegeben von L. RUSKA und H. WIELEITNER (Hannover, 1927).
61. E. WIEDEMANN und J. FRANK, Uber die Konstruktion der Schattenlinien auf horizontalen Sonnenuhren von Tâbit ben Qurra (Kgl. Danske Videnskabernes Selkab. Mathem. fys. Meddelelser, 4a serie, t. IX, 1922).
62. K. LOKOTSCH, Ein Beitrag zur Geschichte der Mathematik. Avicenna als Mathematiker, besonders die planimetrischen Bücher seiner Euklidübersetzung. Inaug. Diss. Bionn, 1912.
63. C. C. SCHOY, Behandlung einiger geometrischen Fragepunkte durch muslimische Mathematiker (Iris, t. VIII, 1926).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XII

1. G. LIBRI, Histoire des sciences mathématiques en Italie, t. II (Paris, 1838), Note I-III.
2. Scritti di Leonardo Pisano, matematico del secolo decimoterzo, pubblicati da B. BONCOMPAGNI vol. I (Roma, 1857), vol. II (Id., 1862).
3. G. ENESTRÖM, Bibliotheca mathematica, 3a Ser., t. IX (1908-09), p. 73-74 (notizia su un manoscritto di G. de Lucius).
4. G. FRIZZO, Le regoluzze di maestro Paolo dall' Abbaco, matematico del secolo XIV (Venezia, 1883).
5. PROSDOCIMO DE BELDAMANDIS, Algorismi tractatus perutilis et necessarius (Padua 1483). (La grafia Beld Amandis ha indotto alcuni (P. Riccardi e D. E. Smith) a modificare il nome del nostro matematico; che egli però debba chiamarsi Beldomandi risulta dai numerosissimi documenti a lui relativi, pubblicati dal Favaro).
6. M. CURTZE, Die «Practica geometriae» des Leonardo Mainardi aus Cremona (Abhand. zur Gesch. der Mathematik, XIII Heft, 1902).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XIII

1. M. CURTZE, Kommentar zum «Tractatus de numeris datis» des Jordanus Nemorarius (Zeitchr. f. Math. u. Phys., t. XXXVI, 1891).
2. M. CURTZE, Jordani Nemorarii Geometria vel de Triangulis, Libri IV (Mitth. des Coppernicus-Verein, t. VI, 1887).
3. J. O. HALLIWEL, Rara mathematica (London, 1839). (I Cap., JOHANNIS DE SACROBOSCO, Tractatus de arte numerandi).
4. M. CURTZE, Petri Philomeni de Dacia, in algorismo vulgarem Johannis de Sacrobosco Commentarius (Nauniae, 1897).

5. C. HENRY, Sur les deux plus anciens traités français d' algorisme et de géometrie (Bull. di bibl. e storia, t. XV, 1882).
6. VINCENTIS BELLOVACENSIS, Speculum doctrinale (1a ed., Strassburg, 1468; 2a Douai, 1624).
7. J. D. BOND, Quadripartitum Ricardi Walynforde de sinibus demonstratis (Isis, vol. V., n. 13, 1923).
8. G. LANGE, Sefer Maassei Choscheb. Die Praxis des Rechners, Ein hebräisch arithmetisches Werk des Levi ben Gerson aus dem Jahre 1321 (Frankfurt a. M., 1909).
9. J. CARLEBACH, Lewi ben Gerson als Mathematiker (Berlin 1910).
10. Tractatus GEORGII PURBACHII super Propositiones Ptolemaei de sinibus et chordis (Norimbergae, 1541).
11. NICOLO'DE CUSA Opera omnia (1a ed. Parisiis, 1514; 2a ed Basilae, 1565).
12. I. DE MONTE REGIO, De triangulis planis et sphaericis. l. V. (Venetiis, 1533).
13. C. T. DE MURR, Memorabilia Bibliothecarum publicarum Norimbergensium et Universitatis Altdorfinae, parte I (Norimberga, 1786; carteggio del Regiomontano).
14. M. CURTZE, Der Briefwechsel Regiomontan's mit Giovanni Bianchini, Jacob von Speier und Christian Roder (Abhandl. zur Gesch. der Mathematik, XII Heft, 1902).
15. S. MAGRINI, Joannes de Blanchinis Ferrasiensis e il suo carteggio scientifico col Regiomontano (1463 - 64) (Ferrara, 1916).
16. N. ORESME, Tractatus de latitudinibus formarum (Padova, 1482).
17. M. CURTZE, Der Algorismus Proportionum des Nicolaus Oresme (Berlin, 1868).
18. M. CURTZE, Ueber die Handschsift R. 4° - 2 der K. Gymnasialbibliothek zu Thorn (Zeitsch. für Math. u. Phys. t. XIII, 1868).
19. G. SACERDOTE, Le Livre d' Algèbre et le Problème des asymptotes de Simon Motot (Revue des études juives, 1893 - 94).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XIV

1. G. OVIO, L' Ottica di Euclide (Milano, 1918).
2. Optice thesaurus ALHAZEN, l. VII (Basileae, 1572).
3. VITELLIONIS Perspectivae, l. X (Norimbergae, 1533).
4. L. B. ALBERTI, Opere volgari per la più parte inedite e tratte dagli autografi, quattro volumi (Firenze, 1844 - 47).
5. L. B. ALBERTI, Opera ineditae et pauca separatim impressa, H. MANCINI curante (Florentiae, 1890).
6. C. WINTERBERG, Petrus Pictor Burgensis de perspectiva pingendi (Strassburg, 1899).
7. G. MANCINI, L' opera «De Corporibus regularibus» di Pietro Franceschi detto della Francesca usurpata da Fra Luca Pacioli (Mem. della R. Acad. dei Lincei,serie 5a, Classe scienze morali, ecc., vol., XIV, 1913).
8. L. DA VINCI, Trattato della Pittura (Bologna, 1786).
9. C. RAVAISSON - MOLLIEN, Les Manuscrits de Léonard de Vinci, t. I - VI (Paris, 1881 - 1891).
10. L. DA VINCI, Il Codice Atlantico nella Biblioteca Ambrosiona di Milano. Trascrizione diplomatica e critica di G. PIUMATI (Milano, 1894).
11. Il Codice Arnudel 263 nel Museo Britannico di Londra, a cura della Commissione Vinciana (Roma, 1926 - 28).

12. Di ALBERTO DURERO, pittore e geometra chiarissimo, Della simmetria dei corpi humani, l. IV (Venezia, 1591).
13. A. DÜRER, Unterweisung der messung mit dem zirckel und richtscheit etc. (Nümberg, 1525).
14. ALBERTUS DURERUS, Institutionum geometricarum, l. IV (Parisiis, 1535).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XV

1. B. BONCOMPAGNI, intorno a un trattato d' aritmetica stampato nel 1478 (Atti dell' Accademia Pontificia dei Nuovi Lincei, t, XVI, 1862-63). Alcune pagine dell' «Aritmetica di Treviso» si trovano riprodotte in principio dell'opera di D. E. SMITH, Rara arithmetica (Boston and London, 1908).
2. G. P. PICHI, Di un nuovo esemplare dell'Abbaco di Treviso del 1478, posseduto dalla Biblioteca della Regia Università di Bologna (Bologna, 1888).
3. D. E. SMITH, The first great commercial Arithmetic (Isis, t. VIII, 1926; si tratta dell' opera del Borghi).
4. F. UNGER, Die Methodik der praktischen Arithmetik in historischer Entwicklung (Leipzig, 1888; pagg. 36 - 40 dà notizie sull' Aritmetica di Bamberg).
5. A. MARRE, Le Triptary en la science des nombres par Maistre Nicolas Chuquet Parisien, d' après le Manuscrit «Fonds français», no 1346 de la Bibliothèque Nationale de Paris (Bulettino di bibl. e storia, ecc., t. XIII, 1880).
6. LUCA PACIOLI, Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalita (1a ed., Venezia, 1494; 2a ed., Tusculano, 1525).
7. LUCA PACIOLI, Divina Proportione (Venezia, 1509).
8. A. AGOSTINI, Il «De viribus quantitatis» di Luca Pacioli (Period. di matematica, 4a serie, t. IV, 1924).